MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA 2

CÁLCULO VECTORIAL, ANÁLISIS DE FOURIER Y ANÁLISIS COMPLEJO

DENNIS G. ZILL
JACQUELINE M. DEWAR

Mc Graw Hill

Tercera edición

El volumen de *Matemáticas avanzadas para ingeniería 2* trata los temas relacionados con el cálculo vectorial, las funciones ortogonales, las series de Fourier y el análisis complejo.

Características sobresalientes de esta obra:

- Aborda las ecuaciones diferenciales parciales, lo que permite que este versátil texto pueda ser utilizado prácticamente en cualquier curso de matemáticas avanzadas o cálculo avanzado.
- Supera a cualquier otro libro sobre el tema no sólo por la claridad con la que los autores exponen los conceptos, sino por los recursos pedagógicos empleados, entre los cuales se tienen:
  - Secciones introductorias de cada capítulo.
  - Ejercicios por sección.
  - Ejercicios de repaso general.
  - Una serie de proyectos de ingeniería y ciencia relacionados con los temas del texto aportados por importantes matemáticos.
- Un método distinto para la resolución de problemas de valores en la frontera no homogéneos.
- Problemas añadidos.
- Grupos de ejercicios que enfatizan la creación de conceptos y le dan continuidad a los desarrollos teóricos presentados en las secciones y facilitan la asignación de tareas.

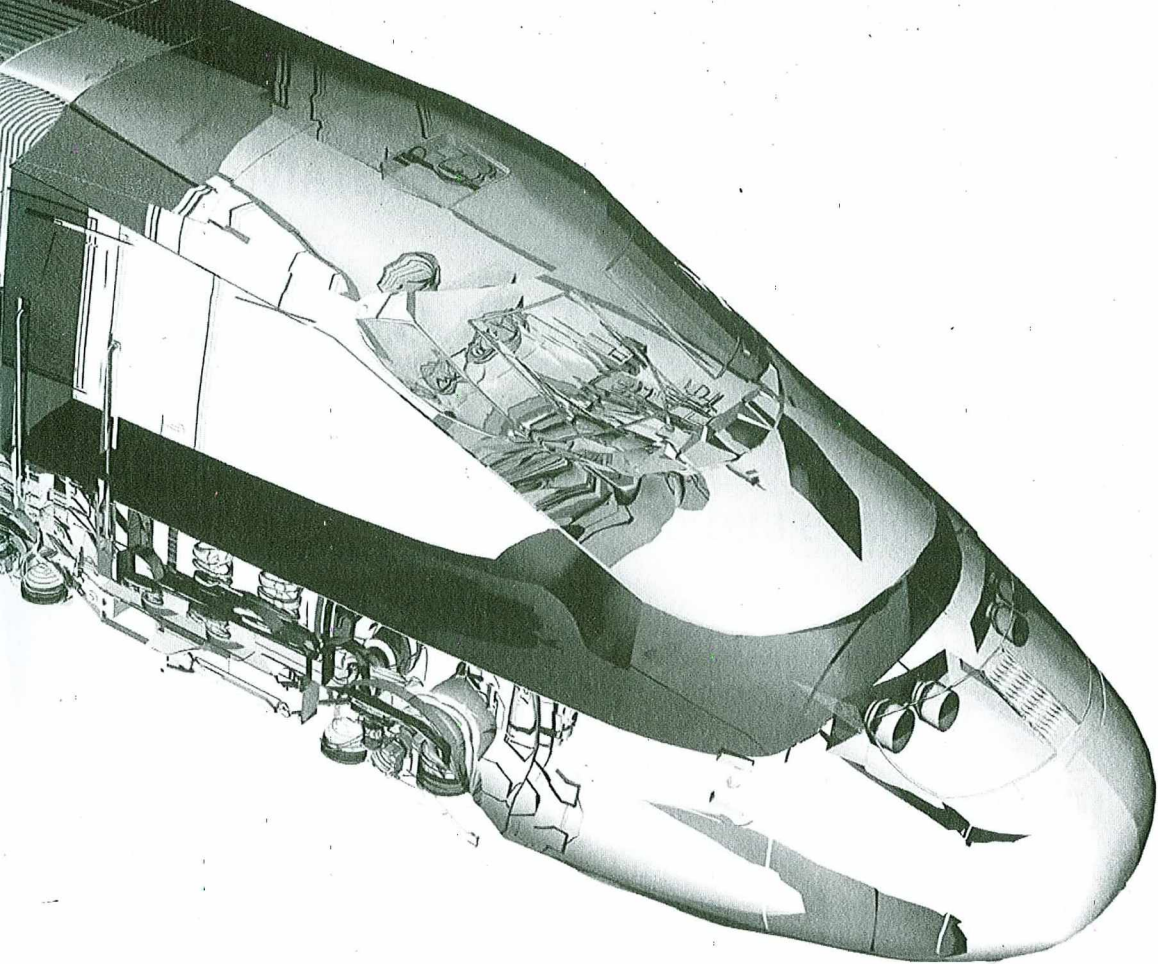
McGraw-Hill Interamericana

The McGraw-Hill Companies

ISBN-13: 978-970-10-6510-5
ISBN-10: 970-10-6510-7

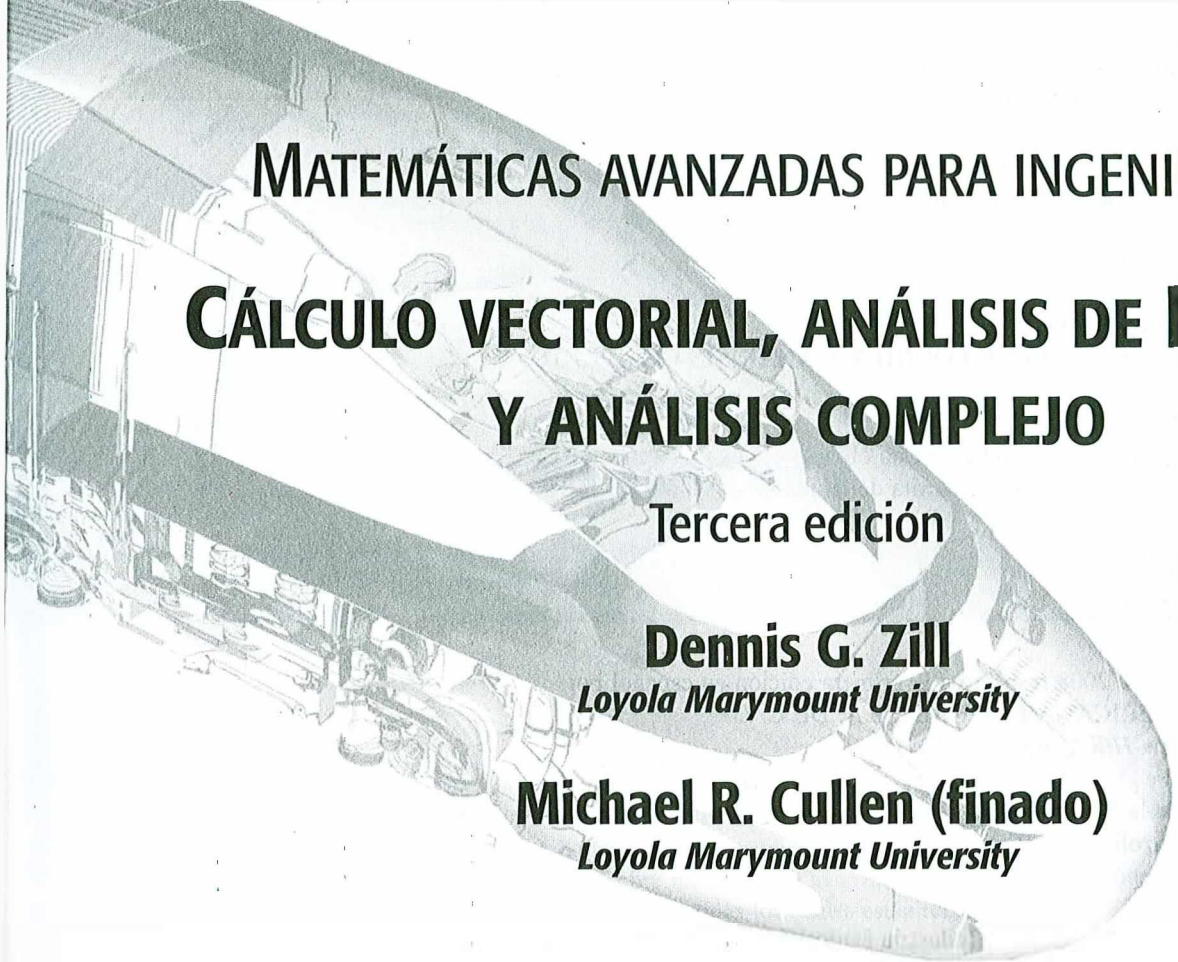
EAN

Visite nuestra página WEB
www.mcgraw-hill-educacion.com



MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA 2:

CÁLCULO VECTORIAL, ANÁLISIS DE FOURIER Y ANÁLISIS COMPLEJO



MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA 2:

CÁLCULO VECTORIAL, ANÁLISIS DE FOURIER Y ANÁLISIS COMPLEJO

Tercera edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Michael R. Cullen (finado)
Loyola Marymount University

Traducción técnica:

Dr. Emilio Sordo Zabay
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Revisión técnica:

Juan Carlos del Valle Sotelo
Departamento de Física y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Estado de México

Heriberto Aguilar Juárez
División de Ciencias Básicas
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Ignacio Ramírez Vargas
Departamento de Ingeniería
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Hidalgo

José Martín Villegas González
Centro Universitario de Ciencias Exactas
e Ingenierías (CUCEI),
Universidad de Guadalajara

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • AUCKLAND
LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SÃO PAULO
SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Lorena Campa Rojas
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductor: Carlos Roberto Cordero Pedraza

MATEMÁTICAS AVANZADAS PARA INGENIERÍA 2:
CÁLCULO VECTORIAL, ANÁLISIS DE FOURIER Y ANÁLISIS COMPLEJO
Tercera edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

McGraw-Hill Interamericana

DERECHOS RESERVADOS © 2008 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-10: 970-10-6510-7
ISBN-13: 978-970-10-6510-5

Traducido de la tercera edición en inglés de la obra ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS, by Dennis G. Zill and Michael R. Cullen. Copyright © 2006 by Jones and Bartlett Publishers, Inc., págs i-xiv, xviii-xxxiii, 299-566, 651-929, app-9-app-14, ans-14-ans-21, ans-30-ans-49, i-1-i-23. All rights reserved.
ISBN-10: 0-7637-4591-X
ISBN-13: 978-0-7637-4591-2

1234567890 09765432108

Impreso en México *Printed in Mexico*
Impreso por Litográfica Ingramex *Printed by Litografica Ingramex*

Prefacio a la tercera edición en inglés

A diferencia de un curso de "cálculo" o de "ecuaciones diferenciales", donde el contenido del curso está muy estandarizado, el contenido de un curso titulado "matemáticas para ingeniería" algunas veces varía de forma considerable entre dos instituciones académicas distintas. Por lo tanto, un texto sobre matemáticas avanzadas para ingeniería es un compendio de muchos temas matemáticos, todos los cuales están relacionados en términos generales por la conveniencia de su necesidad o su utilidad en cursos y carreras subsiguientes de ciencia e ingeniería. En realidad, no hay un límite para la cantidad de temas que se pueden incluir en un texto como el que ahora nos ocupa. En consecuencia, este libro representa la opinión de los autores, *en este momento*, acerca de lo que constituyen "las matemáticas de ingeniería".

Contenido del texto

El presente tomo fue dividido en tres partes, en las cuales sigue manifiesta nuestra creencia de que la columna vertebral de las matemáticas relacionadas con la ciencia y la ingeniería es la teoría y las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Parte I: Cálculo vectorial (capítulos 1 a 3)

El capítulo 1,*Vectores*, y el 3, *Cálculo vectorial*, incluyen muchos de los temas que se cubren en el tercer semestre de una secuencia de cálculo: vectores geométricos, funciones vectoriales, derivadas direccionales, integrales de línea, integrales dobles y triples, integrales de superficie, y los teoremas de Green, Stokes y de la divergencia. El capítulo 2, *Matrices*, es una introducción a los sistemas de ecuaciones algebraicas, los determinantes y el álgebra matricial con énfasis especial en aquellos tipos de matrices útiles en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Las secciones sobre criptografía, códigos para la corrección de errores, el método de los mínimos cuadrados y los modelos compartimentales discretos se presentan como aplicaciones del álgebra matricial.

Parte II: Análisis de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales (capítulos 4 a 8)

En esta sección se presenta el material medular de las series de Fourier y de los problemas sobre valores en la frontera. En el capítulo 4, *Funciones ortogonales y series de*

Fourier, se presentan los temas fundamentales de los conjuntos de funciones ortogonales y la expansión de funciones en términos de una serie infinita de funciones ortogonales. Estos temas se utilizan más adelante en los capítulos 5 y 6, donde se resuelven problemas de valor en la frontera en distintos sistemas de coordenadas: rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas, mediante la aplicación del método de separación de variables. En el capítulo 7, *Método de la transformada integral*, los problemas de valor en la frontera se resuelven por medio de las transformadas integrales de Laplace y Fourier.

Parte III: Análisis complejo (capítulos 9 a 12)

Los capítulos 9, 10, 11 y 12 cubren los temas elementales de los números complejos a través de la aplicación de transformaciones conformes en la solución del problema de Dirichlet. Este material en sí mismo puede cubrir fácilmente un curso trimestral de introducción a variables complejas.

Principales características de *Matemáticas avanzadas II*

- Todo el texto se modernizó a fondo para preparar a los ingenieros y científicos con las habilidades matemáticas requeridas para estar a la altura de los desafíos tecnológicos actuales.
- Se han agregado, al inicio del libro, nuevos proyectos de ciencia e ingeniería aportados por importantes matemáticos. Estos proyectos están relacionados con los temas del texto.
- Se han añadido muchos problemas. Además, fueron reorganizados muchos grupos de ejercicios y, en algunos casos, se reescribieron por completo para seguir el flujo del desarrollo presentado en la sección y facilitar más la asignación de tareas. Los grupos de ejercicios también enfatizan la elaboración de conceptos.
- Hay un gran énfasis tanto en las ecuaciones diferenciales como en los modelos matemáticos. La noción de un modelo matemático está entretejida a lo largo de todo el texto, y se analiza la construcción y las desventajas de diferentes modelos.
- En la sección 5.6 se agregó otro método para resolver problemas de valor en la frontera no homogéneos.
- En los capítulos 5 y 6 se concede mayor énfasis al problema de Neumann.
- A lo largo de los capítulos 4, 5 y 6, la confusa mezcla de símbolos como λ^2 y $\sqrt{-\lambda}$ en la solución de problemas de valor en la frontera de dos puntos se ha reemplazado por el uso consistente de λ. A lo largo del análisis se hace énfasis en los tres casos $\lambda = \alpha^2$, $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2$.

Diseño del texto

El texto cuenta con un formato más amplio y un diseño atractivo, lo cual hace que sea placentero leer y aprender de él.

Todas las figuras cuentan con textos explicativos. Se han agregado más comentarios y anotaciones al margen en todo el libro. Cada capítulo tiene una página de presentación que incluye una tabla de contenidos y una breve introducción al material que se estudiará. Al final de cada capítulo se incluyen ejercicios de revisión. Después de los apéndices se proporcionan respuestas a los problemas impares seleccionados.

Agradecimientos

Deseo agradecer a las siguientes personas que generosamente destinaron tiempo de sus ocupadas agendas para proporcionar los proyectos incluidos en el texto:

Anton M. Jopko, Departamento de Física y Astronomía, McMaster University.

Warren S. Wright, Departamento de Matemáticas, Loyola Marymount University.

Gareth Williams, Departamento de Matemáticas y Ciencias Computacionales, Stetson University.

Jeff Dodd, Departamento de Computación y Ciencias de la Información, Jacksonville State University.

Matheus Grasselli, Departamento de Matemáticas y Estadística, McMaster University.

Dmitry Pelinovsky, Departamento de Matemáticas y Estadística, McMaster University.

También es un gusto poder agradecer a las siguientes personas por sus comentarios y sugerencias de mejora:

Sonia Henckel, Lawrence Technological University.

Donald Hartig, California Polytechnic State University, San Luis Obispo.

Jeff Dodd, Jacksonville State University.

Victor Elias, University of Western Ontario.

Cecilia Knoll, Florida Institute of Technology.

William Criminale, University of Washington.

Stan Freidlander, Bronx Community College.

Herman Gollwitzer, Drexel University.

Robert Hunt, Humboldt State University.

Ronald Guenther, Oregon State University.

Noel Harbertson, California State University.

Gary Stoudt, Indiana University of Pennsylvania.

La tarea de compilar un texto de esta magnitud fue, en pocas palabras, larga y difícil. A lo largo del proceso de pasar cientos de páginas manuscritas por muchas manos, es indudable que se nos pudieron haber escapado algunos errores, por lo cual me disculpo de antemano.

Dennis G. Zill
Los Angeles

Prólogo a la edición en español

Para que la selección de temas pudiera ser flexible, el texto original en inglés fue dividido en cinco partes o subdivisiones principales. Para la edición en español, se optó por dividir el texto en dos volúmenes que se pueden manejar de manera independiente. El primero aborda principalmente las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. En este segundo tomo se reúnen los temas relacionados con el cálculo vectorial, sin dejar a un lado el análisis de Fourier y las ecuaciones en derivadas parciales. Esto es lo que hace que, aunque los dos tomos se complementen perfectamente, también puedan funcionar de manera independiente de acuerdo con las características y necesidades del curso.

Queremos agradecer de manera especial las valiosas aportaciones y comentarios de los siguientes profesores, que sin duda alguna han enriquecido esta edición:

Ángel Varela, *ITEC*
Arturo Patrón, *ITEC*
Aureliano Castro, *UAS, Escuela de Ingeniería*
Eduardo Soberanes, *ITESM Culiacán*
José Calderón Lamas, *ITEC*
José Carlos Aragón Hernández, *ITEC*
José Humberto Jacobo Escobar, *UAS, Facultad de Ciencias Químico Biológicas*
Juan Castañeda, *UAS, Facultad de Ciencias Químico Biológicas*
Juana Murillo Castro, *UAS, Escuela de Ingeniería*
Luis Felipe Flores, *ITLM*
Manuel Ramón Apodaca Sánchez, *ITLM*
Marcial Arrambi Díaz, *ITC*
Marco Antonio Rodríguez Rodríguez, *ITLM*
Oscar Guerrero, *ITESM Culiacán*
Ramón Duarte, *UAS, Escuela de Ingeniería*
Raúl Soto López, *UDO Culiacán*

Contenido

Prefacio a la tercera edición en inglés v

Prólogo a la edición en español ix

Proyecto para la sección 2.1 Gareth Williams, Ph.D. — Red de dos puertos en circuitos eléctricos xv

Proyecto para la sección 2.2 Gareth Williams, Ph.D. — Flujo de tráfico xvii

Proyecto para la sección 2.15 Anton M. Jopko, Ph.D. — Dependencia de la resistividad en la temperatura xix

Proyecto para la sección 3.16 Jeff Dodd, Ph.D. — Superficies mínimas xx

Proyecto para la sección 6.3 Matheus Grasselli, Ph.D. — El átomo de hidrógeno xxii

Proyecto para la sección 7.4 Jeff Dodd, Ph.D. — La desigualdad de incertidumbre en el procesamiento de señales xxv

Proyecto para la sección 7.4 Anton M. Jopko, Ph.D. — Difracción de Fraunhofer a través de una abertura circular xxvii

Proyecto para la sección 8.2 Dmitry Pelinovsky, Ph.D. — Inestabilidades en métodos numéricos xxix

Parte 1 Vectores, matrices y cálculo vectorial 3

Capítulo 1 Vectores 4

1.1 Vectores en el espacio 2D 5

1.2 Vectores en el espacio 3D 11

1.3 Producto escalar 16

1.4 Producto vectorial 23

1.5 Líneas y planos en el espacio 3D 28

1.6 Espacios vectoriales 35

1.7 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt 44

Ejercicios de repaso del capítulo 1 49

Capítulo 2 Matrices 51

2.1 Álgebra matricial 52
2.2 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales 61
2.3 Rango de una matriz 72
2.4 Determinantes 77
2.5 Propiedades de los determinantes 82
2.6 Inversa de una matriz 89
2.6.1 Cálculo de la inversa 89
2.6.2 Utilización de la inversa para resolver sistemas 95
2.7 Regla de Cramer 99
2.8 El problema del valor propio 102
2.9 Potencias de las matrices 108
2.10 Matrices ortogonales 112
2.11 Aproximación de valores propios 119
2.12 Diagonalización 126
2.13 Criptografía 135
2.14 Código corrector de errores 138
2.15 Método de los mínimos cuadrados 144
2.16 Modelos discretos de compartimiento 147
Ejercicios de repaso del capítulo 2 151

Capítulo 3 Cálculo vectorial 155

3.1 Funciones vectoriales 156
3.2 Movimiento sobre una curva 162
3.3 Curvatura y componentes de la aceleración 167
3.4 Derivadas parciales 171
3.5 Derivada direccional 178
3.6 Planos tangentes y líneas normales 184
3.7 Divergencia y rotacional 187
3.8 Integrales de línea 193
3.9 Independencia de la trayectoria 202
3.10 Integrales dobles 209
3.11 Integrales dobles en coordenadas polares 218
3.12 Teorema de Green 223
3.13 Integrales de superficie 228
3.14 Teorema de Stokes 237
3.15 Integrales triples 243
3.16 Teorema de la divergencia 254
3.17 Cambio de variables en integrales múltiples 260
Ejercicios de repaso del capítulo 3 267

Parte 2 Series de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales 271

Capítulo 4 Funciones ortogonales y series de Fourier 272

4.1 Funciones ortogonales 273
4.2 Series de Fourier 278

4.3 Series de Fourier de cosenos y senos 283
4.4 Series complejas de Fourier 290
4.5 Problema de Sturm-Liouville 294
4.6 Series de Bessel y de Legendre 301
4.6.1 Serie de Fourier-Bessel 302
4.6.2 Serie de Fourier-Legendre 305
Ejercicios de repaso del capítulo 4 308

Capítulo 5 Problemas de valores en la frontera en coordenadas rectangulares 309
5.1 Ecuaciones diferenciales parciales separables 310
5.2 Ecuaciones clásicas y problemas de valores en la frontera 314
5.3 La ecuación de calor 319
5.4 La ecuación de onda 322
5.5 La ecuación de Laplace 327
5.6 Problemas de valores en la frontera no homogéneos 332
5.7 Desarrollos en series ortogonales 339
5.8 Serie de Fourier con dos variables 343
Ejercicios de repaso del capítulo 5 346

Capítulo 6 Problemas de valores en la frontera en otros sistemas coordenados 348
6.1 Problemas en coordenadas polares 349
6.2 Problemas en coordenadas polares y cilíndricas: funciones de Bessel 354
6.3 Problemas en coordenadas esféricas: polinomios de Legendre 360
Ejercicios de repaso del capítulo 6 363

Capítulo 7 Método de la transformada integral 365
7.1 Función de error 366
7.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace 367
7.3 Integral de Fourier 375
7.4 Transformadas de Fourier 380
7.5 Transformada rápida de Fourier 386
Ejercicios de repaso del capítulo 7 395

Capítulo 8 Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales 397
8.1 La ecuación de Laplace 398
8.2 La ecuación de calor 403
8.3 La ecuación de onda 409
Ejercicios de repaso del capítulo 8 412

Parte 3 Análisis complejo 415

Capítulo 9 Funciones de una variable compleja 416

9.1 Números complejos 417
9.2 Potencias y raíces 421
9.3 Conjuntos en el plano complejo 425
9.4 Funciones de una variable compleja 428
9.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann 434
9.6 Funciones exponenciales y logarítmicas 439
9.7 Funciones trigonométricas e hiperbólicas 445
9.8 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas 449
Ejercicios de repaso del capítulo 9 452

Capítulo 10 Integración en el plano complejo 453

10.1 Integrales de contorno 454
10.2 Teorema de Cauchy-Goursat 459
10.3 Independencia de la trayectoria 464
10.4 Fórmulas integrales de Cauchy 470
Ejercicios de repaso del capítulo 10 475

Capítulo 11 Series y residuos 477

11.1 Sucesiones y series 478
11.2 Serie de Taylor 483
11.3 Series de Laurent 489
11.4 Ceros y polos 497
11.5 Residuos y teorema del residuo 500
11.6 Cálculo de integrales reales 506
Ejercicios de repaso capítulo 11 512

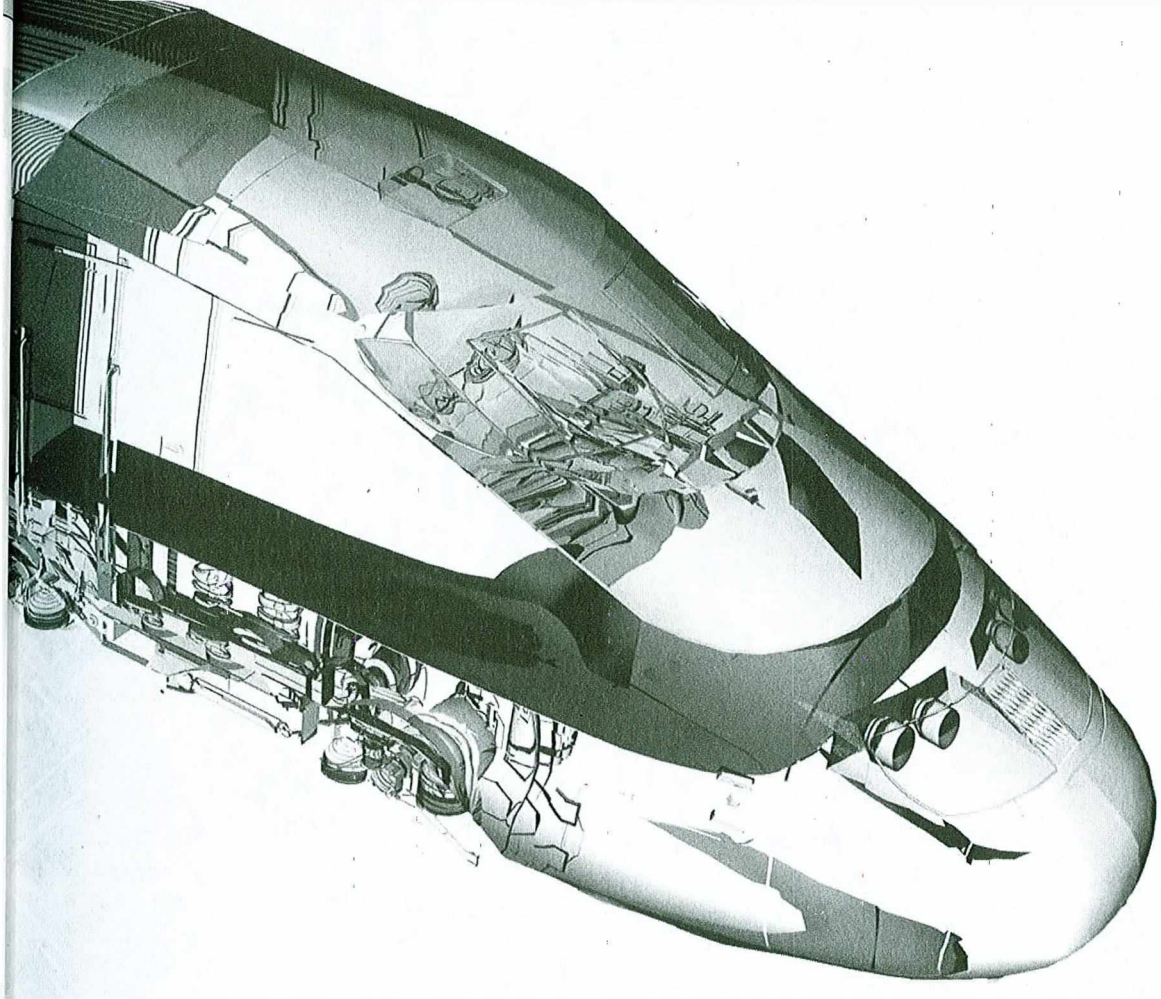
Capítulo 12 Transformaciones conformes 514

12.1 Funciones complejas como transformaciones 515
12.2 Transformaciones conformes 519
12.3 Transformaciones racionales lineales 526
12.4 Transformaciones de Schwarz-Christoffel 532
12.5 Fórmulas integrales de Poisson 537
12.6 Aplicaciones 541
Ejercicios de repaso del capítulo 12 548

Apéndice Transformaciones conformes AP-1

Respuestas a los problemas seleccionados de número impar RESP-1

Índice I-1



Matemáticas avanzadas para ingeniería II:

Cálculo vectorial, análisis de Fourier y análisis complejo

Por Dayet

Red de dos puertos en circuitos eléctricos

Gareth Williams, Ph.D.
Departamento de Matemáticas y Ciencias Computacionales, Stetson University

Muchas redes eléctricas están diseñadas para aceptar señales en ciertos puntos y producir una versión modificada de éstas. El arreglo general se ilustra en la figura 1.

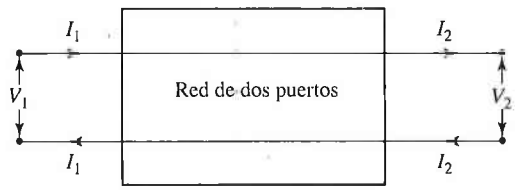


Figura 1 Red eléctrica

Una corriente I_1 a un voltaje V_1 se envía sobre una red de dos puertos, y ésta determina de alguna forma la corriente de salida I_2 al voltaje V_2. En la práctica, la relación entre las corrientes y voltajes de entrada y salida por lo general es lineal, y se encuentran relacionadas por una ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se denomina **matriz de transmisión** del puerto. La matriz define a la red de dos puertos.

En la figura 2 se presenta un ejemplo de una red de dos puertos. La parte interior consiste en una resistencia R conectada como se muestra. Podemos demostrar que las corrientes y los voltajes en efecto se comportan de una forma lineal y determinan la matriz de transmisión. Nuestro método será construir dos ecuaciones: una que exprese a V_2 en términos de V_1 e I_1, y la otra que exprese a I_2 en términos de V_1 e I_1. Posteriormente combinaremos estas dos ecuaciones en una sola ecuación matricial.

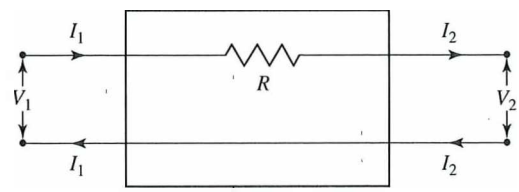


Figura 2 Red de dos puertos

Utilizamos la siguiente ley:

> ***Ley de Ohm:*** *La caída de voltaje a través de una resistencia es equivalente a la corriente multiplicada por la resistencia.*

La caída de voltaje a través de la resistencia será $V_1 - V_2$. La corriente a través de la resistencia es I_1. Por tanto, la ley de Ohm establece que $V_1 - V_2 = I_1R$. La corriente I_1 pasa a través de la resistencia R y existe como I_1. De esta forma, $I_2 = I_1$. Primero escribimos estas dos ecuaciones en la forma estándar,

$$V_2 = V_1 - RI_1$$
$$I_2 = 0V_1 + I_1$$

y luego como una ecuación matricial,

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de transmisión es $\begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De esta forma si R equivale a 2 ohms y el voltaje y corriente de entrada son $V_1 = 5$ volts e $I_1 = 1$ ampere, respectivamente, obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El voltaje y la corriente de salida serán 3 volts y 1 ampere respectivamente.

En la práctica, se colocan en serie varias redes de dos puertos estándar como la que se describió arriba para obtener un cambio de voltaje y corriente deseado. Considere las tres redes de dos puertos de la figura 3, cuyas matrices de transmisión son **A**, **B** y **C**.

Al considerar cada red de forma independiente, tenemos que

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} V_4 \\ I_4 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Al sustituir $\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$ de la primera ecuación en la segunda obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} = \mathbf{BA} \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

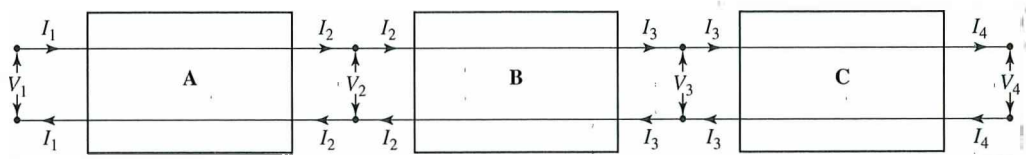


Figura 3 Dos puertos en serie

Al sustituir la última matriz $\begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$ en la tercera ecuación obtenemos

$$\begin{pmatrix} V_4 \\ I_4 \end{pmatrix} = \mathbf{CBA}\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix}.$$

De este modo las tres redes de dos puertos serán equivalentes a una sola. La matriz de transmisión de esta red de dos puertos será el producto **CBA** de los puertos individuales. Observe que la ubicación de cada puerto en la secuencia es relevante debido a que las matrices no son conmutativas bajo la multiplicación.

Problemas relacionados

En los problemas 1-3, determine las matrices de transmisión de las redes de dos puertos que se muestran en la figura.

1. $V_1 = V_2$ debido a que las terminales se conectan de forma directa. La corriente a través de la resistencia R es $I_1 - I_2$. La caída de voltaje a través de R será V_1.

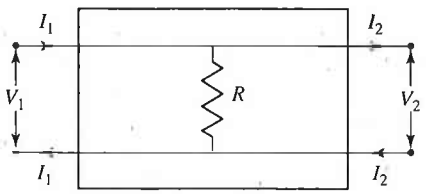


Figura 4 Red de dos puertos para el problema 1

2. La corriente a través de R_1 es $I_1 - I_2$. La caída de voltaje a través de R_1 es V_1. La corriente a través de R_2 es I_2. La caída de voltaje a través de R_2 es $V_1 - V_2$.

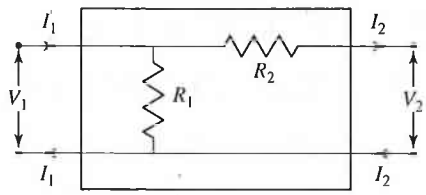


Figura 5 Red de dos puertos para el problema 2

3. La corriente a través de R_1 es I_1. La caída de voltaje a través de R_1 es $V_1 - V_2$. La corriente a través de R_2 es $I_1 - I_2$. La caída de voltaje a través de R_2 es V_2.

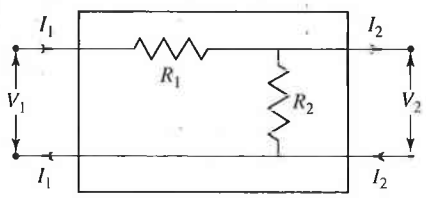


Figura 6 Red de dos puertos para el problema 3

4. La red de dos puertos de la figura 7 consiste de tres redes de dos puertos colocadas en serie. Las matrices de transmisión son las que se muestran.

   a) ¿Cuál es la matriz de transmisión de la red de dos puertos compuesta?

   b) Si el voltaje de entrada equivale a 3 volts y la corriente a 2 amperes, determine el voltaje y la corriente de salida.

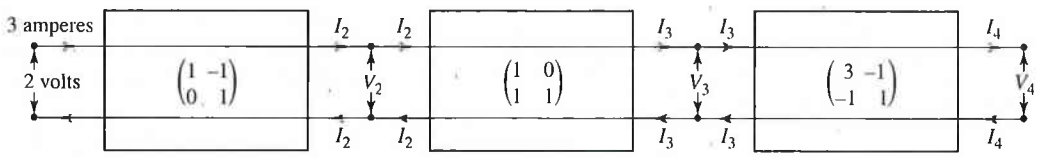


Figura 7 Redes de dos puertos en serie para el problema 4

Flujo de tráfico

Gareth Williams, Ph.D.
Departamento de Matemáticas y Ciencias Computacionales,
Stetson University

El análisis de redes, como lo observamos en el análisis de las reglas de nodo y lazo de Kirchhoff en la sección 2.2, juega un papel importante en la ingeniería eléctrica. En años recientes, los conceptos y herramientas de este análisis de redes han resultado útiles en muchos otros campos, como en la teoría de la información y el estudio de sistemas de transporte. El siguiente análisis del flujo de tráfico a través de una red de caminos durante las horas pico ilustra cómo en la práctica pueden surgir sistemas de ecuaciones lineales con muchas soluciones.

Considere la red típica de calles de la figura 1. Representa un área del centro de la ciudad de Jacksonville, Florida. Las calles son de un solo sentido, las flechas indican la dirección del flujo del tráfico. El flujo del tráfico de entrada y salida de la red se mide en términos de vehículos por hora (vph). Las cifras que se proporcionan se basan en las horas de tráfico pico de mitad de semana, de 7 a 9 A.M. y de 4 a 6 P.M. Se deberá permitir un incremento de 2 por ciento en el flujo general durante la tarde del viernes. Construyamos un modelo matemático que pueda utilizarse para analizar esta red.

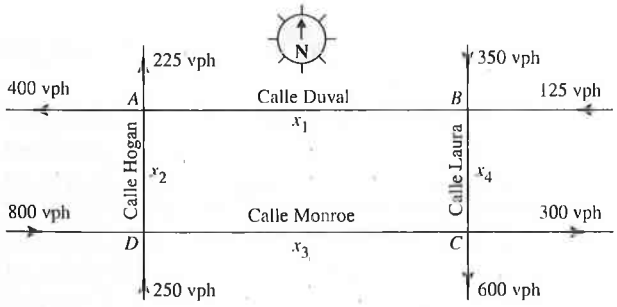


Figura 1 Centro de la ciudad de Jacksonville, Florida

Suponga que se aplican las siguientes leyes de tráfico:

Todo el tráfico que ingresa a una intersección debe abandonarla.

Esta restricción de la conservación del flujo (compárela con la regla de nodos de Kirchhoff) nos lleva a un sistema de ecuaciones lineales:

Intersección A: Tráfico de entrada = $x_1 + x_2$. Tráfico de salida = 400 + 225. Por tanto, $x_1 + x_2 = 625$.

Intersección B: Tráfico de entrada = 350 + 125. Tráfico de salida = $x_1 + x_4$. Por tanto, $x_1 + x_4 = 475$.

Intersección C: Tráfico de entrada = $x_3 + x_4$. Tráfico de salida = 600 + 300. Por tanto, $x_3 + x_4 = 900$.

Intersección D: Tráfico de entrada = 800 + 250. Tráfico de salida = $x_2 + x_3$. Por tanto $x_2 + x_3 = 1\,050$.

Estas restricciones sobre el tráfico se describen empleando el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 625 \\ x_1 + x_4 &= 475 \\ x_3 + x_4 &= 900 \\ x_2 + x_3 &= 1\,050 \end{aligned}$$

Puede emplearse el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver este sistema de ecuaciones. La matriz aumentada y la forma reducida escalonada por renglón son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 625 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 475 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 900 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\,050 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{de renglones}]{\text{Operaciones}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 475 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones que corresponde con esta forma reducida escalonada por renglón es

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 475 \\ x_2 - x_4 &= 150 \\ x_3 + x_4 &= 900. \end{aligned}$$

Al expresar cada variable principal en términos de la variable restante, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_4 + 475 \\ x_2 &= x_4 + 150 \\ x_3 &= -x_4 + 900. \end{aligned}$$

Como podría esperarse, el sistema de ecuaciones cuenta con varias soluciones, por lo que es posible tener vàrios flujos de tráfico. Un conductor cuenta con una cierta cantidad de opciones en las intersecciones. Ahora utilicemos este modelo matemático para obtener más información sobre el flujo de tráfico. Suponga que se requiere realizar trabajos de mantenimiento en el segmento DC de Calle Monroe. Es deseable contar con un flujo de tráfico x_3 lo más pequeño posible para este segmento de calle. Los flujos pueden controlarse a lo largo de diversas bifurcaciones por medio de semáforos. ¿Cuál sería el valor mínimo de x_3 sobre DC que no ocasione una congestión de tráfico? Para resolver esta pregunta, emplearemos el sistema de ecuaciones anterior.

Los flujos de tráfico no deben ser negativos (un flujo negativo podría interpretarse como tráfico que se desplaza en la dirección incorrecta en una calle de un solo

sentido). La tercera ecuación en el sistema nos indica que x_3 será un mínimo cuando x_4 sea lo más grande posible, siempre que no exceda de 900. El valor más grande que x_4 puede llegar a tener sin ocasionar valores negativos de x_1 o de x_2 es 475. De este modo, el valor más pequeño de x_3 será $-475 + 900$, o 425. Todo trabajo de mantenimiento sobre la Calle Monroe deberá permitir un volumen de tráfico de al menos 425 vph.

En la práctica, las redes son mucho más vastas que la analizada aquí, llevando a sistemas de ecuaciones lineales más grandes, que son manipuladas mediante computadoras. Es posible ingresar diversos valores para las variables en una computadora con el fin de crear escenarios distintos.

Problemas relacionados

1. Construya un modelo matemático que describa el flujo de tráfico en la red de calles señalada en la figura 2. Todas las avenidas son calles de un solo sentido en las direcciones indicadas. Las unidades están dadas en vehículos por hora (vph). Proporcione dos flujos de tráfico posibles. ¿Cuál es el flujo mínimo posible que puede esperarse sobre el tramo AB?

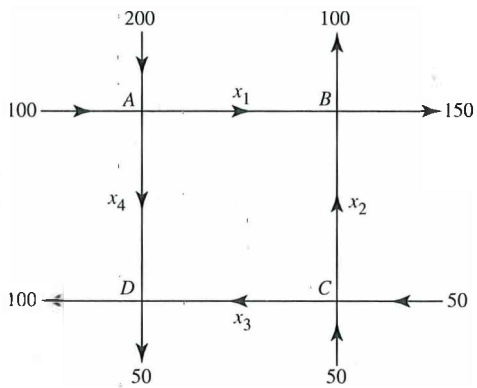


Figura 2 Flujo de tráfico del problema 1

2. La figura 3 representa el tráfico que ingresa y sale de una glorieta. Tales intersecciones son muy comunes en Europa. Construya un modelo matemático que describa el flujo del tráfico sobre las diversas bifurcaciones. ¿Cuál es el flujo mínimo posible teórico sobre la rama BC? ¿Cuáles son los otros flujos en dicho momento? (Las unidades de flujo están dadas en vehículos por hora.)

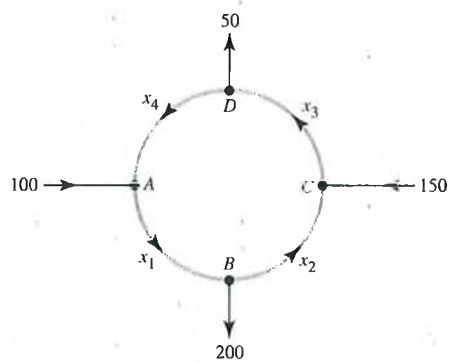


Figura 3 Flujo de tráfico del problema 2

3. La figura 4 representa el tráfico que ingresa y sale de otro tipo de glorieta usada en Europa continental. Tales glorietas aseguran el flujo continuo de tráfico en las intersecciones de calles. Construya ecuaciones lineales que describan el flujo del tráfico sobre las distintas bifurcaciones. Utilice estas ecuaciones para determinar el flujo mínimo posible sobre x_1. ¿Cuáles son los demás flujos en este momento? (No es necesario calcular la forma reducida escalonada por renglones. Utilice el hecho de que el flujo de tráfico no puede ser negativo.)

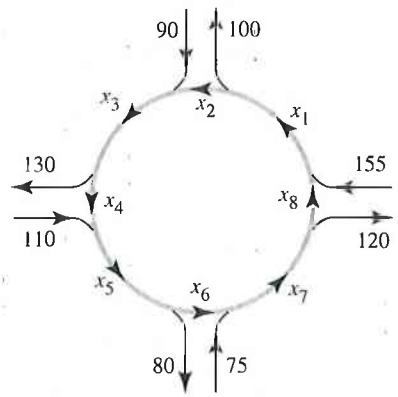


Figura 4 Flujo de tráfico del problema 3

4. La figura 5 describe un flujo de tráfico, con las unidades en vehículos por hora (vph).

   a) Construya un sistema de ecuaciones lineales que describa este flujo.

   b) El tiempo total que toma a los vehículos recorrer cualquier segmento de calle es proporcional al tráfico sobre dicho segmento. Por ejemplo, el tiempo total que toma a x_1 vehículos recorrer AB serán kx_1 minutos. Suponiendo que la constante es la misma para todas las secciones de calles, el tiempo total para que 200 vehículos recorran esta red será $kx_1 + 2kx_2 + kx_3 + 2kx_4 + kx_5$. ¿Cuál será el tiempo total si $k = 4$? Proporcione un tiempo promedio para cada automóvil.

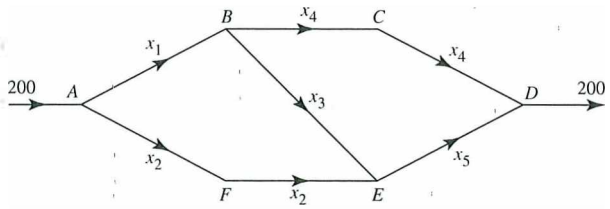


Figura 5 Flujo de tráfico para el problema 4

Dependencia de la resistividad en la temperatura

Anton M. Jopko, Ph.D.
Departamento de Física y Astronomía, McMaster University

Un conductor de longitud L y área transversal uniforme A tiene una resistencia R dada por $R = \rho L/A$, pues el conductor está hecho de un material con resistividad ρ. Sin embargo, la resistividad no es constante para todas las temperaturas del conductor. Cuando la corriente fluye a través del conductor, se genera calor, lo que eleva su temperatura. A este proceso se le conoce como calentamiento de Joule. En general, mientras más alta sea la temperatura, más alta será la resistividad y en última instancia la resistencia. Esto significa que debe conocerse la resistividad a la temperatura de trabajo del conductor. Modelamos la resistividad a la temperatura T_c del conductor por medio de la función cuadrática dada por

$$\rho(T_c) = \rho_0 + \alpha(T_c - T_0) + \beta(T_c - T_0)^2$$

donde T_c representa la temperatura del conductor en grados Celsius, T_0 es la temperatura ambiente y ρ_0 es la resistividad a temperatura ambiente. Los coeficientes ρ_0, α y β se determinan por medio de la experimentación.

Imagen © Ablestock

El tungsteno es un conductor con un punto de fusión muy elevado, que se utiliza para fabricar los filamentos de las lámparas incandescentes. Suponga que la información en la tabla está medida para la resistividad del tungsteno. En los problemas siguientes, presentamos un **procedimiento de mínimos cuadrados** para encontrar los valores de ρ_0, α y β. Asumiremos que $T_0 = 20°C$.

T_c (°C)	Resistividad (Ω-m) × 10^{-8}
20	5.60
40	5.65
80	5.70
200	7.82
500	11.1
700	20.2
1 000	30.5

Problemas relacionados

Deseamos ajustar puntos de información (x_i, y_i) utilizando la ecuación cuadrática general $y = ax^2 + bx + c$ en el sentido de mínimos cuadrados. Con tan sólo tres puntos de información no sería necesario el procedimiento de mínimos cuadrados. En nuestro caso, contamos con siete puntos de información.

1. Construya el vector columna $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_7 \end{pmatrix}$ y la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_7^2 & x_7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Haga que el vector columna $\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \end{pmatrix}$ contenga los coeficientes mínimos cuadrados. Calcule el vector

$$\mathbf{X}^* = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}.$$

3. Utilizando la ecuación cuadrática de mínimos cuadrados, prediga la resistividad del tungsteno a 300°C.
4. Si un conductor de tungsteno a temperatura ambiente tiene una resistencia de 5 ohms, utilice el resultado del problema 3 para predecir su resistencia a una temperatura de 300°C.
5. Encuentre el error RMS (raíz cuadrada de la media de los cuadrados) de la ecuación cuadrática de mínimos cuadrados,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_i^*)^2},$$

donde $\mathbf{Y}^* = \mathbf{AX}^*$ es el valor de mínimos cuadrados de $\mathbf{Y}$.
6. Explique, en términos generales, lo que significa el error RMS o de raíz cuadrada de la media de los cuadrados.
7. Realice la predicción de la resistividad del conductor de tungsteno a 2 000°C. ¿Qué tan confiable es este valor?

Superficies mínimas

Jeff Dodd, Ph.D.
Departamento de Matemáticas, Computación y Ciencias de la Información, Jacksonville State University

Al sumergir un marco de alambre en una solución jabonosa y retirarlo cuidadosamente, se forma una película tensionada de jabón sostenida por el alambre. Si el marco de alambre es plano, como los anillos circulares que se utilizan frecuentemente para hacer burbujas, entonces la película de jabón será plana. Sin embargo, si el marco se dobla de una forma más interesante, se generará a su vez una superficie más interesante.

Un personaje legendario en el estudio de estas formas fue el físico belga Joseph Plateau (1801-1883). A pesar de ser ciego (como resultado de mirar fijamente al Sol por 25 segundos, cuando experimentaba sobre la fisiología de la visión), condujo una extensa serie de experimentos con películas de jabón, utilizando una solución especial de glicerina y jabón inventada por él mismo con la que sus películas de jabón podían durar horas. Plateau también trabajó exhaustivamente con burbujas de jabón. (Gracias a laboriosas y cuidadosas observaciones, fue capaz de conjeturar algunos principios bellamente simples que gobiernan la geometría de los racimos de burbujas de jabón, conocidos como "reglas de Plateau".)

Plateau se dio cuenta de que una película de jabón queda constituida de forma que se minimiza la energía debido a la tensión superficial o, lo que es equivalente, se minimiza el área superficial rodeada por el alambre. Él retó a los matemáticos para que propusieran una descripción general de dichas superficies minimizadoras de área, o **superficies mínimas**. En consecuencia, el problema de determinar la superficie de la menor área restringida por cierta frontera se conoce como "problema de Plateau".

En los tiempos de Plateau, el estudio matemático de superficies mínimas había comenzado casi un siglo antes con el trabajo de Leonhard Euler y Joseph Louis Lagrange. Las matemáticas necesarias para resolver muchas de las conjeturas y problemas de Plateau no se desarrollaron sino hasta el siglo XX. De hecho, el estudio de superficies mínimas sigue siendo actualmente un área de investigación activa, y los matemáticos se esfuerzan todavía por mantenerse al corriente con sus aplicaciones existentes y con las que tiene en potencia.

En muchas de las ciencias físicas y biológicas abundan aplicaciones. En los últimos años se ha puesto mucha atención en las aplicaciones a la nanotecnología en la ingeniería molecular y en la ciencia de materiales. Algunas superficies mínimas muy exóticas, recientemente descubiertas matemáticamente, han sido observadas en "copolímeros de bloque", esto es, moléculas compuestas por dos tiras de diferentes polímeros que se repelen entre sí. Las moléculas se acomodan de tal manera que las fronteras entre las partes disímiles forman superficies mínimas. Este caso es una aplicación típica, ya que la interfaz entre dos sustancias que se repelen entre sí tiende a ser una superficie mínima, al menos aproximadamente.

Existen aplicaciones más abstrusas como la descripción relativista general de los agujeros negros. También hay aplicaciones en los procesos de diseño. Por ejemplo, los ingenieros a veces utilizan superficies mínimas para diseñar estructuras en las que los esfuerzos se distribuyan lo más uniformemente posible a fin de maximizar su durabilidad. Finalmente, las superficies mínimas son estéticamente agradables y se emplean comúnmente en arquitectura y arte, incluyendo las esculturas del reconocido matemático-artista Helaman Ferguson.*

Considérese a continuación una versión simple del **problema de Plateau**:

Sea R una región cerrada y acotada en el plano xy por una curva suave cerrada simple segmentada C. Sea $z = g(x, y)$ una función dada definida sobre C. (La gráfica de g es nuestro "marco de alambre".) De todas las funciones $z = u(x, y)$ que tienen segundas derivadas parciales continuas sobre R, tales que $u(x, y) = g(x, y)$ sobre C, caracterice aquella cuya gráfica sobre R tiene el área superficial más pequeña posible.

Para resolver este problema, se comienza con (2) de la definición 3.11 del texto. El área superficial A de la gráfica de u sobre R está dada por

$$A(u) = \iint_R \sqrt{1 + [u_x(x, y)]^2 + [u_y(x, y)]^2}\, dA$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + \|\nabla u(x, y)\|^2}\, dA.$$

Ahora tome cualquier función $w(x, y)$ tal que $w = 0$ sobre C y considere la siguiente función real: $F(t) = A(u + tw)$ para valores pequeños de t. Si u es la función que minimiza a A sobre todas las funciones que tienen los valores determinados por g sobre C, entonces $t = 0$ es un valor crítico para F; esto es, $F'(0) = 0$. Observe que

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\iint_R \sqrt{1 + \|\nabla u + t\nabla w\|^2}\, dA$$

$$= \iint_R \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{1 + \|\nabla u + t\nabla w\|^2}\, dA$$

*Para otras superficies, véase www.helasculpt.com/gallery

Problemas relacionados

1. Utilice la definición de norma en términos del producto escalar para mostrar que

$$F'(0) = \iint_R \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \cdot \nabla w \, dA.$$

2. Suponga que h es una función y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, definidos sobre R de manera que las primeras derivadas parciales de h y las dos funciones componentes de $\mathbf{F}$ son continuas sobre R. Utilice la siguiente identidad vectorial

$$\text{div } (h\mathbf{F}) = h \text{ div } \mathbf{F} + (\text{grad } h) \cdot \mathbf{F}$$

(Problema 27, ejercicios 3.7) y la formulación alternativa del teorema de Green dada en (1) de la sección 3.16 para mostrar que

$$\oint_C (h\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \, ds = \iint_R (h \text{ div } \mathbf{F} + (\text{grad } h) \cdot \mathbf{F}) \, dA.$$

3. Aplique esta última identidad al resultado del problema 1 para mostrar que

$$\iint_R w \text{ div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) dA = 0.$$

Como esto último es cierto para cualquier función $w(x, y)$ tal que $w = 0$ sobre C, entonces debe cumplirse que

$$\text{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \right) = 0.$$

4. Muestre que la última ecuación del problema 3 puede expresarse como la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal

$$(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0.$$

Esta ecuación, conocida como **ecuación de superficie mínima**, la escribió Lagrange por primera vez en 1760.

5. Muestre que si u es una función sólo de x o sólo de y, entonces la gráfica de u es un plano.

6. Utilice la regla de la cadena y las coordenadas polares para mostrar que si $u = f(r)$, entonces

$$rf''(r) + f'(r)(1 + [f'(r)]^2) = 0$$

7. La EDO de segundo orden del problema 6 es una EDO separable de primer orden en $f'(r)$. Utilice el método de separación de variables (que se expone en la sección 2.2 del tomo I) para mostrar que si $u = f(r)$, entonces

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r^2/c^2 - 1}}.$$

Utilice la sustitución $r = c \cosh u$ para mostrar que $r = c \cosh\left(\frac{u - d}{c}\right)$, donde c y d son constantes.

Observe que ésta es la superficie obtenida al revolucionar una catenaria (véase sección 3.10 del tomo I) alrededor del eje z. Esta superficie de revolución se conoce como **catenoide**. La catenoide fue la primera superficie mínima no plana descrita (por Euler alrededor de 1740). Una película de jabón formada entre dos anillos coaxiales toma esta forma, ¡y no la forma de un cono o de un cilindro! Véase la figura 1.

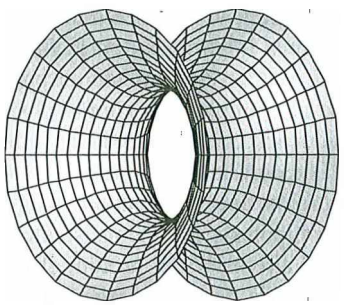


Figura 1 Catenoide

8. Utilice la regla de la cadena y las coordenadas polares para mostrar que si $u = f(\theta)$, entonces $u = c\theta + d$, donde c y d son constantes. Esta superficie —la espiral generada por una línea horizontal que rota alrededor del eje z con velocidad angular constante, mientras se eleva a lo largo del eje z con velocidad constante— se conoce como **helicoide**, y fue la segunda superficie mínima no plana descrita (Jean Baptiste Meusnier la describió en 1776). De la figura 2 se puede reconocer el helicoide como modelo para las cuchillas curvas rotatorias de maquinarias como las barrenas para postes, excavadoras de hielo y sopladoras de nieve.

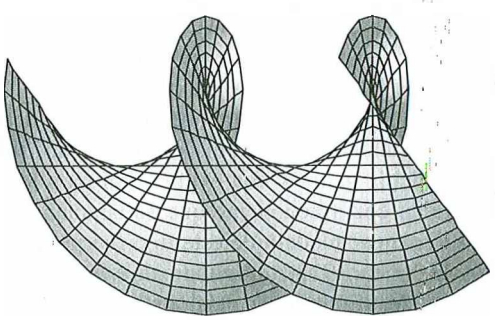


Figura 2 Helicoide

Epílogo

La mayoría de las superficies mínimas son geométricamente más complicadas que la catenoide y el helicoide, y sólo pueden representarse convenientemente en forma paramétrica, más que como gráficas de funciones. El estudio de las parametrizaciones de superficies mínimas tiene conexiones profundas con las funciones armónicas y el análisis complejo, tema de la parte 3 de este texto.

El átomo de hidrógeno

Matheus Grasselli, Ph.D.
Departamento de Matemáticas y Estadística, McMaster University

El átomo de hidrógeno representó uno de los problemas sin resolver más importantes en la física a principios del siglo veinte. Con únicamente un protón y un electrón, ofrece el ejemplo más simple posible que debía ser explicado por cualquier modelo atómico. La descripción clásica era la de un electrón en órbita alrededor de un protón debido a una atracción eléctrica. Sin embargo, la hipótesis era inconsistente, debido a que para moverse alrededor del protón, el electrón necesita acelerarse. Toda partícula cargada y acelerada emite ondas electromagnéticas. Entonces, con el tiempo, el electrón debía perder energía cinética y eventualmente colapsarse hacia el núcleo del átomo. Para complicar aún más las cosas, a partir de información espectroscópica se sabía que el gas de hidrógeno emite luz con longitudes de onda muy específicas, las llamadas líneas espectrales. Además, estas líneas espectrales que podían observarse en el rango visible satisfacían una fórmula empírica enunciada por primera vez por J. J. Balmer en 1885. Si la longitud de onda es indicada por λ, entonces las líneas espectrales de lo que actualmente se denomina la serie de Balmer estarán definidas por

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2}\right),\ k = 3, 4, 5, \ \ldots \qquad (1)$$

donde R_H es una constante para la cual el mejor valor empírico es $10\,967\,757.6 \pm 1.2\ \mathrm{m}^{-1}$.

Todo modelo atómico razonable no sólo debía explicar la estabilidad del átomo de hidrógeno, sino que también debía generar una explicación para las líneas espectrales con frecuencias que satisfacían esta fórmula. El primer modelo de este tipo fue propuesto por Niels Bohr en 1913, utilizando una ingeniosa combinación de argumentos clásicos y dos "postulados cuánticos". Bohr asumió que el electrón se encuentra restringido a un movimiento en órbitas con un momento angular "cuantizado", es decir, en múltiplos enteros de una constante dada. Observe la figura 1. Además, los átomos emiten energía en forma de ondas electromagnéticas únicamente cuando el electrón salta de una órbita fija a otra. Las frecuencias de estas ondas están dadas por la fórmula de Planck $\Delta E = \hbar\nu$, donde ΔE es la diferencia de energía entre las órbitas y $\hbar$ es la constante de Planck.

Intente reproducir los pasos de Bohr mediante la resolución de los problemas 1-3.

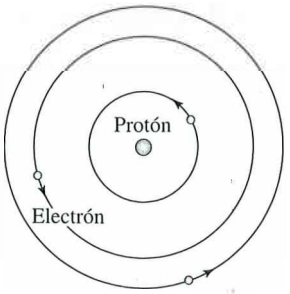


Figura 1 Modelo planetario de Bohr del átomo de hidrógeno: en este modelo, un electrón puede ocupar únicamente ciertas órbitas alrededor de un núcleo que consiste de un protón

Problemas relacionados

1. Suponga, como se muestra en la figura 1, que el electrón cuenta con una masa m y una carga $-e$, y que se desplaza en una órbita circular de radio r alrededor del protón, el cual tiene una carga e y una masa mucho mayor. Utilice las fórmulas clásicas de la fuerza eléctrica para cargas puntuales con el objetivo de deducir que la energía mecánica total (cinética más potencial) para el electrón en esta órbita es

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (2)$$

donde ε_0 es la permisividad del espacio. Adicionalmente, deduzca que el momento angular clásico para esta órbita es

$$L = \sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\varepsilon_0}}. \qquad (3)$$

2. Ahora utilicemos el primer postulado de Bohr: asuma que el momento angular es de la forma $L = n\hbar$, donde $n = 1, 2, \ldots$. Sustituya esta expresión en la ecuación (3) y encuentre una expresión para el radio orbital r como una función de n. Inserte esta función en la ecuación (2) y obtenga una expresión para los niveles de energía cuántica del átomo de hidrógeno.
3. Ahora estamos listos para utilizar el segundo postulado de Bohr. Suponga que un electrón realiza una transición desde el nivel de energía E_k al nivel de energía E_n, para enteros $k > n$. Utilice la fórmula $\Delta E = \hbar\nu$ y la relación $\lambda\nu = c$ (donde c representa la velocidad de la luz) para deducir que la longitud de onda emitida por esta transición es

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\hbar^3\varepsilon_0^2 c}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right). \qquad (4)$$

Asignemos $n = 2$ en la ecuación (4) y concluimos que esto genera la serie de Balmer con $R_H = \dfrac{me^4}{h^3\varepsilon_0^2 c}$.

Ahora, realice una investigación para los valores de las constantes que aparecen en esta fórmula y calcule R_H. ¿Su valor es comparable con el valor empírico? Por último, reemplace m por la masa reducida $\dfrac{mM}{m + M}$ (donde M es la masa del protón) y sorpréndase con la notable precisión de este resultado.

A pesar de su éxito evidente, el modelo de Bohr tenía como detalle el que llevaba la teoría clásica lo más lejos posible y luego la complementaba con postulados cuánticos específicos cuando era necesario. Esta situación fue acertadamente considerada como insatisfactoria e inspiró a los físicos a desarrollar una teoría mucho más completa del fenómeno atómico, lo que dio paso al nacimiento de la mecánica cuántica. En el núcleo de ella hay una ecuación diferencial parcial propuesta por Erwin Schrödinger en 1926 en un documento con un título sugerente "La cuantización como un problema de valores propios". La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para un sistema físico de masa m sujeto a un potencial $V(\mathbf{x})$ es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\Psi(\mathbf{x}) = E\Psi(\mathbf{x}), \qquad (5)$$

donde ∇^2 representa al operador laplaciano y E es el valor (escalar) para la energía total del sistema en el estado estacionario $\Psi(\mathbf{x})$. Aquí $\mathbf{x} = (x, y, z)$ representa un punto en el espacio de posición de tres dimensiones. La interpretación correcta de la función $\Psi(\mathbf{x})$ implica argumentos probabilísticos refinados. Para nuestro problema es suficiente decir que $\Psi(\mathbf{x})$ contiene toda la información que se puede obtener físicamente acerca del sistema en consideración. Nuestro propósito ahora, siguiendo el espíritu del documento original de Schrödinger, será obtener los niveles de energía E_n para el átomo de hidrógeno como los valores posibles de energía para los cuales la ecuación (5) admite una solución.

Ahora intente resolver el siguiente problema.

4. Debido a que la energía potencial $V(r) = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ depende únicamente del radio r, para este problema es natural considerar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) definidas por las ecuaciones

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \quad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Comience por escribir la ecuación (5) en estas coordenadas [recuerde la expresión para el operador de Laplace en coordenadas esféricas en (2) de la sección 6.3]. Ahora utilizamos la separación de variables con $\Psi(\mathbf{x}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ para mostrar que el componente radial $R(r)$ satisface a

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + E\right)R = -k\frac{2m}{\hbar^2 r^2} \qquad (6)$$

donde k es una constante.

En la solución del problema 4 debería haber encontrado que la técnica de separación de variables divide la ecuación de Schrödinger en dos partes: una que depende únicamente de r y la otra que depende solamente de θ y ϕ. Cada una de estas partes debe ser equivalente a una constante, que denominamos k. Si buscáramos la solución de la parte angular (la que involucra a θ y ϕ), encontraríamos que k es un número cuántico relacionado con el momento angular del átomo. Para el resto de este proyecto, consideraremos el caso $k = 0$, que corresponde con los estados con momento angular cero.

En este punto proceda con los problemas 5-7.

5. Establezca $k = 0$ en la ecuación (6) y considere su límite cuando $r \to \infty$. Demuestre que e^{-Cr}, donde

$$C = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad (7)$$

es una solución de esta ecuación limitante.

6. Con base en el ejercicio anterior, considere una solución general de la forma $R(r) = f(r)e^{-Cr}$ para una función analítica $f(r)$. Mediante procedimientos analíticos, la función $f(r)$ posee una expansión de series

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \cdots$$

Sustituya esta serie en la ecuación (6) (con $k = 0$) y deduzca que los coeficientes a_i satisfacen la relación recursiva

$$a_j = 2\frac{jC - B}{j(j+1)}a_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

donde $B = \dfrac{me^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}$

7. Demuestre que el límite de la ecuación (8) para valores grandes de j es $a_j = \dfrac{2C}{j+1}a_{j-1}$, que es la serie de potencia para la función e^{2Cr}. Concluya que la única forma de hacer que la función $R(r)$ disminuya a cero a medida que r se vuelve más grande es que la serie de potencias para $f(r)$ termine después de un número finito de términos. Por último, observe que esto sucede si y sólo si $nC = B$ para algún entero n.

Nuestro problema final en este proyecto será generar los niveles de energía del átomo de hidrógeno como una consecuencia del trabajo realizado hasta aquí. Deberá observar que la existencia de niveles de energía cuantizados no necesitan ser postulados, sino más bien deducidos a partir del análisis matemático de la ecuación de Schrödinger. Mientras que los pasos

de deducción son más complicados que los seguidos por Bohr, debe ser evidente que la eliminación de los axiomas de cuantización específicos de Bohr fue un logro importante alcanzado por Schrödinger, razón por la cual recibió el Premio Nobel de física en 1933.

8. Utilice la condición expresada en el ejercicio previo y las fórmulas obtenidas para C y B para concluir que las energías permitidas para el átomo de hidrógeno en un estado con momento angular cero son

$$E_n = -\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 2\hbar^2 n^2} \tag{9}$$

que deben coincidir con los niveles de energía que encontró para el átomo de Bohr del problema 2.

La desigualdad de incertidumbre en el procesamiento de señales

Jeff Dodd, Ph.D.
Departamento de Matemáticas, Computación y Ciencias de la Información, Jacksonville State University

Los ingenieros en comunicaciones interpretan a la transformada de Fourier como la descomposición de una señal $f(x)$ que lleva información, donde x representa al tiempo, en una superposición de "tonos" sinusoidales puros que tienen frecuencias representadas por una variable real. De hecho, los ingenieros usualmente consideran la representación en el "dominio de la frecuencia" resultante, tanto o más que la representación en el "dominio del tiempo" (esto es, ¡la señal misma!). Un aspecto fundamental del procesamiento de señales es que cuanto más estrecha es una señal en el dominio del tiempo, más amplia es en el dominio de la frecuencia. También, cuanto más estrecha es una señal en el dominio de la frecuencia, más amplia es en el dominio del tiempo. Este efecto es importante porque, en la práctica, una señal debe enviarse en un tiempo limitado y utilizando un intervalo limitado o "banda" de frecuencias. En este proyecto se describe e investiga este equilibrio entre duración y ancho de banda, tanto cualitativa como cuantitativamente. Los resultados de esta investigación respaldan una regla práctica comúnmente citada: una cierta banda de frecuencias es proporcional al producto de la duración en tiempo por el ancho de la banda de frecuencias.

Problemas relacionados

Se emplean la forma compleja de la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier, dadas en (5) y (6) de la sección 7.4. Se utiliza la notación $\hat{f}(\alpha)$ para denotar la transformada de Fourier de una función $f(x)$ en una forma compacta que explicita su dependencia de f, esto es, $\hat{f}(\alpha) = F\{f(x)\}$. Se considera que f es una función real, y se comienza revisando dos propiedades simples de $\hat{f}$.

1. Mostrar que si $\alpha > 0$, entonces $\hat{f}(-\alpha) = \overline{\hat{f}(\alpha)}$. Así, para cualquier α, $|\hat{f}(-\alpha)| = |\hat{f}(\alpha)|$. (Aquí, las notaciones $\bar{z}$ y $|z|$ representan el conjugado y el módulo de un número complejo z, respectivamente.)
2. Si k es un número real, supóngase que $f_k(x) = f(x - k)$. Mostrar que

$$\hat{f}_k(\alpha) = e^{i\alpha k}\,\hat{f}(\alpha)$$

De manera que recorrer una señal en el tiempo no afecta a los valores de $|\hat{f}(\alpha)|$ en el dominio de las frecuencias.

Tomando en cuenta estos hechos, ahora se procede a considerar el efecto de estrechar o ampliar una señal en el dominio del tiempo simplemente escalando la variable temporal.

3. Si c es un número positivo, considérese que $f_c(x) = f(cx)$. Muestre que

$$\hat{f}_c(\alpha) = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\alpha}{c}\right).$$

De forma que al estrechar la función señal f en el dominio del tiempo ($c > 1$), se ensancha su transformada en el dominio de la frecuencia, y al ampliar la función señal f en el dominio del tiempo ($c < 1$), se estrecha su transformada en el dominio de la frecuencia.

Para cuantificar el efecto que se observa en el problema 3, se necesita establecer una medida del "ancho" de la gráfica de una función. La medida más comúnmente utilizada es el ancho de la raíz cuadrada de la media de los cuadrados, que cuando se aplica a una señal f en los dominios del tiempo y de la frecuencia, conduce a un valor cuadrático medio (o raíz cuadrada de la media de los cuadrados) de duración $D(f)$ y un valor cuadrático medio de ancho de banda $B(f)$, dados por

$$[D(f)]^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2[f(x)]^2\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\,dx}$$

y

$$[B(f)]^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2\,|\hat{f}(\alpha)|^2\,d\alpha}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2\,d\alpha}.$$

De manera que el ancho de banda y la duración se calculan en relación a los "centros" de $\alpha = 0$ y $x = 0$ debido a que, según los problemas 1 y 2, la gráfica de $|\hat{f}(\alpha)|^2$ es simétrica con respecto a $\alpha = 0$ en el dominio de la frecuencia, y la señal puede recorrerse horizontalmente en el dominio del tiempo sin afectar la gráfica de $|\hat{f}(\alpha)|^2$ en el dominio de las frecuencias.

4. Muestre que para una familia de funciones $f_c(x)$ definida en el problema 3, $D(f_c) \cdot B(f_c)$ es independiente de c.
5. Muestre que para la familia de funciones $f_c(x) = e^{-c|x|}$, $D(f_c) \cdot B(f_c) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. [*Sugerencia*: Según el problema 4, $f(x) = f_1(x)$. La integral de Fourier necesaria puede obtenerse rápidamente del ejemplo 3 de la sección 7.3. Para calcular las integrales para $D(f)$ y $B(f)$, considere la integración por partes y por fracciones parciales, respectivamente.]

La duración y el ancho de banda de una señal son en cierta forma inversamente proporcionales entre sí cuando se escala la variable de tiempo. ¿Qué se puede

decir al respecto de la constante de proporcionalidad? ¿Qué tan pequeño puede ser $D(f) \cdot B(f)$? Es de destacar que existe un límite inferior para este producto.

6. Deducir la **desigualdad de la incertidumbre**: si

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2\, d\alpha < \infty,$$

y

$$\lim_{x \to \pm\infty} |x|[f(x)]^2 = 0,$$

entonces $D(f) \cdot B(f) \geq \frac{1}{2}$. Seguir estos pasos.

a) Establezca la fórmula de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2\, d\alpha.$$

[*Sugerencia*: Aplique el teorema de convolución dado en el problema 20, ejercicios 7.4 con $g(x) = f(-x)$.]

Específicamente, aplique la fórmula para la transformada inversa de Fourier dada en (6) de la sección 7.4, y muestre que $\hat{g}(\alpha) = \overline{\hat{f}(\alpha)}$, y entonces fije $x = 0$.]

b) Establezca la desigualdad de Schwartz: para funciones reales h_1 y h_2,

$$\left| \int_a^b h_1(s) h_2(s)\, ds \right|^2 \leq \left(\int_a^b [h_1(s)]^2\, ds \right) \left(\int_a^b [h_2(s)]^2\, ds \right)$$

donde la igualdad existe únicamente cuando $h_2 = ch_1$, donde c es una constante [*Sugerencia*: Escribir

$$\int_a^b [\lambda h_1(s) - h_2(s)]^2\, ds$$

como una expresión cuadrática $A\lambda^2 + B\lambda + C$ de la variable real λ. Observe que la cuadrática es no negativa para toda λ y considere el discriminante $B^2 - 4AC$.]

c) Establezca la desigualdad de la incertidumbre. [*Sugerencia*: En primer lugar, aplique la desigualdad de Schwartz como sigue:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)f'(x)\, dx \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} [xf(x)]^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} [f'(x)]^2\, dx \right).$$

Utilice la integración por partes para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)f'(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^2 dx$. Reescriba la segunda integral que aparece en el lado derecho de la desigualdad, utilizando la propiedad operacional (11) de la sección 7.4 y la fórmula de Parseval.]

7. *a*) Mostrar que si f proporciona el valor mínimo posible de $D(f) \cdot B(f)$, entonces

$$f'(x) = cxf(x)$$

donde c es una constante. Resuelva esta ecuación diferencial para mostrar que $f(x) = de^{cx^2/2}$ para $c < 0$ y d = a constante. (Dicha función se denomina función gaussiana. Las funciones gaussianas juegan un papel importante en la teoría de probabilidad.)

b) Utilice la transformada de Fourier que está a ambos lados de la ecuación diferencial de la parte *a*) para obtener una ecuación diferencial para $\hat{f}(\alpha)$ y mostrar que $\hat{f}(\alpha) = \hat{f}(0)e^{\alpha^2/(2c)}$, donde c es la misma que en la parte *a*). Se necesita conocer la siguiente información:

$$\frac{d}{d\alpha}\hat{f}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)e^{i\alpha x}\, dx = \widehat{ixf(x)}.$$

(Del problema 35 de los ejercicios 3.11, se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. De esta expresión puede deducir que $\hat{f}(0) = \sqrt{2\pi/|c|} \cdot d$.)

Así es que el valor mínimo posible de $D(f) \cdot B(f)$ se alcanza para una función gaussiana, cuya transformada de Fourier ¡es otra función gaussiana!

La palabra "incertidumbre" se asocia con la desigualdad presentada en el problema 6 dado que, desde un punto de vista más abstracto, es matemáticamente análogo al famoso principio de incertidumbre de Heisenberg de la mecánica cuántica. (La interpretación de este principio de mecánica cuántica es un tema sutil, pero comúnmente se entiende como "mientras mayor sea la precisión con la que se determine la posición de una partícula, su momentum se conoce con menor precisión, y viceversa".)

Difracción de Fraunhofer a través de una abertura circular

Anton M. Jopko, Ph.D.
Departamento de Física y Astronomía, McMaster University

Las estrellas del firmamento se encuentran a una distancia enorme de nosotros, de forma que pueden considerarse como fuentes puntuales de luz. Si se observa una de estas estrellas a través de un telescopio, se esperaría ver únicamente otro punto de luz, aunque uno mucho más brillante. Sin embargo, éste no es el caso. Dado que es una onda, la luz se refracta al pasar a través de la abertura circular del telescopio, de forma que la luz se extiende sobre una pequeña región difusa que se denomina patrón de difracción. Este proyecto investiga la forma del patrón de difracción para la luz que pasa a través de una abertura circular de radio R.

Por simplicidad, se considera que la luz tiene una longitud de onda única λ, o color. Esta luz tiene la forma de un frente de ondas esférico cerca de la estrella, pero cuando nos alcanza, llega como un frente de ondas plano. Todos los puntos del frente de ondas tienen la misma fase. A continuación, se apunta el telescopio con su abertura circular directamente hacia la estrella, de manera que los frentes de ondas planas inciden desde la izquierda, como se muestra en la figura 1.

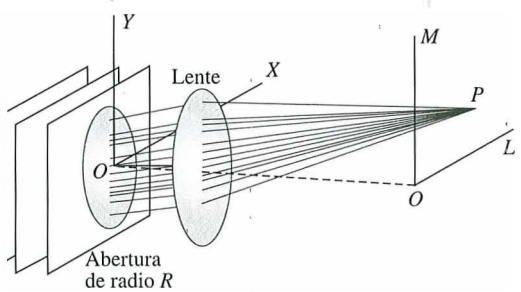


Figura 1 Difracción de la luz

A partir del principio de Huygen, cada punto de la abertura circular emite una onda en todas las direcciones. La difracción de Fraunhofer requiere que las ondas abandonen la abertura en un conjunto casi paralelo que viaja hacia un punto muy distante P. El único propósito del lente es formar una imagen puntual de este conjunto paralelo a una distancia mucho más cercana a la abertura. La difracción ocurriría incluso sin el lente. La línea discontinua que une los dos orígenes es también el eje de abertura y del lente. El sistema de

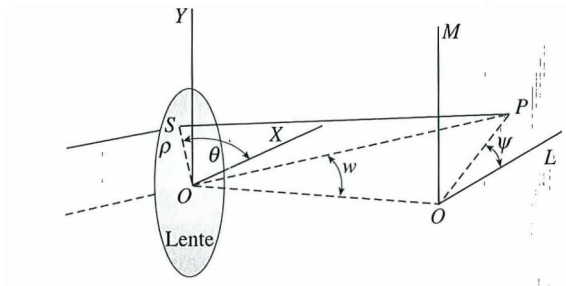


Figura 2

coordenadas LM está en el plano focal del lente, y su origen está donde toda la luz de la estrella aparecería en ausencia de difracción. Debido a la difracción, sin embargo, algo de luz también aparece en P. El punto P es un punto general, pero muy cercano a O, únicamente a arco-segundos de distancia.

En la figura 2, se han unido la abertura y el lente, dado que en la práctica el borde del lente también define la abertura. Debido a la simetría circular del lente y al patrón de difracción, es muy deseable utilizar coordenadas polares. Suponga que una onda es emitida en un punto S del lente con coordenadas (X, Y) o (ρ, θ) y que llega a P con coordenadas (L, M) o coordenadas angulares (w, ψ). Entonces $X = \rho \cos\theta$, $Y = \rho \operatorname{sen}\theta$, y $L = w \cos\psi$ y $M = w \operatorname{sen}\psi$. Aquí, ρ es la distancia radial del centro del lente a la fuente S de la onda emitida y θ es su ángulo polar; w es el **radio angular** de P y ψ es su ángulo polar.

Las ondas emitidas en la abertura están en fase y tienen la misma amplitud, pero todas ellas viajan distancias diferentes hacia el punto P, de forma que llegan ahí desfasadas. La intensidad de la luz en P es proporcional al cuadrado de la amplitud resultante de todas las ondas que llegan. Ahora se necesita calcular esta amplitud resultante tomando en cuenta las diferencias de fase de las ondas.

Se define el número de onda de las ondas incidentes y emitidas como $k = 2\pi/\lambda$. Entonces, de acuerdo a *Principles of Optics*, séptima edición, de Born y Wolf, la amplitud resultante en P de todas las ondas emitidas en la abertura es sólo la transformada de Fourier de la abertura:

$$U(P) = C \iint_{abertura} e^{-ik(LX+MY)}\, dXdY$$

donde C es una constante, proporcional en parte a la brillantez de la estrella. La intensidad de P viene entonces dada por $|U(P)|^2$. Ëste es el patrón de difracción para la estrella en función del radio angular w.

Problemas relacionados

1. Muestre que la amplitud resultante en P utilizando los dos sistemas de coordenadas polares puede escribirse como

$$U(P) = C \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho w \cos(\theta-\psi)} \rho d\theta d\rho$$

2. Utilizando la identidad

$$\frac{i^{-n}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\alpha}e^{in\alpha}\,d\alpha = J_n(x),$$

donde J_n es la función de Bessel de primer tipo, muestre que la amplitud resultante se reduce a

$$U(P) = 2\pi C\int_0^R J_0(k\rho w)\rho\,d\rho$$

para cualquier ψ. Se elige $\psi = 0$. (Esta expresión es también conocida como transformación de Hankel de una abertura circular.)

3. Utilizando la relación de recurrencia

$$\frac{d}{du}\left[u^{n+1}J_{n+1}(u)\right] = u^{n+1}J_n(u),$$

muestre que

$$\int_0^x uJ_0(u)\,du = xJ_1(x)$$

4. Muestre que $U(P) = C_sR^2\dfrac{2J_1(kRw)}{kRw}$. Por tanto, la intensidad viene dada por

$$|U(P)|^2 = \left[\frac{2J_1(kRw)}{kRw}\right]^2 I_0$$

5. ¿Qué es $\lim\limits_{w\to 0}\dfrac{2J_1(kRw)}{kRw}$?
6. ¿Cuál es el significado físico de I_0?
7. ¿Cuál es el valor de la raíz no nula más pequeña de J_1? Utilizando $\lambda = 550$ nm, $R = 10$ cm y la raíz más pequeña que se acaba de encontrar, calcular el radio angular w (en arco-segundos) del disco central de difracción.
8. Dibujar una gráfica de $\dfrac{2J_1(kRw)}{kRw}$ en función de kRw así como de la intensidad, que es su cuadrado. El patrón de difracción de la estrella consiste en un disco central brillante rodeado por varios anillos concéntricos delgados tenues. Este disco se denomina el disco de Airy en honor de G. B. Airy, quien fue el primero en calcular el patrón de difracción de una abertura circular en 1826.
9. ¿Qué sucede con el ancho angular del patrón de difracción si el radio R de la abertura se duplica?
10. ¿Qué sucede con el ancho angular del patrón de difracción si la longitud de onda λ de la luz se duplica?
11. ¿Qué sucede con el ancho angular del patrón de difracción si la longitud focal del lente se duplica?
12. Suponga que una abertura circular tiene forma de anillo con radio interno a y radio externo b. Encuentre $U(P)$. (Este resultado es de importancia práctica, dado que los telescopios de reflexión casi siempre tienen una obstrucción en la parte central de la abertura.)
13. Suponga que el anillo del problema 12 es muy estrecho, de forma que $b = a + \Delta a$, donde Δa es pequeño pero no infinitesimal. Muestre entonces que la amplitud resultante *aproximada* viene dada por $U(P) = C(2\pi a\Delta a)J_0(kwa)$. [*Sugerencia:* Interpretar el resultado $U(P)$ del problema 12 como aproximación para $\dfrac{d(uJ_1(u))}{du} = uJ_0(u)$ con $u = kwa$.]

Inestabilidades en métodos numéricos

Dmitry Pelinovsky, Ph.D.
Departamento de Matemáticas y Estadística, McMaster University

Los métodos de diferencias finitas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales pueden ser sorpresivamente inadecuados para aproximaciones numéricas. El problema principal con los métodos de diferencias finitas (especialmente aquellos con esquemas de iteración explícita) es que pueden amplificar el ruido de redondeo numérico debido a inestabilidades intrínsecas. Dichas inestabilidades aparecen muy frecuentemente en el trabajo de investigación. Un ingeniero debería estar preparado para esta situación. Después de emplear muchas horas en el desarrollo de un nuevo método numérico para el modelado de un problema y en la escritura cuidadosa del método en un lenguaje de computadora, el programa de computadora puede llegar a volverse inútil debido a sus inestabilidades dinámicas.

La figura 1 ilustra una solución numérica de la ecuación de calor con un método explícito de diferencias finitas, donde el paso k del tiempo excede la mitad del tamaño del paso cuadrado h (ver ejemplo 1 de la sección 8.2). Es de esperarse que una solución de la ecuación de calor para una barra de longitud finita con temperaturas de cero en los puntos extremos debería exhibir un decaimiento suave de una distribución inicial de calor hacia el nivel constante de temperaturas cero. Sin embargo, la superficie de la figura 1 muestra que el decaimiento suave esperado se rompe por el ruido que crece rápidamente debido a inestabilidades dinámicas del método explícito.

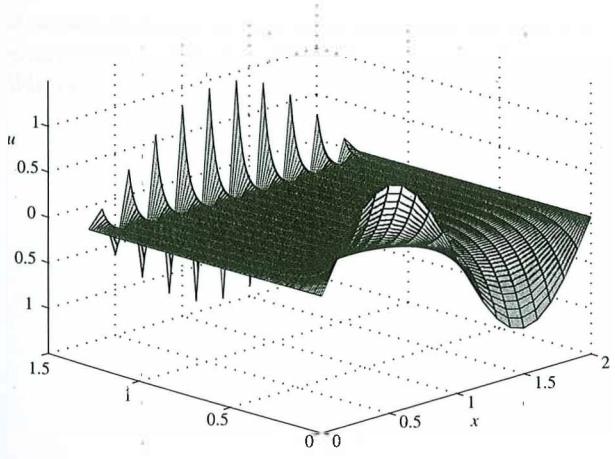


Figura 1 Superficie de la solución numérica

Las inestabilidades de los métodos numéricos de diferencias finitas pueden entenderse mediante la aplicación elemental de la transformada discreta de Fourier, que se estudia en la sección 7.5. El principio de superposición lineal y la transformada discreta de Fourier permiten separar variables en un método numérico de diferencias finitas, y estudiar la evolución individual en el tiempo (iteraciones) de cada modo de Fourier de la solución numérica.

Por simplicidad, se considera el método explícito de diferencias finitas para la ecuación del calor $u_t = u_{xx}$ en el intervalo $0 \le x \le a$ sujeto a condiciones de frontera nulas en los puntos extremos $x = 0$ y $x = a$ y una condición inicial no nula en el instante $t = 0$. La discretización numérica conduce al esquema de iteración explícito:

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j} \quad (1)$$

Donde $u_{i,j}$ es una aproximación numérica de la solución $u(x, t)$ en el punto de la retícula $x = x_i$ y en el instante $t = t_j$, mientras que $\lambda = k/h^2$ es el parámetro de discretización. Si se observa el instante de tiempo $t = t_j$, $j \ge 0$ y se expande el vector numérico $(u_{0,j}, u_{1,j}, \ldots, u_{n,j})$ definido en la malla igualmente espaciada $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, donde $nh = a$, en la transformada sinusoidal de Fourier discreta:

$$u_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{l,j} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi i l}{n}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n \quad (2)$$

Las condiciones de frontera $u_{0,j} = 1$, $j = 0$ se satisfacen para cualquier $j \ge 0$. Debido al principio de superposición lineal, se considera cada término de la suma de la ecuación (2) por separado. Entonces se sustituye $u_{i,j} = a_{l,j} \operatorname{sen}(\kappa_l i)$, $\kappa_l = \pi l/n$ en el método explícito (1) y se obtiene

$$a_{l,j+1} \operatorname{sen}(\kappa_l i) = (1 - 2\lambda)a_{l,j} \operatorname{sen}(\kappa_l i) + \lambda a_{l,j}\Big(\operatorname{sen}(\kappa_l(i + 1)) + \operatorname{sen}(\kappa_l(i - 1))\Big). \quad (3)$$

Utilizando la identidad trigonométrica,

$$\operatorname{sen}(\kappa_l(i + 1)) + \operatorname{sen}(\kappa_l(i - 1)) = 2\cos(\kappa_l)\operatorname{sen}(\kappa_l i),$$

el factor $\operatorname{sen}(\kappa_l i)$ se cancela en la ecuación (3), y se obtiene una fórmula de iteración simple para $a_{l,j}$:

$$a_{l,j+1} = Q_l a_{l,j},$$

donde

$$Q_l = 1 - 2\lambda + 2\lambda\cos(\kappa_l) \quad (4)$$

Dado que el factor Q_l es independiente de j, es claro que la amplitud $a_{l,j}$ del modo de Fourier $\operatorname{sen}(\kappa_l i)$ cambia en $j \ge 0$, de acuerdo con la potencia del factor Q_l:

$$a_{l,j} = Q_l^j a_{l,0}, \quad j \ge 0$$

La amplitud $a_{l,j}$ crece en j si $|Q_l| > 1$, y está acotada o decae si $|Q_l| \le 1$. Por tanto, la estabilidad del método

de iteración explícito se define a partir de la condición

$$|Q_l| \leq 1, \text{ para todo } l = 1, 2, \ldots, n \qquad (5)$$

Dado que $Q_l < 1$ para $\lambda > 0$, la restricción para la estabilidad (5) puede reescribirse como

$$1 - 4\lambda \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi l}{2n}\right) \geq -1, \; l = 1, 2, \ldots, n \qquad (6)$$

que resulta en la *estabilidad condicional* del método explícito para $0 < \lambda \leq 0.5$. Cuando $\lambda > 0.5$, el primer modo de Fourier inestable corresponde a $l = n$, que es el responsable de un patrón de secuencia alternativa en el espacio creciente en el tiempo de $u_{i,j}$. Este patrón se observa claramente en la figura 1.

Así, se pueden estudiar las inestabilidades de los métodos de diferencias finitas utilizando la transformada discreta de Fourier, el principio de superposición lineal, y los factores de iteración explícita en el tiempo. El mismo método puede aplicarse a otros métodos de diferencias finitas para ecuaciones de calor y de onda, y en general a una discretización de cualquier ecuación diferencial parcial lineal con coeficientes constantes.

Problemas relacionados

1. Considere el método implícito de Crank-Nicholson para la ecuación de calor $u_t = u_{xx}$ (ver ejemplo 2 de la sección 8.2):

$$-u_{i-1,j+1} + \alpha u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} - \beta u_{i,j} + u_{i+1,j} \qquad (7)$$

donde $\alpha = 2(1 + 1/\lambda), \beta = 2(1 - 1/\lambda)$, y $\lambda = k/h^2$. Encuentre la fórmula explícita para Q_l en la ecuación (4) y demuestre que el método implícito de Crank-Nicholson (7) es *estable incondicionalmente* para cualquier $\lambda > 0$.

2. Considere el método explícito de diferencias centrales para la ecuación de calor $u_t = u_{xx}$:

$$u_{i,j+1} = 2\lambda(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}) + u_{i,j-1}. \qquad (8)$$

Utilizando el mismo algoritmo que en el problema 1, reduzca la ecuación (8) a un esquema de iteración en dos pasos:

$$a_{l,j+1} = 4\lambda(\cos(\kappa_l) - 1)a_{l,j} + a_{l,j-1}. \qquad (9)$$

Utilizando el esquema de iteración explícito (4), encuentre una ecuación cuadrática para Q_l y resuélvala con la fórmula cuadrática (puede consultar el ejemplo 1 de la sección 9.2 del tomo I). Demuestre que el método explícito de diferencias centrales (8) es *incondicionalmente inestable* para cualquier $\lambda > 0$.

3. Considere el método explícito de diferencias centrales para la ecuación de onda $u_{tt} = c^2 u_{tt}$ (ver ejemplo 1 de la sección 8.3 del presente libro):

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i-1,j} + 2(1 - \lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2 u_{i+1,j} - u_{i,j-1} \qquad (10)$$

donde $\lambda = ck/h$ es el número de Courant. Utilizando el mismo algoritmo que en el problema 2, encuentre y resuelva la ecuación cuadrática para Q_l. Demuestre que $|Q_l| = 1$ cuando ambas raíces de la ecuación cuadrática son complejas. Demuestre que la constricción para la estabilidad (5) se viola cuando ambas raíces de la ecuación cuadrática son distintas y reales. Demuestre que el método explícito de diferencias centrales (10) es estable para $0 < \lambda^2 \leq 1$ e inestable para $\lambda^2 > 1$.

4. Considere el método de retroceso en el espacio y avance en el tiempo para la ecuación de transporte $u_t + cu_x = 0$:

$$u_{i,j+1} = (1 - \lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i-1,j} \qquad (11)$$

donde $\lambda = ck/h$. Considere la transformada discreta de Fourier compleja con el modo de Fourier,

$$u_{i,j} = a_{l,j}e^{i\kappa_l i}, \text{ donde } \kappa = \pi l/n, \; i = \sqrt{-1}$$

y encuentre el factor complejo Q_l en el esquema de iteración de un paso (4). Pruebe que el método de retroceso de espacio y avance en el tiempo (11) es estable para $0 < \lambda \leq 1$ e inestable para $\lambda > 1$.

5. Considere el método espacio central y retroceso en el tiempo para la ecuación de transporte $u_t + cu_x = 0$:

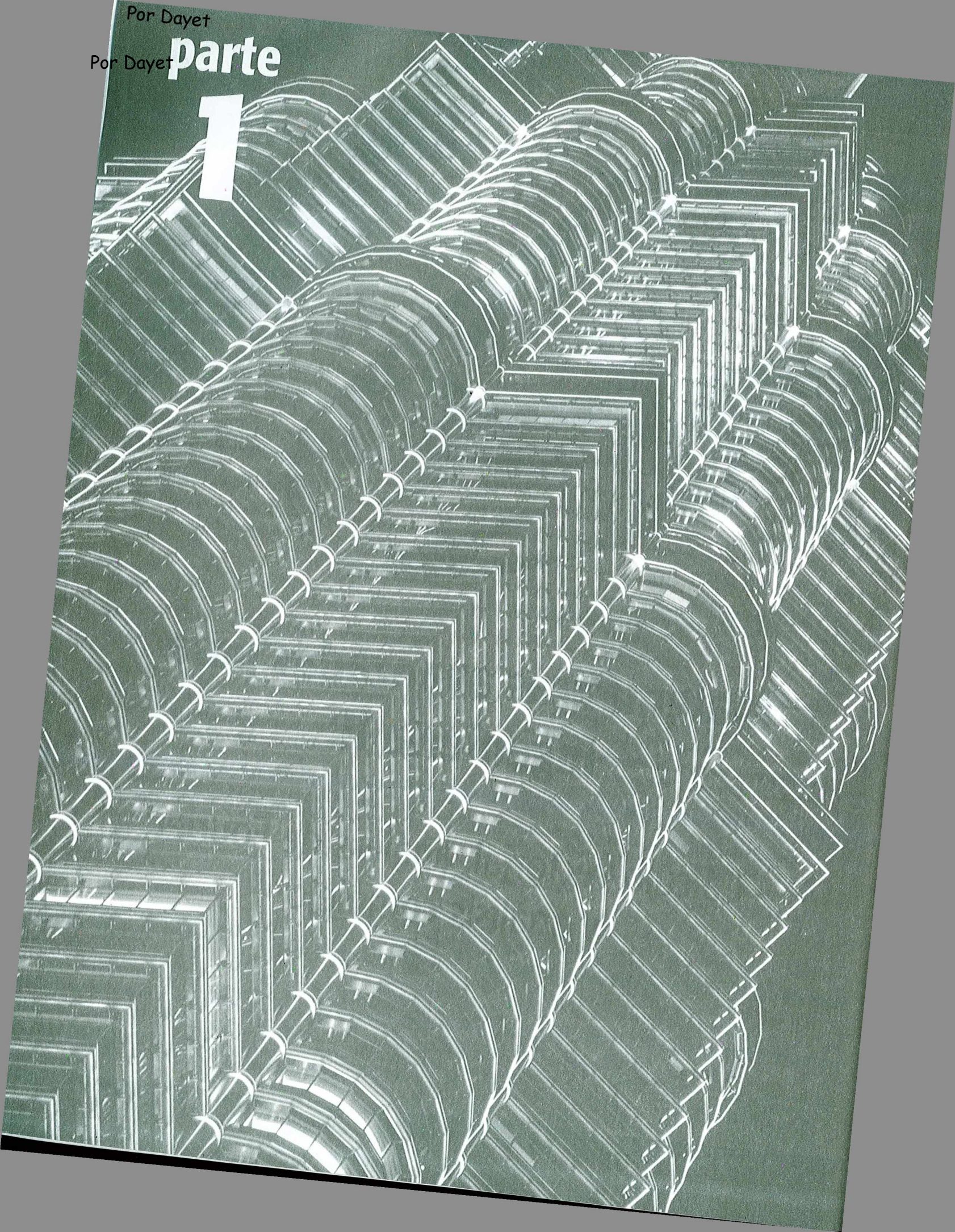
$$\lambda u_{i+1,j+1} + 2u_{i,j+1} - \lambda u_{i-1,j+1} = 2u_{i,j} \qquad (12)$$

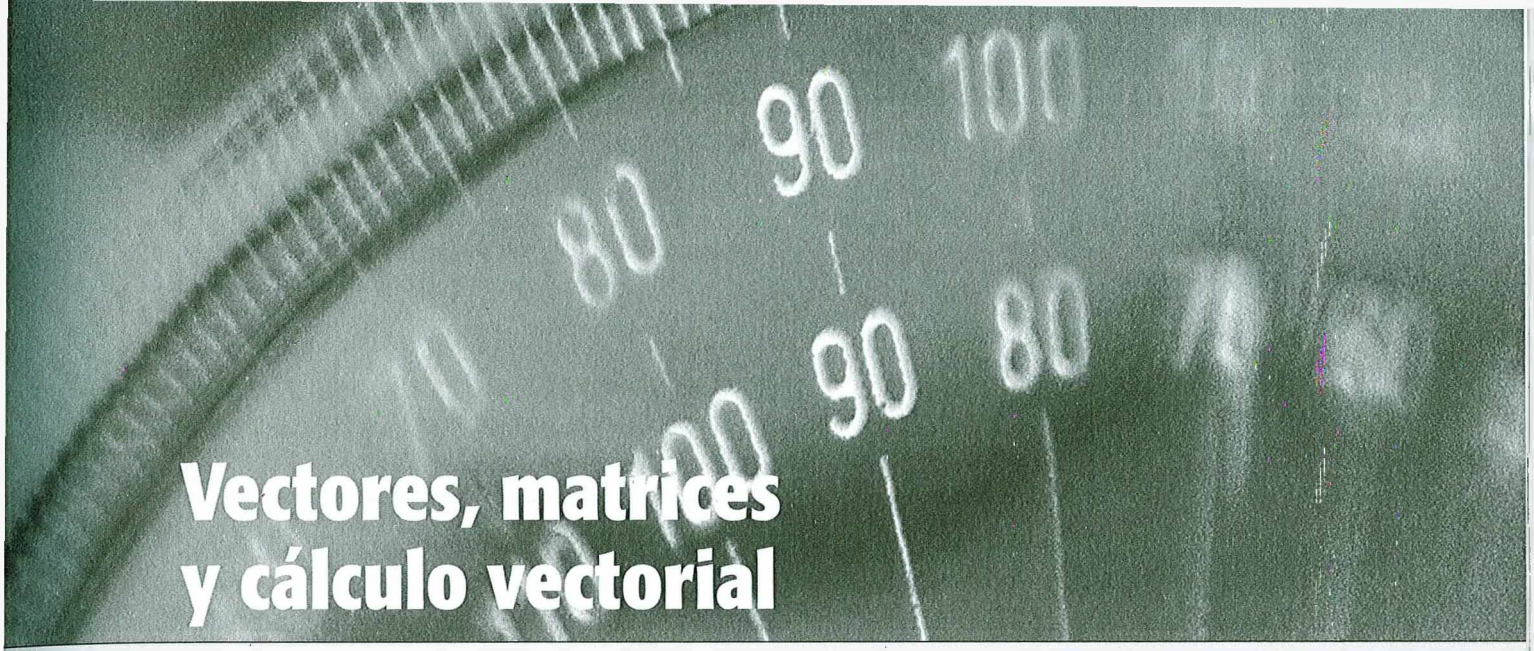
Utilizando el mismo algoritmo que en el problema 4, demuestre que el método de espacio central y retroceso en el tiempo (12) es *incondicionalmente estable* para cualquier $\lambda > 0$.

Por Dayet

Por Dayet

parte 1





Vectores, matrices y cálculo vectorial

1 Vectores
2 Matrices
3 Cálculo vectorial

CAPÍTULO

1

Vectores

Estructura del capítulo

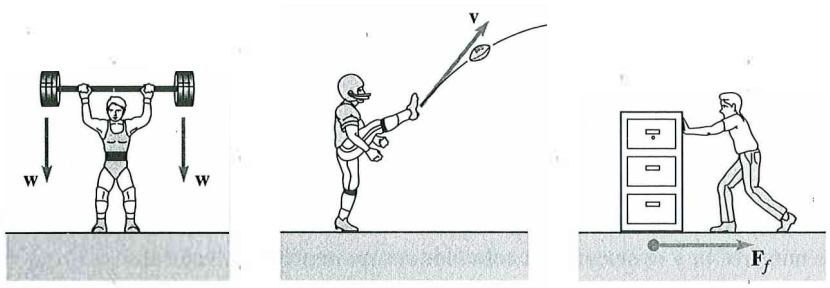
1.1 Vectores en el espacio 2D
1.2 Vectores en el espacio 3D
1.3 Producto escalar
1.4 Producto vectorial
1.5 Líneas y planos en el espacio 3D
1.6 Espacios vectoriales
1.7 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt
Ejercicios de repaso del capítulo 1

El concepto de vector suele abordarse en prácticamente todos los cursos de cálculo, así como en los de física e ingeniería. Para la mayoría de los lectores este capítulo representa, por lo tanto, un repaso de temas familiares como los productos escalar y vectorial. De cualquier forma, en la sección 1.6 se plantea el concepto abstracto de vector.

1.1 Vectores en el espacio 2D

Introducción En ciencias, matemáticas e ingeniería, se distinguen dos cantidades importantes: los **escalares** y los **vectores**. Un escalar es simplemente un número real o una cantidad que tiene *magnitud*. Por ejemplo, la longitud, la temperatura y la presión sanguínea se representan con números como 80 m, 20°C y la relación sistólica/diastólica 120/80. Por su parte, un vector se describe generalmente como una cantidad que tiene tanto *magnitud* como *dirección*.

Vectores geométricos Geométricamente, un vector se representa por medio de un segmento de línea dirigido —esto es, por una flecha— y se denota con un símbolo en negritas o mediante un símbolo con una flecha encima, por ejemplo: $\mathbf{v}$, $\vec{u}$ o $\overrightarrow{AB}$. La figura 1.1 muestra ejemplos de cantidades vectoriales como el peso $\mathbf{w}$, la velocidad $\mathbf{v}$ y la fuerza retardante de fricción $\mathbf{F}_f$.



a) *b)* *c)*

Figura 1.1 Ejemplos de cantidades vectoriales

Notación y terminología Un vector cuyo punto inicial (u origen) es A y cuyo punto terminal (o destino) es B se escribe $\overrightarrow{AB}$. La magnitud de un vector se escribe $\|\overrightarrow{AB}\|$. Cuando dos vectores tienen la misma magnitud y la misma dirección se dice que son **iguales**. Así, en la figura 1.2, se tiene que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Los vectores son **libres**, lo cual significa que un vector puede moverse de una posición a otra siempre y cuando su magnitud y dirección no varíen. El **negativo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, denotado como $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud que $\overrightarrow{AB}$ pero posee dirección opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo escalar** de un vector, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que es $|k|$ veces más largo que $\overrightarrow{AB}$. Si $k > 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$; si $k < 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene dirección opuesta a la de $\overrightarrow{AB}$. Cuando $k = 0$, se dice que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**.* Dos vectores son **paralelos** si, y sólo si, entre ellos son múltiplos escalares diferentes de cero. Véase la figura 1.3.

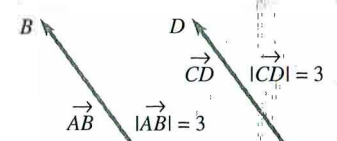


Figura 1.2 Vectores iguales

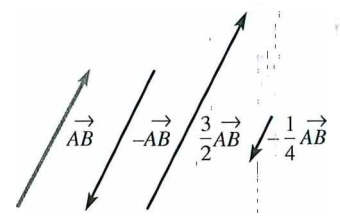


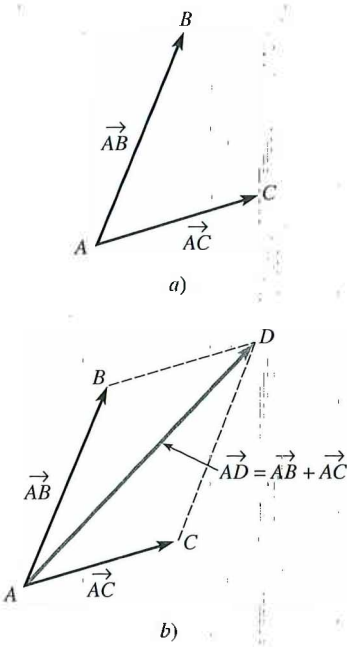
Figura 1.3 Vectores paralelos

Suma y resta Dos vectores pueden compartir un punto inicial común, como el punto A de la figura 1.4*a*). Así, si los vectores no paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados de un paralelogramo como el de la figura 1.4*b*), se dice que el vector que se halla en la diagonal principal, o $\overrightarrow{AD}$, es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Se escribe

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

La **diferencia** entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define como

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}).$$



a) *b)*

Figura 1.4 El vector $\overrightarrow{AD}$ es la suma de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

*Cuando se pregunta cuál es la dirección de **0** normalmente se responde que al vector cero se le puede asignar *cualquier* dirección. Específicamente, se necesita el **0** para poder tener un álgebra vectorial.

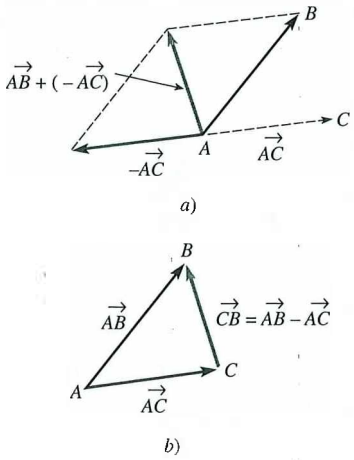


Figura 1.5 El vector $\overrightarrow{CB}$ es la resta de $\overrightarrow{AB}$ menos $\overrightarrow{AC}$

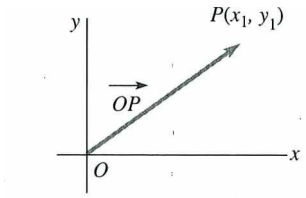


Figura 1.6 Vector de posición

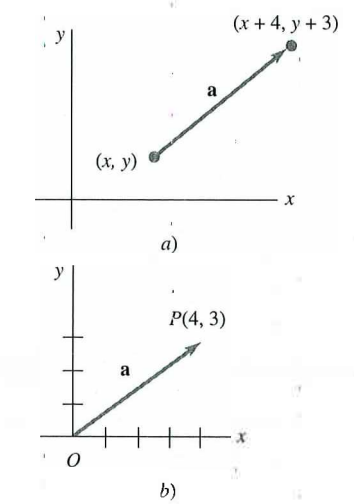


Figura 1.7 Los vectores en *a*) y *b*) son los mismos

Como se ve en la figura 1.5*a*), la resta $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ se interpreta como la diagonal principal del paralelogramo cuyos lados son $\overrightarrow{AB}$ y $-\overrightarrow{AC}$. Sin embargo, como se muestra en la figura 1.5*b*), también es posible interpretar la misma resta vectorial como el tercer lado del triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. En esta segunda interpretación, se observa que la resta vectorial $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ apunta hacia el punto terminal del vector *del cual* se está restando el segundo vector. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ entonces

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \mathbf{0}.$$

■ **Vectores en un plano coordenado** Para describir analíticamente un vector, supóngase —para el resto de esta sección— que los vectores considerados se encuentran en un plano coordenado bidimensional o **2D**. Al conjunto de todos los vectores en el plano se le denomina R^2. El vector mostrado en la figura 1.6, con punto inicial en el origen O y punto terminal $P(x_1, y_1)$, se denomina el **vector de posición** del punto P y se escribe como

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

■ **Componentes** En general, un vector $\mathbf{a}$ en R^2 es cualquier par ordenado de números reales,

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

Los números a_1 y a_2 se conocen como los **componentes** del vector $\mathbf{a}$.

Como se mostrará en el primer ejemplo, el vector $\mathbf{a}$ no es necesariamente un vector de posición.

Ejemplo 1 Vector de posición

El desplazamiento entre los puntos (x, y) y $(x + 4, y + 3)$ de la figura 1.7*a*) se escribe $\langle 4, 3 \rangle$. Como se ve en la figura 1.7*b*), el vector de posición de $\langle 4, 3 \rangle$ es el vector que inicia en el origen y termina en el punto $P(4, 3)$. ❑

Tanto la suma y resta de vectores, como la multiplicación de vectores por escalares, etc., se definen en función de sus componentes.

DEFINICIÓN 1.1 Suma, multiplicación escalar, igualdad

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores en R^2.

i) **Suma:** $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ (1)

ii) **Multiplicación escalar:** $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ (2)

iii) **Igualdad:** $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si, y sólo si, $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ (3)

■ **Resta** Utilizando (2), se define el **negativo** de un vector $\mathbf{b}$ como

$$-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle.$$

La **resta** o diferencia de dos vectores se define entonces como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle. \quad (4)$$

En la figura 1.8*a*) se ilustra la suma de los vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la figura 1.8*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto terminal P_2, es la resta de los vectores de posición

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

Como se muestra en la figura 1.8*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse comenzando por el punto terminal de $\overrightarrow{OP_1}$ y finalizando en el punto terminal de $\overrightarrow{OP_2}$, o también como el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto terminal tiene coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Recuérdese que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales, puesto que tienen la misma magnitud y la misma dirección.

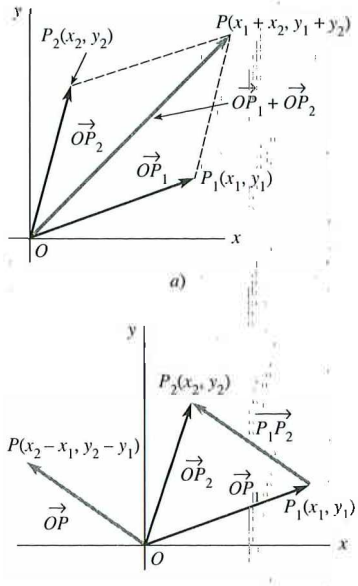


Figura 1.8 En *b*), $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ son el mismo vector

---

Ejemplo 2 Suma y resta de dos vectores

Si $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 3 \rangle$, encuentre $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Solución Se utilizan (1), (2) y (4).

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 1 + (-6), 4 + 3 \rangle = \langle -5, 7 \rangle$$
$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1 - (-6), 4 - 3 \rangle = \langle 7, 1 \rangle$$
$$2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 2, 8 \rangle + \langle -18, 9 \rangle = \langle -16, 17 \rangle.$$ ❑

Propiedades La definición de un vector por medio de sus componentes se utiliza para verificar cada una de las siguientes **propiedades** de los vectores en R^2:

Propiedades de los vectores

i)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$		(ley conmutativa)
ii)	$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$		(ley asociativa)
iii)	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$		(identidad aditiva)
iv)	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$		(inverso aditivo)
v)	$k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$,	k es un escalar	
vi)	$(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$,	k_1 y k_2 son escalares	
vii)	$k_1(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$,	k_1 y k_2 son escalares	
viii)	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$		
ix)	$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$		(vector cero)

El **vector cero**, $\mathbf{0}$, de las propiedades *iii*), *iv*) y *ix*) se define como

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle.$$

Magnitud La **magnitud**, **longitud** o **norma** de un vector $\mathbf{a}$ se denota como $\|\mathbf{a}\|$. Con base en el teorema de Pitágoras y la figura 1.9, se define la magnitud de un vector

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle \quad \text{como} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Claramente, $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ para cualquier vector $\mathbf{a}$, y $\|\mathbf{a}\| = 0$ si, y sólo si, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 6, -2 \rangle$, entonces $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

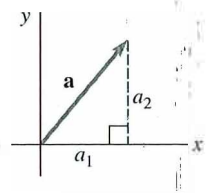


Figura 1.9 Un triángulo rectángulo

Vectores unitarios Un vector que tiene magnitud 1 se denomina **vector unitario**. Se puede obtener un vector unitario $\mathbf{u}$ en la misma dirección que un vector $\mathbf{a}$ no nulo, multiplicando $\mathbf{a}$ por el recíproco de su magnitud. El vector $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$ es un vector unitario, ya que

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \|\mathbf{a}\| = 1.$$

Ejemplo 3 Vectores unitarios

Dado $\mathbf{a} = \langle 2, -1 \rangle$, genere un vector unitario con la misma dirección que **a** y otro con dirección opuesta.

Solución La magnitud del vector **a** es $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. Así, un vector unitario con la misma dirección que **a** es el múltiplo escalar

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$

Un vector unitario con la dirección opuesta a **a** es el negativo de **u**:

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle.$$

❑

Si **a** y **b** son vectores y c_1 y c_2 son escalares, entonces la expresión $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ se denomina una **combinación lineal** de **a** y **b**. Como se muestra a continuación, cualquier vector en R^2 puede escribirse como una combinación lineal de dos vectores especiales.

■ **Vectores i, j** Teniendo presentes (1) y (2), cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ puede escribirse como una suma:

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, 0 \rangle + \langle 0, a_2 \rangle = a_1\langle 1, 0 \rangle + a_2\langle 0, 1 \rangle. \tag{5}$$

A los vectores unitarios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ usualmente se les asignan los símbolos especiales **i** y **j**. Véase la figura 1.10*a*). Así, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle,$$

Entonces (5) se convierte en $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. (6)

Se dice que los vectores unitarios **i** y **j** forman una **base** para el sistema de vectores bidimensionales, puesto que cualquier vector **a** puede escribirse como una combinación lineal única de **i** y **j**. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector de posición, entonces la figura 1.10*b*) muestra que **a** es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$, que tienen al origen como punto inicial común y se halla sobre los ejes x y y, respectivamente. El escalar a_1 se llama la **componente horizontal** de **a**, y el escalar a_2 se denomina la **componente vertical** de **a**.

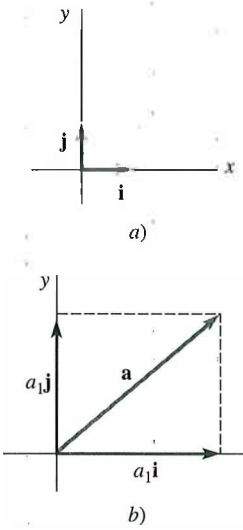


Figura 1.10 **i** y **j** forman una base para R^2

Ejemplo 4 Operaciones vectoriales utilizando **i** y **j**

a) $\langle 4, 7 \rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

b) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

c) $\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\| = \sqrt{2}$

d) $10(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

e) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son paralelos, ya que **b** es un múltiplo escalar de **a**. Se observa que $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$. ❑

Ejemplo 5 Gráficas de suma vectorial y de resta vectorial

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Graficar $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución Las gráficas de $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ se ilustran en las figuras 1.11*a*) y 1.11*b*), respectivamente.

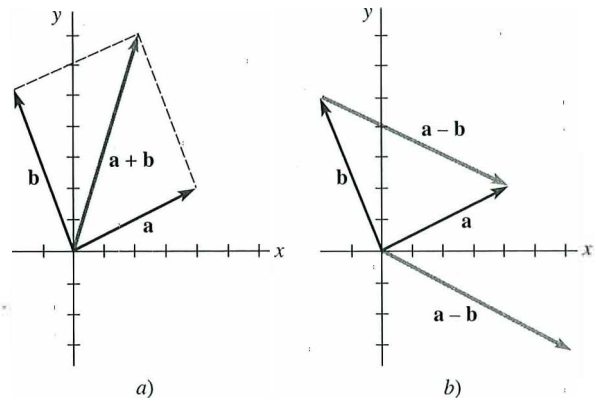


Figura 1.11 Suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ en *a*); resta $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ en *b*) ❑

EJERCICIOS 1.1 Las respuestas a los problemas impares selaccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-8, encuentre *a*) $3\mathbf{a}$, *b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, *c*) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, *d*) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ y *e*) $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$
3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5\rangle$
4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j}$
5. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{j}$
6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$
7. $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$
8. $\mathbf{a} = \langle 7, 10\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 9-14, encuentre *a*) $4\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ y *b*) $-3\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$.

9. $\mathbf{a} = \langle 1, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1\rangle$
10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
11. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
12. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3\rangle$
13. $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3\rangle$
14. $\mathbf{a} = \langle 3, 1\rangle + \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 15-18, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Grafique $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su vector de posición correspondiente.

15. $P_1(3, 2)$, $P_2(5, 7)$
16. $P_1(-2, -1)$, $P_2(4, -5)$
17. $P_1(3, 3)$, $P_2(5, 5)$
18. $P_1(0, 3)$, $P_2(2, 0)$
19. Encuentre el punto terminal del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ si su punto inicial es $(-3, 10)$.
20. Encuentre el punto inicial del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -5, -1\rangle$ si su punto terminal es $\langle 4, 7\rangle$.
21. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

   a) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$
   b) $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$
   c) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$
   d) $2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 3(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{12}\mathbf{j})$
   e) $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
   f) $(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

22. Determine un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ sean paralelos

En los problemas 23 y 24, encuentre $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores dados.

23. $\mathbf{a} = \langle 5, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 4\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 3, 10\rangle$
24. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 0, -2\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre un vector unitario *a*) con la misma dirección que $\mathbf{a}$, y *b*) con dirección opuesta a $\mathbf{a}$.

25. $\mathbf{a} = \langle 2, 2\rangle$
26. $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$
27. $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$
28. $\mathbf{a} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$

En los problemas 29 y 30, $\mathbf{a} = \langle 2, 8\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$. Encuentre un vector unitario con la misma dirección que el vector indicado.

29. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$
30. $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

En los problemas 31 y 32, encuentre un vector $\mathbf{b}$ que sea paralelo al vector dado y tenga la magnitud indicada.

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$, $\|\mathbf{b}\| = 2$
32. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\|\mathbf{b}\| = 3$
33. Encuentre un vector con dirección opuesta a $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, pero $\frac{3}{4}$ partes más largo.
34. Puesto que $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0\rangle$, encuentre un vector con la misma dirección que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, pero 5 veces más largo.

En los problemas 35 y 36, utilice la figura correspondiente para dibujar el vector indicado.

35. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$

36. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Figura 1.12 Vectores para el problema 35

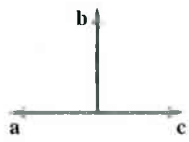


Figura 1.13 Vectores para el problema 36

En los problemas 37 y 38, exprese al vector **x** en función de los vectores **a** y **b**.

37.

38.

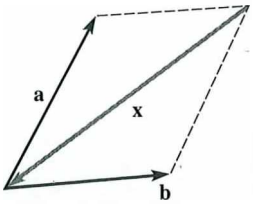


Figura 1.14 Vector **x** del problema 37

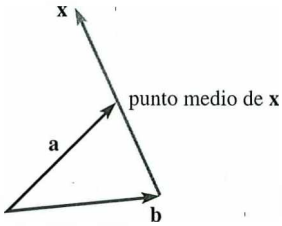


Figura 1.15 Vector **x** del problema 38

En los problemas 39 y 40, utilice la figura correspondiente para demostrar el resultado proporcionado.

39. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

40. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

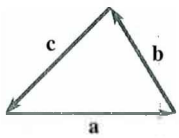


Figura 1.16 Vectores para el problema 39

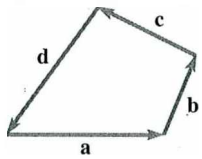


Figura 1.17 Vectores para el problema 40

En los problemas 41 y 42, exprese al vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ como una combinación lineal de los vectores **b** y **c** proporcionados.

41. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

42. $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Se dice que un vector es tangente a una curva en un punto si es paralelo a la tangente en el punto. En los problemas 43 y 44, encuentre un vector unitario tangente a la curva proporcionada en el punto indicado.

43. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, $(2, 2)$

44. $y = -x^2 + 3x$, $(0, 0)$

45. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza **F** formando un ángulo θ con respecto a la vertical. En la figura 1.18, el vector **F** se descompone en sus componentes vectoriales $\mathbf{F}_g$, que es paralela al terreno, y $\mathbf{F}_n$, que es perpendicular al mismo. Con el propósito de que el pie no se deslice, la fuerza $\mathbf{F}_g$ debe contrarrestarse con la fuerza opuesta de fricción $\mathbf{F}_f$; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.

   a) Considere que $\|\mathbf{F}_f\| = \mu\|\mathbf{F}_n\|$, donde μ es el coeficiente de fricción, para mostrar que $\tan\theta = \mu$. El pie no se deslizará para ángulos menores o iguales a θ.

   b) Si $\mu = 0.6$ para un tacón de hule que golpea una banqueta de asfalto, encuentre el ángulo de "no deslizamiento".

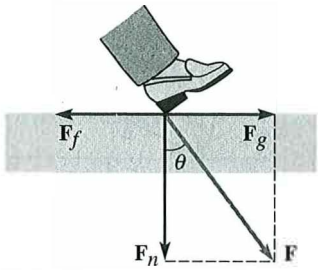


Figura 1.18 Vector **F** del problema 45

46. Un semáforo de 200 lb cuelga en equilibrio de dos cables. Como muestra la figura 1.19*b*), se considera que el peso del semáforo se representa por **w** y las fuerzas en los dos cables por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. De la figura 1.19*c*), se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \tag{7}$$

Observe el problema 39. Si

$$\mathbf{w} = -200\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_1 = (\|\mathbf{F}_1\| \cos 20°)\mathbf{i} + (\|\mathbf{F}_1\| \operatorname{sen} 20°)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -(\|\mathbf{F}_2\| \cos 15°)\mathbf{i} + (\|\mathbf{F}_2\| \operatorname{sen} 15°)\mathbf{j},$$

utilice (7) para determinar las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia:* Vuelva a leer el inciso *iii*) de la definición 1.1.]

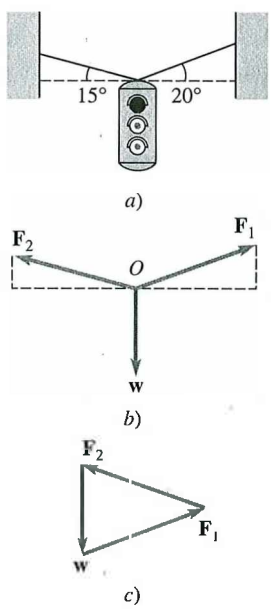


Figura 1.19 Tres vectores de fuerza del problema 46

47. Una carga eléctrica Q se distribuye uniformemente a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = a$. Vea la figura 1.20.

La fuerza total ejercida sobre la carga q en el eje x debida a la carga Q es $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$ donde

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{L\,dy}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}$$

y

$$F_y = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Determine $\mathbf{F}$.

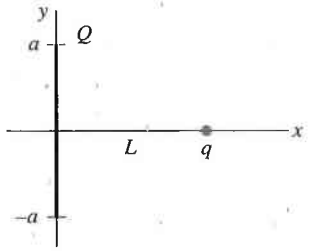


Figura 1.20 Carga sobre el eje x del problema 47

48. Utilizando vectores, muestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí. [*Sugerencia:* Suponga que M es el punto medio de una diagonal y N, el punto medio de la otra.]

49. Utilizando vectores, muestre que el segmento de línea que se encuentra entre los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de su longitud.

50. Un avión sale de un aeropuerto localizado en el origen O y vuela 150 millas en la dirección 20° norte, desde el este, hacia la ciudad A. Desde A, el aeroplano vuela entonces 200 millas en la dirección 23° oeste, desde el norte, hacia la ciudad B. Desde B, el avión vuela 240 millas en la dirección 10° sur, desde el oeste, hacia la ciudad C. Exprese la ubicación de la ciudad C como un vector $\mathbf{r}$ tal como se muestra en la figura 1.21. Encuentre la distancia desde O hasta C.

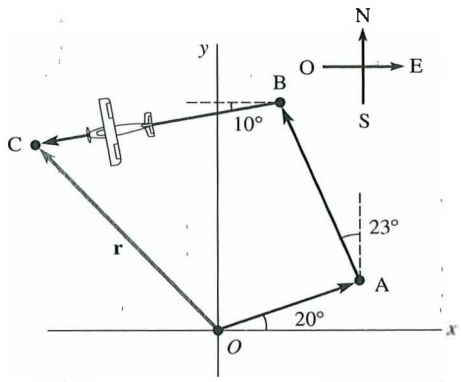


Figura 1.21 Avión del problema 50

1.2 Vectores en el espacio 3D

■ **Introducción** En el plano, o espacio 2D, una forma de describir la posición de un punto P es asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales, o perpendiculares, llamados los ejes y y x. Si P es el punto de intersección entre la línea $x = a$ (perpendicular al eje x) y la línea $y = b$ (perpendicular al eje y), se dice entonces que el **par ordenado** (a, b) son las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares** del punto. Véase la figura 1.22. En esta sección se amplían los conceptos de coordenadas cartesianas y vectores a tres dimensiones.

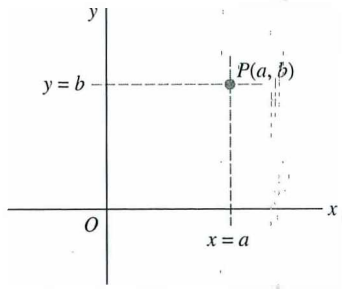


Figura 1.22 Coordenadas rectangulares en el espacio 2D

■ **Sistema coordenado rectangular en el espacio 3D** En tres dimensiones, o **espacio 3D**, un sistema coordenado rectangular se construye utilizando tres ejes mutuamente ortogonales. El punto en el que estos ejes se intersecan se denomina el origen O. Estos ejes, mostrados en la figura 1.23*a*), se nombran de acuerdo con la llamada **regla**

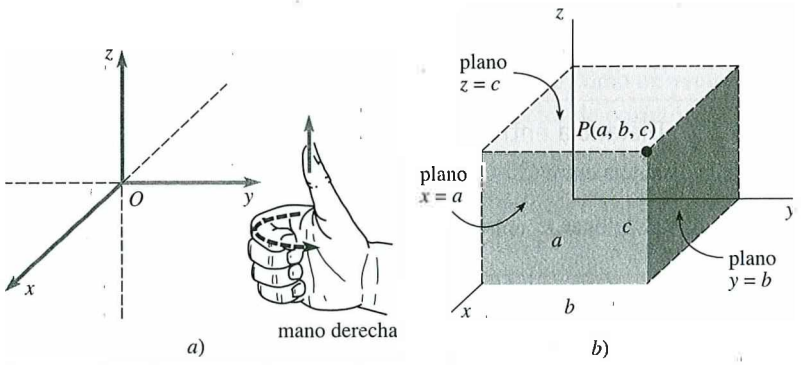


Figura 1.23 Coordenadas rectangulares en el espacio 3D

de la mano derecha: si los dedos de la mano derecha —apuntando en la dirección del eje x positivo— se doblan hacia el eje y positivo, entonces el pulgar apuntará en la dirección de un nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se nombra como eje z. Las líneas punteadas de la figura 1.23*a*) representan al eje negativo. Ahora, si

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

son planos perpendiculares al eje x, eje y y eje z, respectivamente. Entonces, el punto P en el que estos planos se intersecan se representa por una **tripleta ordenada** de números (a, b, c) conocidos como las **coordenadas cartesianas** o **rectangulares** del punto. Los números a, b y c son, a su vez, llamados las **coordenadas x, y y z** de $P(a, b, c)$. Vea la figura 1.23*b*).

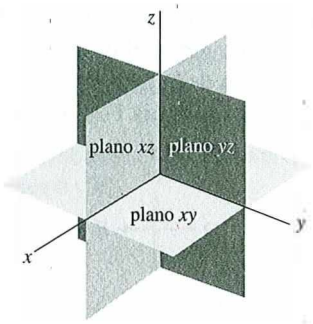


Figura 1.24 Octantes

Octantes Cada par de ejes coordenados determina un **plano coordenado**. Como se muestra en la figura 1.24, los ejes x y y determinan al plano xy, los ejes x y z determinan al plano xz, etc. Los planos coordenados dividen al espacio 3D en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se denomina el **primer octante**. No existe consenso para la denominación de los otros siete octantes.

La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto, ya sea en un eje coordenado o en un plano coordenado. Como se ve en la tabla, se describe también, por ejemplo, el plano xy a través de la sencilla ecuación $z = 0$. Análogamente, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$.

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

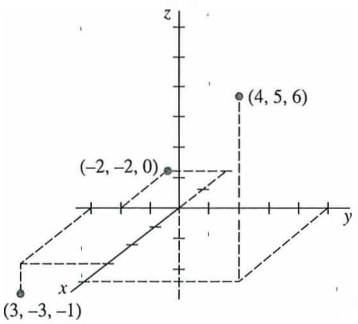


Figura 1.25 Puntos del ejemplo 1

Ejemplo 1 Gráficas de tres puntos

Grafique los puntos (4, 5, 6), (3, –3, –1) y (–2, –2, 0).

Solución De los tres puntos mostrados en la figura 1.25, únicamente (4, 5, 6) se encuentra en el primer octante. El punto (–2, –2, 0) se encuentra en el plano xy. ❑

Fórmula de la distancia Para hallar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio 3D, considérese su proyección sobre el plano xy. Como se muestra en la figura 1.26, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ se deduce a partir de la conocida fórmula de la distancia en el plano, y es igual a $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Si las coordenadas de P_3 son (x_2, y_2, z_1), entonces el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_2P_3$ lleva a

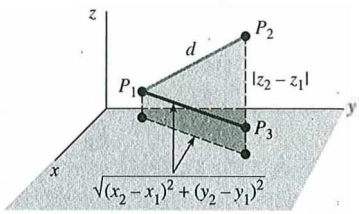


Figura 1.26 Distancia d entre dos puntos del espacio 3D

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

Ejemplo 2 Distancia entre dos puntos

Encuentre la distancia entre (2, –3, 6) y (–1, –7, 4).

Solución Al seleccionar P_2 como (2, –3, 6) y P_1 como (–1, –7, 4), la fórmula (1) da

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$ ❑

Fórmula del punto medio La fórmula para determinar el punto medio de un segmento de línea entre dos puntos del espacio 3D se desarrolla de forma análoga a la del

espacio 2D. Si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos distintos, entonces las **coordenadas del punto medio** del segmento de línea que existe entre ellos son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{2}$$

Ejemplo 3 Coordenadas de un punto medio

Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución De (2) se obtiene

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \text{ o } \left(\frac{1}{2}, -5, 5\right). \quad \square$$

■ **Vectores en el espacio 3D** Un **vector a en el espacio 3D** es cualquier tripleta ordenada de números reales

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

donde a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector. El conjunto de todos los vectores del espacio 3D se denota por el símbolo R^3. El **vector de posición** de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio es el vector $\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto terminal es P. Ver la figura 1.27.

Las definiciones por componentes de la suma, resta, multiplicación escalar, etc., son generalizaciones naturales de aquéllas para vectores en R^2.

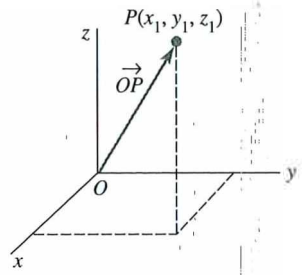


Figura 1.27 Vector de posición

DEFINICIÓN 1.2 Definiciones por componentes en el espacio 3D

Sea $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en R^3.

i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si, y sólo si, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
iv) Negativo: $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$
v) Resta: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
vi) Vector cero: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$
vii) Magnitud: $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Si $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ son los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle. \tag{3}$$

Al igual que en el espacio 2D, $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse tanto como un vector cuyo punto inicial es P_1 y cuyo punto terminal es P_2 o como un vector de posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto terminal es

$$P(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Vea la figura 1.28.

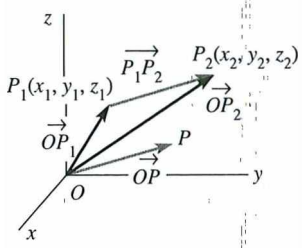


Figura 1.28 $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ son el mismo vector

Ejemplo 4 Vector entre dos puntos

Encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ si los puntos P_1 y P_2 están dados por $P_1(4, 6, -2)$ y $P_2(1, 8, 3)$.

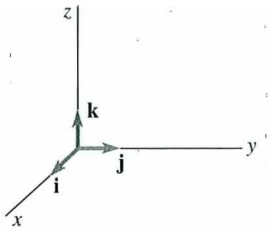
Solución Si los vectores de posición de los puntos son $\overrightarrow{OP_1} = \langle 4, 6, -2\rangle$ y $\overrightarrow{OP_2} = \langle 1, 8, 3\rangle$, entonces a partir de (3) se tiene

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle 1 - 4, 8 - 6, 3 - (-2)\rangle = \langle -3, 2, 5\rangle. \quad \square$$

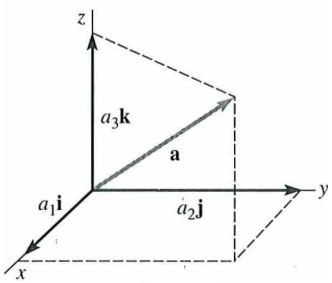
Ejemplo 5 Magnitud de un vector

Con base en el inciso *vii*) de la definición 1.2, se observa que $\mathbf{a} = \langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\rangle$ es un vector unitario, ya que

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 + 9 + 36}{49}} = 1. \quad \square$$



a)



b)

Figura 1.29 **i**, **j** y **k** forman una base para R^3

■ **Vectores i, j, k** En la sección anterior se vio que los vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ son una base para el sistema de vectores bidimensionales, puesto que cualquier vector **a** del espacio 2D puede escribirse como una combinación lineal de **i** y **j**: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. Para el sistema de vectores tridimensionales, el conjunto de vectores unitarios siguiente proporciona una base

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Cualquier vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ del espacio 3D puede expresarse como una combinación lineal de **i**, **j** y **k**:

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3\rangle &= \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle \\ &= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle,\end{aligned}$$

Esto es,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Los vectores **i**, **j** y **k** se ilustran en la figura 1.29*a*). En la figura 1.29*b*) se observa que un vector de posición $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$, que se encuentran sobre los ejes ordenados y tienen el origen como punto inicial común.

Ejemplo 6 Vector expresado en términos de **i**, **j**, **k**

El vector $\mathbf{a} = \langle 7, -5, 13\rangle$ es el mismo que $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$. $\square$

Cuando la tercera dimensión se toma en cuenta, cualquier vector en el plano *xy* se describe en forma equivalente a un vector tridimensional que se halla sobre el plano coordenado $z = 0$. Aunque los vectores $\langle a_1, a_2\rangle$ y $\langle a_1, a_2, 0\rangle$ no son técnicamente iguales, se pasa por alto la diferencia. Esto es debido a que, por ejemplo, se denota $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 0, 0\rangle$ mediante el mismo símbolo **i**. Pero para evitar cualquier confusión posible, en lo sucesivo los vectores se consideran siempre tridimensionales, y los símbolos **i** y **j** representan únicamente $\langle 1, 0, 0\rangle$ y $\langle 0, 1, 0\rangle$, respectivamente. En forma similar, un vector en el plano *xy* o en el plano *xz* debe tener una componente nula. En el plano *yz*, un vector

$$\mathbf{b} = \langle 0, b_2, b_3\rangle \quad \text{se escribe} \quad \mathbf{b} = b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}.$$

En el plano *xz*, un vector

$$\mathbf{c} = \langle c_1, 0, c_3\rangle \quad \text{es lo mismo que} \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_3\mathbf{k}.$$

Ejemplo 7 Vector en el plano *xz*

a) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ está en el plano coordenado *xz*.

b) $\|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$. $\square$

Ejemplo 8 Combinación lineal

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, encuentre $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Solución Se considera $\mathbf{b}$ un vector tridimensional por lo que se escribe, para destacarlo, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. De

$$5\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k} \quad \text{y} \quad 2\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$$

se tiene

$$\begin{aligned} 5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \\ &= 13\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 48\mathbf{k}. \end{aligned}$$

❑

EJERCICIOS 1.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-1.

En los problemas 1-6, grafique el punto dado. Utilice los mismos ejes coordenados.

1. (1, 1, 5)
2. (0, 0, 4)
3. (3, 4, 0)
4. (6, 0, 0)
5. (6, –2, 0)
6. (5, –4, 3)

En los problemas 7-10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ que satisfacen las condiciones dadas.

7. $z = 5$
8. $x = 1$
9. $x = 2,\ y = 3$
10. $x = 4,\ y = -1,\ z = 7$
11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectangular cuyos lados son los planos coordenados y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.
12. En la figura 1.30, se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular cuyos lados son paralelos a los planos coordenados. Encuentre las coordenadas de los seis vértices restantes.

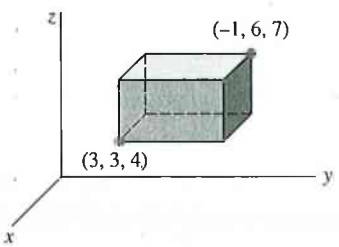


Figura 1.30 Paralelepípedo rectangular del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.
    a) Si se dibujan líneas desde P que sean perpendiculares a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del punto localizado en la base de cada perpendicular?
    b) Si se dibuja una línea que va de P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?
    c) Encuentre el punto del plano $x = 3$ más cercano a P.
14. Determine una ecuación de un plano paralelo a un plano coordenado que contenga los pares de puntos proporcionados.
    a) (3, 4, –5), (–2, 8, –5)
    b) (1, –1, 1), (1, –1, –1)
    c) (–2, 1, 2), (2, 4, 2)

En los problemas 15-20, describa la ubicación de los puntos $P(x, y, z)$ que satisface la ecuación o las ecuaciones dadas.

15. $xyz = 0$
16. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$
18. $(x - 2)(z - 8) = 0$
19. $z^2 - 25 = 0$
20. $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, encuentre la distancia entre los puntos proporcionados.

21. (3, –1, 2), (6, 4, 8)
22. (–1, –3, 5), (0, 4, 3)
23. Encuentre la distancia desde el punto (7, –3, –4) hasta *a*) el plano yz y *b*) el eje x.
24. Encuentre la distancia desde el punto (–6, 2, –3) hasta *a*) el plano xz y *b*) el origen.

En los problemas 25-28, los tres puntos proporcionados forman un triángulo. Determine qué triángulos son isósceles y cuáles son triángulos rectángulos.

25. (0, 0, 0), (3, 6, –6), (2, 1, 2)
26. (0, 0, 0), (1, 2, 4), $(3, 2, 2\sqrt{2})$
27. (1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)
28. (1, 1, –1), (1, 1, 1), (0, –1, 1)

En los problemas 29 y 30, utilice la fórmula de la distancia para demostrar que los puntos proporcionados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0)$, $P_2(-2, -2, -3)$, $P_3(7, 10, 6)$
30. $P_1(2, 3, 2)$, $P_2(1, 4, 4)$, $P_3(5, 0, -4)$

En los problemas 31 y 32, encuentre la incógnita.

31. $P_1(x, 2, 3)$, $P_2(2, 1, 1)$; $d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$
32. $P_1(x, x, 1)$, $P_2(0, 3, 5)$; $d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 33 y 34, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea que une a los puntos proporcionados.

33. $(1, 3, \frac{1}{2}), (7, -2, \frac{5}{2})$ 34. $(0, 5, -8), (4, 1, -6)$

35. Las coordenadas del punto medio del segmento de línea que une a $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Encuentre las coordenadas de P_1.

36. Sea P_3 el punto medio del segmento de línea entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de línea que une a los puntos *a*) P_1 y P_3 y *b*) P_3 y P_2.

En los problemas 37-40, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

37. $P_1(3, 4, 5), P_2(0, -2, 6)$

38. $P_1(-2, 4, 0), P_2(6, \frac{3}{2}, 8)$

39. $P_1(0, -1, 0), P_2(2, 0, 1)$

40. $P_1(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5), P_2(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}, 12)$

En los problemas 41–48, $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 2, 6, 9\rangle$. Encuentre el vector o el escalar indicados.

41. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 42. $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

43. $\mathbf{b} + 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{c})$ 44. $4(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) - 6\mathbf{b}$

45. $\|\mathbf{a} + \mathbf{c}\|$ 46. $\|\mathbf{c}\|\|2\mathbf{b}\|$

47. $\left\|\dfrac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\right\| + 5\left\|\dfrac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\right\|$

48. $\|\mathbf{b}\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|\mathbf{b}$

49. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a $\mathbf{a} = \langle 10, -5, 10\rangle$.

50. Encuentre un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

51. Encuentre un vector $\mathbf{b}$ que sea 4 veces más largo que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y tenga su misma dirección.

52. Encuentre un vector $\mathbf{b}$ para el cual $\|\mathbf{b}\| = \frac{1}{2}$ y sea paralelo a $\mathbf{a} = \langle -6, 3, -2\rangle$ pero con dirección opuesta.

53. Utilizando los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se muestran en la figura 1.31, dibuje el "vector promedio" $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

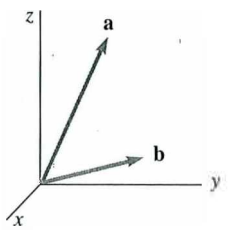


Figura 1.31 Vectores para el problema 53

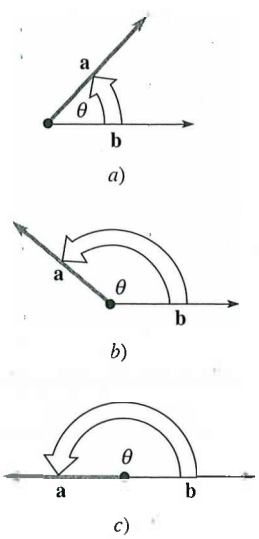


Figura 1.32 Ángulo θ en (1)

1.3 Producto escalar

■ **Introducción** En esta sección y la siguiente, se consideran dos tipos de producto entre vectores, consecuencia del estudio de la mecánica y también la electricidad y el magnetismo. El primero de estos productos se conoce como **producto escalar**, **producto punto** o **producto interior**.

■ **Una definición** El producto escalar entre dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ resulta ser un escalar y se denota comúnmente como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

DEFINICIÓN 1.3 Producto escalar de dos vectores

El **producto escalar** de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\theta, \tag{1}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores, de forma que $0 \leq \theta \leq \pi$.

La figura 1.32 ilustra el ángulo θ en tres casos. Si los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ no son paralelos, entonces θ es el *más pequeño* de los dos ángulos posibles entre ellos.

Ejemplo 1 Producto escalar utilizando (1)

De (1) se obtiene

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \tag{2}$$

Puesto que $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, y, en cada caso, $\cos\theta = 1$. ❑

■ **Formulación por componentes del producto escalar** El producto escalar puede expresarse en función de los componentes de dos vectores. Suponga que θ es el ángulo comprendido entre los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

es el tercer lado del triángulo indicado en la figura 1.33. Por la ley de cosenos, se escribe

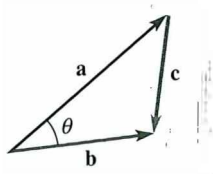


Figura 1.33 Vector **c** utilizado para la deducción de (4)

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta \quad \text{o} \quad \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{c}\|^2). \tag{3}$$

Utilizando $\|\mathbf{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, $\|\mathbf{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$, $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$, se simplifica el lado derecho de la segunda ecuación en (3) para obtener $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Puesto que el lado izquierdo de esta ecuación es la definición del producto escalar, se acaba de deducir una formulación alternativa del mismo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{4}$$

En otras palabras, el producto escalar de dos vectores es la *suma de los productos de sus componentes correspondientes*.

Ejemplo 2 Producto escalar utilizando (4)

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces a partir de (4) se obtiene que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (10)\left(-\frac{1}{2}\right) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21. \qquad \square$$

■ **Propiedades** El producto escalar posee las siguientes propiedades.

Propiedades del producto escalar

i)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$	
ii)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	(ley conmutativa)
iii)	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$	(ley distributiva)
iv)	$\mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,	k es un escalar
v)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$	
vi)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2$	

Cada una de estas propiedades, con excepción posiblemente de *iii)*, deberían ser evidentes a partir de (1). Cabe señalar que *vi)* establece que la magnitud de un vector

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Puede escribirse en términos del producto escalar:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Se puede utilizar (4) para demostrar *iii)*: si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, entonces se tiene de (4) que

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.\end{aligned}$$

■ **Vectores ortogonales** Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores no nulos, la definición 1.3 implica entonces que

i)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$	si, y sólo si, θ es agudo,
ii)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$	si, y sólo si, θ es obtuso y
iii)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$	si, y sólo si, $\cos\theta = 0$

En el último caso, el único número en $[0, \pi]$ para el que $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Cuando sucede esto, se dice que los vectores son **perpendiculares** u **ortogonales**. De esta forma se llega al siguiente resultado:

TEOREMA 1.1 Criterio para vectores ortogonales

Dos vectores no nulos **a** y **b** son ortogonales si, y sólo si, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Puesto que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$ para cualquier vector **b**, el vector cero se considera ortogonal a cualquier vector.

Ejemplo 3 **i, j, k son vectores ortogonales**

Del teorema 1.1, y del hecho que el producto escalar es conmutativo, se tiene inmediatamente que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{5}$$ ❑

Ejemplo 4 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

A partir del teorema 1.1, se concluye que **a** y **b** son ortogonales. ❑

■ **Ángulo entre dos vectores** Al igualar las dos formulaciones del producto escalar, (1) y (4), se determina **el ángulo entre dos vectores** a partir de

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}. \tag{6}$$

Ejemplo 5 Ángulo entre dos vectores

Encuentre el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución A partir de $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{27}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$, se observa de (6) que

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{42}}{9}$$

y entonces $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{42}}{9}\right) \approx 0.77$ radianes o $\theta \approx 44.9°$. ❑

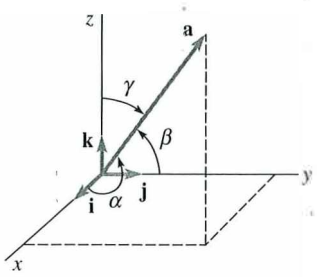


Figura 1.34 Ángulos directores α, β y γ

■ **Cosenos directores** Para un vector no nulo $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ del espacio 3D, los ángulos α, β y γ que forma **a** con los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, respectivamente, se denominan **ángulos directores** de **a**. Véase la figura 1.34. Ahora, de (6),

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{i}\|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{j}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{k}\|},$$

Que se simplifican para llegar a

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Se dice que $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ son los **cosenos directores** de $\mathbf{a}$. Los cosenos directores de un vector no nulo $\mathbf{a}$ son simplemente las componentes del vector unitario $(1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$:

$$\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{k} = (\cos\alpha)\,\mathbf{i} + (\cos\beta)\,\mathbf{j} + (\cos\gamma)\,\mathbf{k}.$$

Como la magnitud de $(1/\|\mathbf{a}\|)\mathbf{a}$ es 1, de la anterior ecuación se tiene que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ejemplo 6 Ángulos y cosenos directores

Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solución De $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, se observa que los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}},\quad \cos\beta = \frac{5}{3\sqrt{5}},\quad \cos\gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Los ángulos directores son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 1.27 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \alpha \approx 72.7°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.73 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \beta \approx 41.8°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.93 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \gamma \approx 53.4°. \qquad \square$$

Del ejemplo 6 se observa que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{45} + \frac{25}{45} + \frac{16}{45} = 1.$$

■ **Componente de a sobre b** La ley distributiva y (5) permiten expresar las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en términos del producto escalar:

$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{7}$$

Simbólicamente, los componentes de $\mathbf{a}$ se escriben como

$$\text{comp}_\mathbf{i}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad \text{comp}_\mathbf{j}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad \text{comp}_\mathbf{k}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

A continuación se ve que los resultados indicados en (8) se utilizan para encontrar la **componente de a sobre un vector arbitrario b**. Nótese que en cualquiera de los dos casos mostrados en la figura 1.35,

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|\cos\theta. \tag{9}$$

En la figura 1.35*b*), $\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} < 0$ ya que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. Ahora, escribiendo (9) como

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \frac{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta}{\|\mathbf{b}\|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|},$$

Se observa que

$$\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\left(\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}\right) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{10}$$

En otras palabras, *para encontrar la componente de* $\mathbf{a}$ *sobre un vector* $\mathbf{b}$, *se multiplica escalarmente* $\mathbf{a}$ *por un vector unitario con la dirección de* $\mathbf{b}$.

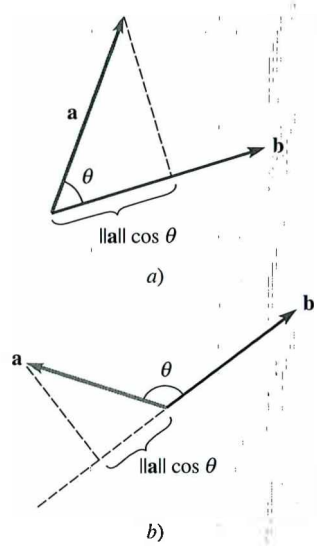


Figura 1.35 Componente de **a** sobre **b**

Ejemplo 7 Componente de un vector sobre otro vector

Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Encuentre $\text{comp}_\mathbf{b}\mathbf{a}$ y $\text{comp}_\mathbf{a}\mathbf{b}$.

Solución Primero se genera un vector unitario con la dirección de **b**:

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}, \quad \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Entonces, a partir de (10) se tiene

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

Modificando (10) consecuentemente, se tiene

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}\right).$$

Por lo tanto, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{29}, \quad \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$

y $$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}.$$ ❑

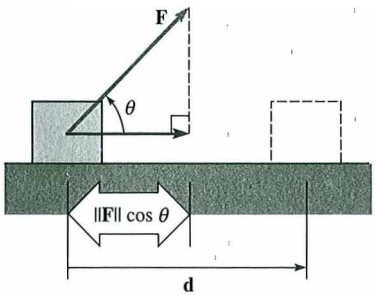


Figura 1.36 Trabajo realizado por una fuerza **F**

■ **Interpretación física del producto escalar** Cuando una fuerza constante de magnitud F mueve a un objeto una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente $W = Fd$. Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ con respecto a la dirección del movimiento, entonces el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $\|\mathbf{d}\|$ que el cuerpo se mueve:

$$W = (\|\mathbf{F}\| \cos\theta)\,\|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{F}\|\,\|\mathbf{d}\| \cos\theta.$$

Véase la figura 1.36. A partir de la definición 1.3 se concluye que si **F** causa un desplazamiento **d** de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \tag{11}$$

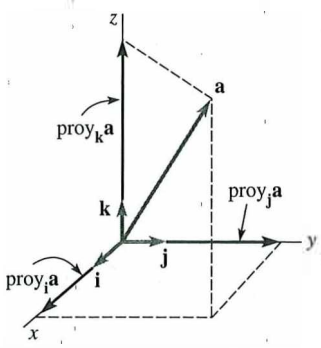


Figura 1.37 Proyecciones de **a** sobre **i**, **j** y **k**

Ejemplo 8 Trabajo realizado por una fuerza constante

Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ si su punto de aplicación sobre un bloque se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $\|\mathbf{F}\|$ se mide en newtons y $\|\mathbf{d}\|$ en metros.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

De (11) se tiene que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ N-m}.$$ ❑

■ **Proyección de a sobre b** Como se ilustra en la figura 1.37, la **proyección** de un vector **a** en cualquiera de las direcciones determinadas por **i**, **j**, **k** es simplemente el *vector* resultante de multiplicar la componente de **a** en la dirección especificada por un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a})\mathbf{i} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} = a_1\mathbf{i}$$

etc. La figura 1.38 muestra el caso general de la **proyección de a sobre b**:

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a})\left(\frac{1}{\|\mathbf{b}\|}\mathbf{b}\right) = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b} \tag{12}$$

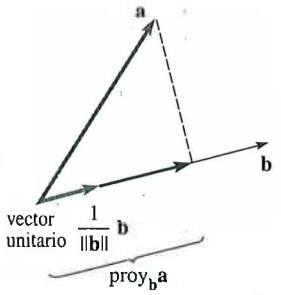


Figura 1.38 Proyección de **a** sobre **b**

Ejemplo 9 Proyección de un vector sobre otro vector

Encuentre la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Grafique.

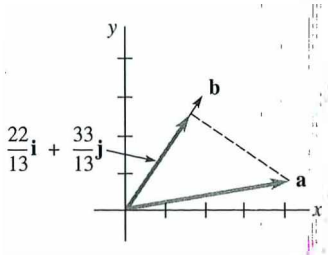
Solución En primer lugar, se calculan las componentes de **a** y **b**. Como $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{13}$, se encuentra a partir de (10) que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, de (11),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}.$$

La gráfica de este vector se muestra en la figura 1.39.



❑ **Figura 1.39** Proyección de **a** sobre **b** en el ejemplo 9

EJERCICIOS 1.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1 y 2, encuentre $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el menor ángulo entre **a** y **b** es el que se propone.

1. $\|\mathbf{a}\| = 10, \quad \|\mathbf{b}\| = 5, \quad \theta = \pi/4$
2. $\|\mathbf{a}\| = 6, \quad \|\mathbf{b}\| = 12, \quad \theta = \pi/6$

En los problemas 3-14, $\mathbf{a} = \langle 2, -3, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 5\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 3, 6, -1\rangle$. Encuentre el vector o el escalar indicados.

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
4. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
7. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$
8. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$
9. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$
10. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$
11. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$
12. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$
13. $\left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$
14. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{a}$
15. Determine qué pares de los siguientes vectores son ortogonales entre sí:
    a) $\langle 2, 0, 1\rangle$ *b*) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$
    c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *d*) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
    e) $\langle 1, -1, 1\rangle$ *f*) $\langle -4, 3, 8\rangle$
16. Determine un escalar c de manera que los vectores proporcionados sean ortogonales entre sí.
    a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
    b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c\rangle$
17. Encuentre un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1\rangle$ que sea ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1\rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2\rangle$.
18. Un rombo es un paralelogramo de ángulos oblicuos que tiene sus cuatro lados iguales. Utilice el producto escalar para mostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.
19. Verifique que el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}$$

es ortogonal al vector **a**.

20. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea de 45°.

En los problemas 21-24, encuentre el ángulo θ comprendido entre los vectores proporcionados.

21. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
22. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
23. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4\rangle$
24. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector proporcionado.

25. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
26. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
27. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3}\rangle$
28. $\mathbf{a} = \langle 5, 7, 2\rangle$
29. Encuentre el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ del cubo mostrado en la figura 1.40 y la arista AB. Determine el ángulo entre la diagonal AD del cubo y la diagonal $\overrightarrow{AC}$.

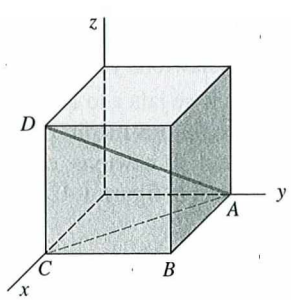


Figura 1.40 Diagonal del problema 29

30. Muestre que si los vectores no nulos **a** y **b** son ortogonales, entonces sus cosenos directores satisfacen

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

31. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 km al sur y 7 km al este de un aeropuerto. Véase la figura 1.41. Encuentre los ángulos directores del avión.

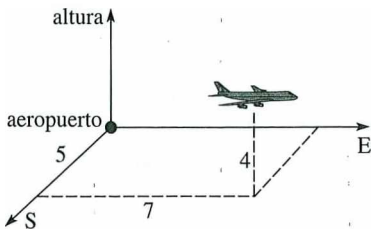


Figura 1.41 Avión del problema 31

32. Obtenga un vector unitario cuyos ángulos directores sean iguales con respecto a los tres ejes coordenados.

En los problemas 33-36, $\mathbf{a} = \langle 1, -1, 3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 6, 3\rangle$. Encuentre el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$
34. $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$
35. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$
36. $\text{comp}_{2\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los problemas 37 y 38, encuentre la componente del vector proporcionado en la dirección del origen al punto indicado.

37. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $P(3, 10)$
38. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1\rangle$, $P(1, -1, 1)$

En los problemas 39-42, encuentre la $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$.

39. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
40. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
41. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
42. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1\rangle$

En los problemas 43 y 44, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Encuentre el vector indicado.

43. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}\mathbf{a}$
44. $\text{proy}_{(\mathbf{a}-\mathbf{b})}\mathbf{b}$
45. Un trineo se jala horizontalmente sobre hielo con una cuerda atada a su parte frontal. El trineo se mueve 100 pies gracias a una fuerza de 20 libras que actúa en un ángulo de 60° con respecto a la horizontal. Encuentre el trabajo realizado.
46. Encuentre el trabajo realizado si el punto en el que la fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ se aplica a un objeto y éste se mueve de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Considere que $\|\mathbf{F}\|$ se mide en newtons y $\|\mathbf{d}\|$ en metros.
47. Un bloque de peso $\mathbf{w}$ se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza constante $\mathbf{F}$, de magnitud 30 newtons, en la dirección dada por el vector $\mathbf{d}$. Véase la figura 1.42. Considere que $\|\mathbf{d}\|$ se mide en metros.

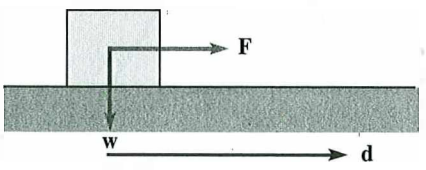


Figura 1.42 Bloque del problema 47

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso $\mathbf{w}$?

b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}$ si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

48. Una fuerza constante $\mathbf{F}$ de magnitud 3 lb se aplica al bloque mostrado en la figura 1.43. $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo realizado en la dirección del movimiento, si el bloque se mueve desde $P_1(3, 1)$ hasta $P_2(9, 3)$. Considere que la distancia se mide en pies.

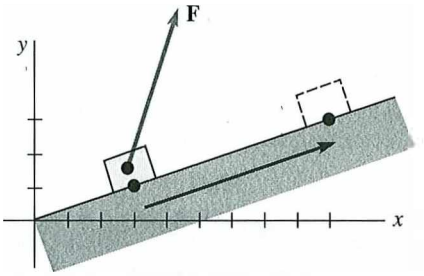


Figura 1.43 Bloque del problema 48

49. En la molécula de metano CH_4, los átomos de hidrógeno se localizan en los cuatro vértices de un tetraedro regular. Véase la figura 1.44. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro de un átomo de carbono es de 1.10 angstroms (1 angstrom = 10^{-10} m), y el ángulo de unión hidrógeno-carbono-hidrógeno es de $\theta = 109.5°$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, encuentre la distancia entre dos átomos de hidrógeno.

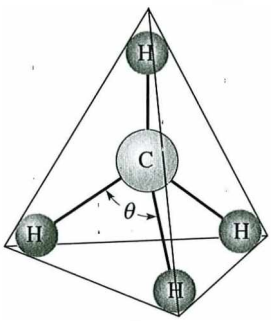


Figura 1.44 Molécula del problema 49

50. Utilice el producto escalar para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$.
51. Utilice el producto escalar para demostrar la desigualdad triangular $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$. [*Sugerencia:* Considere la propiedad *vi*) del producto escalar.]
52. Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la línea cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. [*Sugerencia:* Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos diferentes sobre la línea.]
53. Utilice el resultado del problema 52 y la figura 1.45 para mostrar que la distancia d desde un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una línea $ax + by + c = 0$ es $d = |ax_1 + by_1 + c| / \sqrt{a^2 + b^2}$.

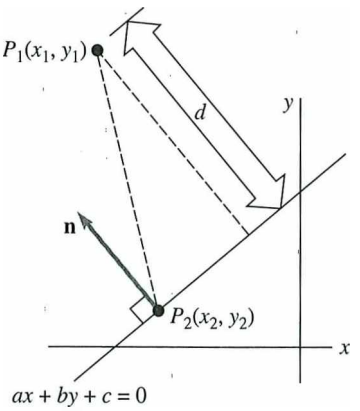


Figura 1.45 Distancia d en el problema 53

1.4 Producto vectorial

Introducción En contraste con el producto escalar, que es un escalar o un número, el siguiente producto especial de dos vectores **a** y **b** es otro vector que se denomina **producto vectorial** o **producto cruz**.

Una definición El producto vectorial de los vectores **a** y **b** se denota por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

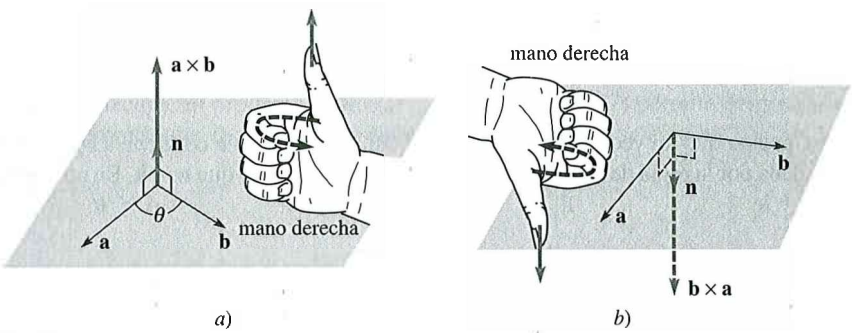
DEFINICIÓN 1.4 Producto vectorial de dos vectores

El **producto vectorial** de dos vectores **a** y **b** en R^3 es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \operatorname{sen} \theta)\mathbf{n}, \tag{1}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores de forma que $0 \leq \theta \leq \pi$ y **n** es un vector unitario perpendicular al plano que forman **a** y **b**, cuya dirección está dada por la regla de la mano derecha.

Como se observa en la figura 1.46*a*), si los dedos de la mano derecha apuntan a lo largo del vector **a** y entonces se doblan hacia el vector **b**, el dedo pulgar proporciona la dirección de **n** y, por lo tanto, de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. En la figura 1.46*b*) la regla de la mano derecha muestra la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.



a) *b)*

Figura 1.46 Regla de la mano derecha.

Ejemplo 1 El torque como producto vectorial

En física se dice que una fuerza **F** que actúa sobre el extremo de un vector posición **r**, como se muestra en la figura 1.47, produce un **torque** τ definido por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por ejemplo, si $\|\mathbf{F}\| = 20$ N, $\|\mathbf{r}\| = 3.5$ m y $\theta = 30°$, entonces a partir de (1) $\|\tau\| = (3.5)(20)\operatorname{sen} 30° = 35$ N-m. Si **F** y **r** están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de τ es perpendicular a la página y hacia afuera (hacia el lector).

Como se muestra en la figura 1.48, cuando se aplica una fuerza **F** a una llave inglesa, la magnitud del torque τ es una medida del efecto de giro alrededor del punto pivote P y el vector τ se dirige a lo largo del eje del tornillo. En este caso τ apunta hacia adentro de la página. ❑

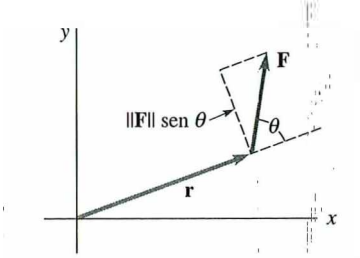


Figura 1.47 Vectores del ejemplo 1

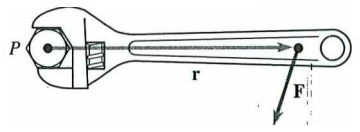


Figura 1.48 Vectores del ejemplo 1

Propiedades El producto vectorial tiene las siguientes propiedades.

Propiedades del producto vectorial

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$

iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (leyes distributivas)

v) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, k es un escalar

vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

vii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

viii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

La propiedad *vi*) viene de (1), puesto que $\theta = 0$. Las propiedades *vii*) y *viii*) son simplemente enunciados que se infieren de que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La propiedad *ii*) debería ser intuitivamente clara a partir de la figura 1.46.

■ **Vectores paralelos** Cuando el ángulo entre dos vectores no nulos es $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, entonces sen $\theta = 0$, por lo que se debe cumplir que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Esto se plantea formalmente en el siguiente teorema.

TEOREMA 7.2 Criterio para vectores paralelos

Dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son **paralelos** si, y sólo si, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Ejemplo 2 Vectores paralelos

a) A partir de la propiedad *vi*) se tiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

b) Si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = -3\mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos. Por lo tanto, a partir del teorema 1.2, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Obsérvese que este resultado también se obtiene combinando las propiedades *v*) y *vi*). ❑

De (1), si $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\|\mathbf{i}\| \, \|\mathbf{j}\| \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \mathbf{n} = \mathbf{n}. \tag{3}$$

Pero, puesto que un vector unitario perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$, con dirección dada por la regla de la mano derecha, es $\mathbf{k}$, se tiene de (3) que $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. En otras palabras: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

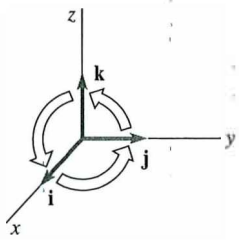


Figura 1.49 Nemotecnia del ejemplo 3

Ejemplo 3 Nemotecnia

Los productos vectoriales de cualquier par de vectores en el conjunto $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ pueden obtenerse utilizando la nemotecnia circular ilustrada en la figura 1.49, esto es,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}\right\} \text{ y a partir de la propiedad } ii) \quad \begin{cases} \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{cases} \tag{4}$$ ❑

■ **Definición alterna del producto vectorial** Al igual que con el producto escalar, se puede utilizar la ley distributiva *iii*) para llegar a una formulación alterna del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1\mathbf{i} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &\quad + a_3\mathbf{k} \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_1b_1(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_1b_3(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_2b_1(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_2b_2(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_2b_3(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + a_3b_1(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_3b_2(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_3b_3(\mathbf{k} \times \mathbf{k}). \end{aligned} \tag{5}$$

De los resultados en (2) y (4), (5) se simplifica en

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{6}$$

Se observa que las componentes del vector en (6) pueden escribirse como determinantes de orden 2:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{7}$$

A su vez, (7) se escribe como un determinante de orden 3:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

La expresión del lado derecho en (8) no es un determinante real, puesto que no todos sus valores son escalares; (8) es simplemente una manera de recordar la complicada expresión (6).

Ejemplo 4 Producto vectorial

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución A partir de (8) se tiene

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

❑

La formulación del producto vectorial proporcionada en (7) permite demostrar algunas de las propiedades *i*)-*viii*). Por ejemplo, para demostrar *ii*) se escribe

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

La demostración de la propiedad *iii*) se deja como ejercicio.

■ **Productos especiales** El llamado **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c** es $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Entonces,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right]$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Así, se observa que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Además se tiene, de las propiedades de los determinantes, que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

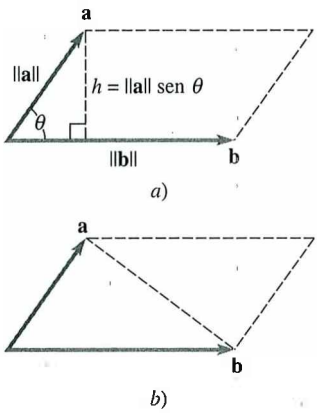


Figura 1.50 Área de un paralelogramo en *a*); área de un triángulo en *b*)

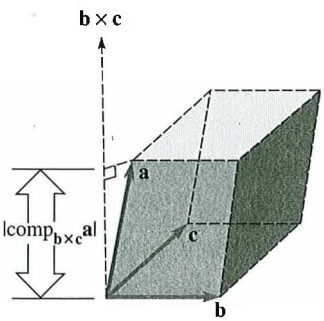


Figura 1.51 Volumen de un paralelepípedo

El **triple producto vectorial** de los vectores **a**, **b** y **c** es $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Se deja como ejercicio demostrar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{10}$$

■ **Áreas y volumen** Dos vectores no nulos y no paralelos **a** y **b** pueden considerarse los lados de un paralelogramo. El **área *A* de un paralelogramo** es A = (base)(altura). De la figura 1.50*a*), se observa que $A = \|\mathbf{b}\|(\|\mathbf{a}\| \text{ sen } \theta) = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \text{ sen } \theta$

o
$$A = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \tag{11}$$

Al igual que en la figura 1.50*b*), se observa que el **área de un triángulo** de lados **a** y **b** es

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|. \tag{12}$$

De manera semejante, si los vectores **a**, **b** y **c** no se hallan sobre el mismo plano, entonces el **volumen del paralelepípedo** con aristas **a**, **b** y **c** que se muestran en la figura 1.51 es

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \, |\text{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}| \\ &= \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \left| \mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|} \mathbf{b} \times \mathbf{c} \right) \right| \end{aligned}$$

o
$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|. \tag{13}$$

Debido a este último resultado, al triple producto escalar también se le conoce como el **producto caja** de **a**, **b** y **c**.

Ejemplo 5 Área de un triángulo.

Halle el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ pueden tomarse como dos lados del triángulo. Como $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}. \end{aligned}$$

De (12) se observa que el área es

$$A = \frac{1}{2}\|-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\| = \frac{3}{2}\sqrt{10} \text{ unidades cuadradas} \qquad \square$$

■ **Vectores coplanares** Cuando los vectores se hallan en el mismo plano se dice que son **coplanares**. Se acaba de ver que si los vectores **a**, **b** y **c** no son coplanares, entonces necesariamente $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$, ya que el volumen de un paralelepípedo con aristas **a**, **b** y **c** tiene volumen diferente de cero. En forma equivalente, esto significa que si $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, entonces los vectores **a**, **b** y **c** son coplanares. Como la proposición opuesta también es cierta, se tiene que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad \textit{si, y sólo si,} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \textit{ y } \mathbf{c} \textit{ son coplanares.}$$

Comentarios

Al trabajar con vectores, se debe tener cuidado de no mezclar los símbolos $\cdot$ y $\times$ con los símbolos para la multiplicación ordinaria, y ser especialmente cuidadosos en el uso, o ausencia, de paréntesis. Por ejemplo, expresiones como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}$$

no están bien definidas o carecen de significado.

EJERCICIOS 1.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1-10, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$
3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4\rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3\rangle$
5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0\rangle$
8. $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$
9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6\rangle$
10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10\rangle$

En los problemas 11 y 12, encuentre $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$
12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los problemas 13 y 14, encuentre un vector que sea perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
14. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$

En los problemas 15 y 16, verifique que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ y que $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

15. $\mathbf{a} = \langle 5, -2, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -7\rangle$
16. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

En los problemas 17 y 18, *a*) calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ a continuación, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. *b*) Verifique los resultados de la parte *a*) por medio de (10) de esta sección.

17. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los problemas 19-36, encuentre el vector o el escalar indicados *sin* usar (8), (9) o (10).

19. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
20. $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$
21. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$
22. $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
23. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$
24. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$
25. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$
26. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
27. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$
28. $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$
29. $\|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})\|$
30. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$
31. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
32. $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$
33. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$
34. $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$
35. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$
36. $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los problemas 37-44, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre el vector o el escalar indicados.

37. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$
38. $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
39. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$
40. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$
41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
42. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
43. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
44. $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los problemas 45 y 46, *a*) verifique que el cuadrilátero proporcionado sea un paralelogramo, y *b*) encuentre el área del paralelogramo.

45.

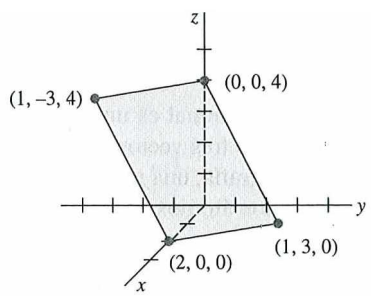


Figura 1.52 Paralelogramo del problema 45

46.

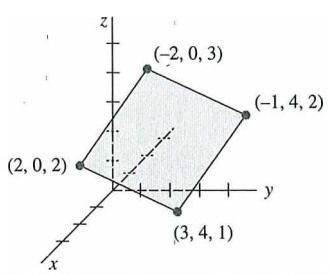


Figura 1.53 Paralelogramo del problema 46

En los problemas 47-50, halle el área del triángulo determinado por los puntos proporcionados.

47. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 1)$, $P_3(1, 1, 2)$
48. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(2, 2, 0)$
49. $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(-1, -1, 2)$
50. $P_1(1, 0, 3)$, $P_2(0, 0, 6)$, $P_3(2, 4, 5)$

En los problemas 51 y 52, encuentre el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores proporcionados son tres aristas.

51. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
52. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
53. Determine si los vectores $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ son coplanares.

54. Determine si los cuatro puntos $P_1(1, 1, -2)$, $P_2(4, 0, -3)$, $P_3(1, -5, 10)$ y $P_4(-7, 2, 4)$ se encuentran en el mismo plano.

55. Como se muestra en la figura 1.54, el vector **a** se halla en el plano xy y el vector **b**, a lo largo del eje z positivo. Sus magnitudes son $\|\mathbf{a}\| = 6.4$ y $\|\mathbf{b}\| = 5$.

a) Utilice la definición 1.4 para encontrar $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$.

b) Utilice la regla de la mano derecha para encontrar la dirección $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

c) Utilice la parte *b*) para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en función de los vectores unitarios **i**, **j**, **k**.

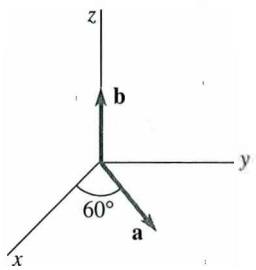


Figura 1.54 Vectores para el problema 55

56. Dos vectores **a** y **b** se encuentran en el plano xz de forma que el ángulo entre ellos es de 120°. Si $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{27}$ y $\|\mathbf{b}\| = 8$, encuentre todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

57. Una malla tridimensional es una colección de combinaciones enteras de tres vectores base no coplanares **a**, **b** y **c**. En cristalografía, una malla puede especificar las ubicaciones de los átomos en un cristal. Los estudios de difracción con rayos X de cristales utilizan la "malla recíproca", que tiene como base

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})} \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

a) Una determinada malla tiene vectores base $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Encuentre los vectores base para la malla recíproca.

b) La celda unitaria de la malla recíproca es el paralelepípedo con aristas **A**, **B** y **C**, mientras que la celda unitaria de la malla original es el paralelepípedo con aristas **a**, **b** y **c**. Muestre que el volumen de la celda unitaria de la malla recíproca es el recíproco del volumen de la celda unitaria de la malla original. [*Sugerencia:* Comience con $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y utilice (10).]

58. Utilice (7) para demostrar la propiedad *iii*) del producto vectorial.

59. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

60. Demuestre o refute $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

61. Demuestre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

62. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

63. Demuestre la **identidad de Lagrange**:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

64. ¿$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ implica que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?

65. Muestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 2\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

1.5 Líneas y planos en el espacio 3D

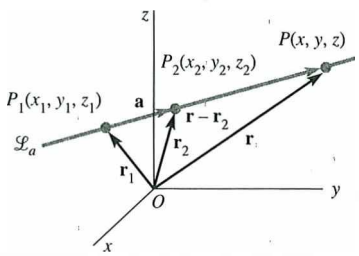


Figura 1.55 Línea que pasa por diferentes puntos en el espacio 3D

■ **Introducción** En esta sección se analiza cómo encontrar diversas ecuaciones de líneas y planos en el espacio 3D.

■ **Líneas: ecuación vectorial** Al igual que en el plano, dos puntos distintos cualesquiera del espacio 3D determinan una única línea entre ellos. Para encontrar una ecuación de la línea que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, se considera que $P(x, y, z)$ es *cualquier* punto sobre la línea. En la figura 1.55, si de $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ y $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, se observa que el vector $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Así,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{1}$$

Si se escribe

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \tag{2}$$

entonces (1) implica que una **ecuación vectorial** para la línea $\mathcal{L}_a$ es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}.$$

El vector **a** se denomina un **vector director** de la línea.

Puesto que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ es también paralelo a $\mathcal{L}_a$, una ecuación vectorial alternativa para la línea es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$. Desde luego, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(-\mathbf{a})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(k\mathbf{a})$, siendo k un escalar diferente de cero, son también ecuaciones para $\mathcal{L}_a$.

Formulación alternativa de la ecuación vectorial.

Ejemplo 1 Ecuación vectorial de una línea

Encuentre una ecuación vectorial para la línea que pasa por (2, −1, 8) y (5, 6, −3).

Solución Defina $\mathbf{a} = \langle 2 - 5, -1 - 6, 8 - (-3)\rangle = \langle -3, -7, 11\rangle$. Las siguientes tres son posibles ecuaciones vectoriales para la línea:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 8\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{3}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle \tag{4}$$

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle. \tag{5}$$ ❑

■ **Ecuaciones paramétricas** Si se escribe (2) como

$$\begin{aligned}\langle x, y, z\rangle &= \langle x_2 + t(x_2 - x_1), y_2 + t(y_2 - y_1), z_2 + t(z_2 - z_1)\rangle \\ &= \langle x_2 + a_1 t, y_2 + a_2 t, z_2 + a_3 t\rangle\end{aligned}$$

e igualando componentes, se obtiene

$$x = x_2 + a_1 t, \quad y = y_2 + a_2 t, \quad z = z_2 + a_3 t. \tag{6}$$

Las ecuaciones en (6) se denominan **ecuaciones paramétricas** para la línea que pasa por P_1 y P_2. Al incrementar el parámetro t desde $-\infty$ hasta ∞, puede pensarse que el punto $P(x, y, z)$ traza la línea completa. Si el parámetro t se restringe a un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, entonces $P(x, y, z)$ traza un **segmento de línea** que comienza en el punto correspondiente a t_0 y finaliza en el punto correspondiente a t_1. Por ejemplo, en la figura 1.55, si $-1 \leq t \leq 0$, entonces $P(x, y, z)$ traza el segmento de línea que comienza en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y finaliza en $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Ejemplo 2 Ecuaciones paramétricas de una línea

Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea del ejemplo 1.

Solución A partir de (3), se tiene que

$$x = 2 - 3t, \quad y = -1 - 7t, \quad z = 8 + 11t. \tag{7}$$

Un conjunto alterno de ecuaciones paramétricas se obtiene a partir de (5):

$$x = 5 + 3t, \quad y = 6 + 7t, \quad z = -3 - 11t. \tag{8}$$ ❑

Note que el valor $t = 0$ en (7) resulta en $(2, -1, 8)$, mientras que $t = -1$ debe utilizarse en (8), para obtener el mismo punto.

Ejemplo 3 Vector paralelo a una línea

Encuentre un vector $\mathbf{a}$ que sea paralelo a la línea $\mathcal{L}_a$ cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 4 + 9t$, $y = -14 + 5t$, $z = 1 - 3t$.

Solución Los coeficientes (o un múltiplo constante diferente de cero de los coeficientes) del parámetro en cada ecuación son las componentes de un vector paralelo a la línea. Así, $\mathbf{a} = 9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathcal{L}_a$ y, por lo tanto, es un vector director de la línea. ❑

■ **Ecuaciones simétricas** A partir de (6), se observa que es posible eliminar el parámetro si se escribe

$$t = \frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3}$$

siempre y cuando los tres números a_1, a_2 y a_3 no sean nulos. Se dice que las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_2}{a_1} = \frac{y - y_2}{a_2} = \frac{z - z_2}{a_3} \tag{9}$$

son **ecuaciones simétricas** para la línea que pasa por P_1 y P_2.

Ejemplo 4 Ecuaciones simétricas de una línea

Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por (4, 10, –6) y (7, 9, 2).

Solución Defina $a_1 = 7 - 4 = 3$, $a_2 = 9 - 10 = -1$ y $a_3 = 2 - (-6) = 8$. A partir de (9) se obtienen ecuaciones simétricas para la línea

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y-9}{-1} = \frac{z-2}{8}.$$ ❑

Si uno de los números a_1, a_2 o a_3 es cero en (6), se utilizan las dos ecuaciones restantes para eliminar el parámetro t. Por ejemplo, si $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, entonces (6) conduce a

$$x = x_2 \quad \text{y} \quad t = \frac{y-y_2}{a_2} = \frac{z-z_2}{a_3}.$$

En este caso,
$$x = x_2, \quad \frac{y-y_2}{a_2} = \frac{z-z_2}{a_3}$$

son ecuaciones simétricas para la línea.

Ejemplo 5 Ecuaciones simétricas de una línea

Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por (5, 3, 1) y (2, 1, 1).

Solución Defina $a_1 = 5 - 2 = 3$, $a_2 = 3 - 1 = 2$ y $a_3 = 1 - 1 = 0$. De la explicación anterior, se tiene que las siguientes ecuaciones son simétricas para la línea

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{2}, \quad z = 1.$$

En otras palabras, las ecuaciones simétricas describen una línea en el plano $z = 1$. ❑

Una línea en el espacio también se determina especificando un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y un vector director no nulo **a**. Por el punto P_1, únicamente pasa una línea $\mathcal{L}_a$ paralela al vector dado. Si $P(x, y, z)$ es un punto sobre la línea $\mathcal{L}_a$, mostrada en la figura 1.56, entonces, como antes,

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = t\mathbf{a} \quad \text{o} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}.$$

Ejemplo 6 Línea paralela a un vector

Escriba ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas para la línea que pasa por (4, 6, –3) y es paralela a $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Con $a_1 = 5$, $a_2 = -10$ y $a_3 = 2$ se tiene inmediatamente

Vectoriales: $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -3\rangle + t\langle 5, -10, 2\rangle$

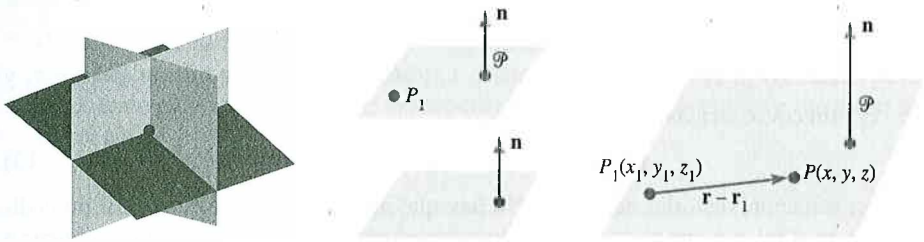
Paramétricas: $x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t$

Simétricas: $$\frac{x-4}{5} = \frac{y-6}{-10} = \frac{z+3}{2}.$$ ❑

■ **Planos: ecuación vectorial** En la figura 1.57*a*) se ilustra que a través de un punto dado $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pasan un número infinito de planos. Sin embargo, como se muestra en la figura 1.57*b*), si se especifican un punto P_1 y un vector **n**, únicamente existe *un* plano $\mathcal{P}$ que contiene a P_1 con **n normal**, o perpendicular, al plano. Es más, si $P(x, y, z)$ es

cualquier punto sobre $\mathcal{P}$, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, entonces, como se muestra en la figura 1.57*c*), $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ está en el plano. De esto se deduce que la **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0. \tag{10}$$



a) *b)* *c)*

Figura 1.57 Vector **n** perpendicular a un plano

■ **Ecuación cartesiana** Específicamente, si el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces (10) conduce a la **ecuación cartesiana** del plano que contiene a $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0. \tag{11}$$

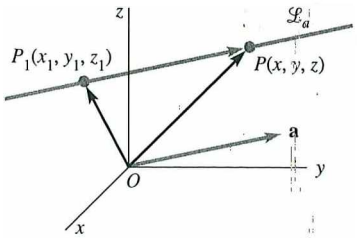


Figura 1.56 Línea determinada por un punto *P* y un vector **a**

Ejemplo 7 Plano perpendicular a un vector

Encuentre una ecuación del plano que contiene al punto (4, –1, 3) y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución De (11) se obtiene inmediatamente que la ecuación es

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0. \qquad \square$$

La ecuación (11) puede escribirse en todo caso como $ax + by + cz + d = 0$ utilizando la siguiente igualdad $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$. Inversamente, se demuestra a continuación que cualquier ecuación lineal de la forma

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{donde } a, b, c \text{ no sean ceros al mismo tiempo} \tag{12}$$

es un plano.

TEOREMA 1.3 Plano con vector normal

La gráfica de cualquier ecuación del tipo $ax + by + cz + d = 0$, en la que a, b y c no son iguales a cero simultáneamente, es un plano cuyo vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Demostración Supóngase que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación dada. Entonces, $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ que implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Reemplazando este último valor de d en la ecuación original se obtiene, tras simplificar, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, o, en términos vectoriales,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta última ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) y al vector $(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. $\square$

Ejemplo 8 Vector normal a un plano

Un vector normal al plano $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ es $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. $\square$

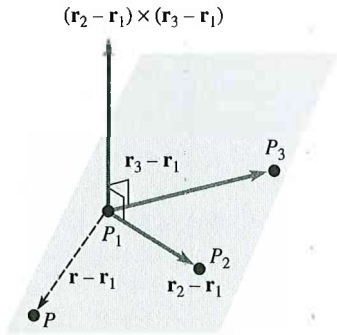


Figura 1.58 Los vectores $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ están en un plano, y su producto vectorial es normal al mismo plano

Desde luego, cualquier múltiplo escalar no nulo de un vector normal es también perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 también determinan un plano.* Para obtener una ecuación del plano, únicamente se necesita formar dos vectores entre dos pares de puntos. Como se muestra en la figura 1.58, su producto vectorial es un vector normal al plano que los contiene. Si $P(x, y, z)$ representa algún punto del plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP_3}$, entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (está en el plano, lo mismo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$). En consecuencia,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \qquad (13)$$

es una ecuación vectorial del plano. No hay que memorizar esta fórmula. El procedimiento es el mismo que el de (10), excepto que el vector $\mathbf{n}$ normal al plano se obtiene a través del producto vectorial.

Ejemplo 9 Tres puntos que determinan un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, 0, -1)$, $(3, 1, 4)$ y $(2, -2, 0)$.

Solución Se necesitan tres vectores. Emparejando los puntos como se muestra a la izquierda conduce a los vectores de la derecha; el orden en el que se resten entre sí es irrelevante.

$$\left.\begin{matrix}(1, 0, -1)\\ (3, 1, 4)\end{matrix}\right\}\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \quad \left.\begin{matrix}(3, 1, 4)\\ (2, -2, 0)\end{matrix}\right\}\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \left.\begin{matrix}(2, -2, 0)\\ (x, y, z)\end{matrix}\right\}\mathbf{w} = (x - 2)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Ahora,
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

es un vector normal al plano que contiene los puntos dados. Por consiguiente, una ecuación vectorial del plano es $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, la cual lleva a

$$-11(x - 2) - 3(y + 2) + 5z = 0 \quad \text{o} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0. \qquad \square$$

Gráficas La gráfica de (12) con una o incluso dos variables faltantes también es un plano. Por ejemplo, en la sección 1.2 se indica que las gráficas de

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,$$

donde x_0, y_0, z_0 son constantes, representan planos perpendiculares a los ejes x, y, z, respectivamente. En general, para graficar un plano, se debe tratar de encontrar

i) las intersecciones x, y, z y, si es necesario,

ii) la traza del plano sobre cada plano coordenado.

Una **traza** de un plano sobre un plano coordenado es la línea de intersección del plano con el plano coordenado.

Ejemplo 10 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Si se establece que: $y = 0,\ z = 0$ se obtiene $x = 9$
$x = 0,\ z = 0$ se obtiene $y = 6$
$x = 0,\ y = 0$ se obtiene $z = 3$.

Las intersecciones x, y y z son 9, 6 y 3, respectivamente. Como se muestra en la figura 1.59, se utilizan los puntos (9, 0, 0), (0, 6, 0) y (0, 0, 3) para dibujar la gráfica del plano en el primer octante. $\square$

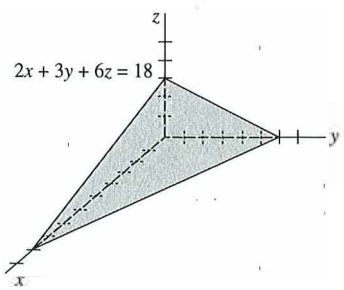


Figura 1.59 Plano del ejemplo 10

*Cuando alguien se sienta a una mesa de cuatro patas que se balancea, se pregunta si vale la pena reemplazarla por una mesa de tres patas.

Ejemplo 11 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones, la gráfica de la ecuación es una línea que se interseca en $x = 2$ y en $y = 3$. Sin embargo, en tres dimensiones, esta línea es la traza de un plano sobre el plano coordenado xy. Como z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto sobre el plano siempre y cuando x y y se relacionen con la ecuación proporcionada. Como se muestra en la figura 1.60, la gráfica es un plano paralelo al eje z. ❑

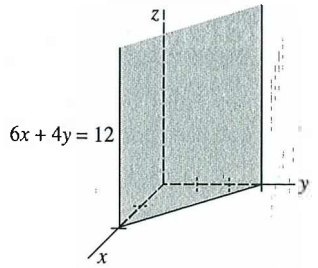


Figura 1.60 Plano del ejemplo 11

Ejemplo 12 Gráfica de un plano

Grafique la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Obsérvese en primer lugar que el plano pasa por el origen (0, 0, 0). Ahora, la traza del plano sobre el plano xz ($y = 0$) es $z = x$, mientras que su traza sobre el plano yz ($x = 0$) es $z = y$. Dibujando estas dos líneas, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 1.61. ❑

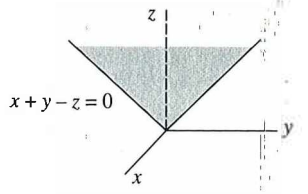


Figura 1.61 Plano del ejemplo 12

Dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que no son paralelos deben intersecarse en una línea $\mathcal{L}$. Véase la figura 1.62. El ejemplo 13 ilustra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas para la línea de intersección. En el ejemplo 14 se observa cómo encontrar un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) de un plano $\mathcal{P}$ y una línea $\mathcal{L}$. Véase la figura 1.63.

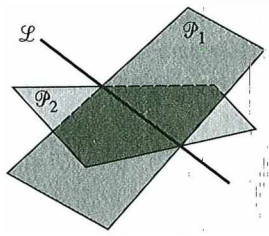


Figura 1.62 Los planos se intersecan en una línea

Ejemplo 13 Línea de intersección de dos planos

Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de

$$2x - 3y + 4z = 1$$
$$x - y - z = 5.$$

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se elige arbitrariamente una variable, por ejemplo, $z = t$, y se resuelve para x y y a partir de

$$2x - 3y = 1 - 4t$$
$$x - y = 5 + t.$$

Al realizar esto, se encuentra que $x = 14 + 7t$, $y = 9 + 6t$, $z = t$. Éstas son ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de los planos dados. ❑

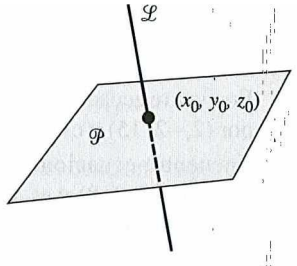


Figura 1.63 Punto de intersección entre un plano y una línea

Ejemplo 14 Punto de intersección de una línea con un plano

Encuentre el punto de intersección del plano $3x - 2y + z = -5$ y la línea $x = 1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4t$.

Solución Si (x_0, y_0, z_0) denota el punto de intersección, entonces se debe tener $3x_0 - 2y_0 + z_0 = -5$ y $x_0 = 1 + t_0$, $y_0 = -2 + 2t_0$, $z_0 = 4t_0$, para cualquier número t_0. Sustituyendo estas últimas ecuaciones en la ecuación del plano se tiene

$$3(1 + t_0) - 2(-2 + 2t_0) + 4t_0 = -5 \quad \text{o} \quad t_0 = -4.$$

De las ecuaciones paramétricas para la línea, se obtiene entonces $x_0 = -3$, $y_0 = -10$ y $z_0 = -16$. El punto de intersección es $(-3, -10, -16)$. ❑

EJERCICIOS 1.5 Las respuestas a los problemas impares selceccionados comienzan en la página RESP-2.

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación vectorial para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

1. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$
2. $(0, 4, 5), (-2, 6, 3)$
3. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$
4. $(10, 2, -10), (5, -3, 5)$
5. $(1, 1, -1), (-4, 1, -1)$
6. $(3, 2, 1), (\frac{5}{2}, 1, -2)$

En los problemas 7-12, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

7. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$
8. $(2, 0, 0), (0, 4, 9)$
9. $(1, 0, 0), (3, -2, -7)$
10. $(0, 0, 5), (-2, 4, 0)$
11. $(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), (-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$
12. $(-3, 7, 9), (4, -8, -1)$

En los problemas 13-18, encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por los puntos proporcionados.

13. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$
14. $(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}), (1, 3, \frac{1}{4})$
15. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$
16. $(-5, -2, -4), (1, 1, 2)$
17. $(5, 10, -2), (5, 1, -14)$
18. $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10})$

En los problemas 19-22, encuentre ecuaciones paramétricas y simétricas para la línea que pasa por el punto dado y es paralela al vector proporcionado.

19. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{a} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$
20. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
21. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
22. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{a} = \langle 12, -5, -6 \rangle$
23. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(6, 4, -2)$ y es paralela a la línea $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.
24. Encuentre ecuaciones simétricas para la línea que pasa por $(4, -11, -7)$ y es paralela a la línea $x = 2 + 5t$, $y = -1 + \frac{1}{3}t$, $z = 9 - 2t$.
25. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(2, -2, 15)$ y es paralela al plano xz y al plano xy.
26. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por $(1, 2, 8)$ y es *a*) paralela al eje y y *b*) perpendicular al plano xy.
27. Muestre que las líneas dadas por $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6 \rangle + t\langle -3, -3, -3 \rangle$ son las mismas.
28. Sean $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ líneas con vectores directores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente. $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ son ortogonales si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, y paralelas si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelas. Determine cuáles de las siguientes líneas son ortogonales y cuáles paralelas.
    a) $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2 \rangle + t\langle 9, -12, 6 \rangle$
    b) $x = 1 + 9t$, $y = 12t$, $z = 2 - 6t$
    c) $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 4t$
    d) $x = 5 + t$, $y = 4t$, $z = 3 + \frac{5}{2}t$
    e) $x = 1 + t$, $y = \frac{3}{2}t$, $z = 2 - \frac{3}{2}t$
    f) $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 6}{4} = \dfrac{z - 3}{-2}$

En los problemas 29 y 30, determine los puntos de intersección de la línea proporcionada con los tres planos coordenados.

29. $x = 4 - 2t$, $y = 1 + 2t$, $z = 9 + 3t$
30. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 2}{3} = \dfrac{z - 4}{2}$

En los problemas 31-34, determine si las líneas proporcionadas se intersecan. Si es así, encuentre el punto de intersección.

31. $x = 4 + t$, $y = 5 + t$, $z = -1 + 2t$
    $x = 6 + 2s$, $y = 11 + 4s$, $z = -3 + s$
32. $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3t$
    $x = 2 - s$, $y = 1 + s$, $z = 6s$
33. $x = 2 - t$, $y = 3 + t$, $z = 1 + t$
    $x = 4 + s$, $y = 1 + s$, $z = 1 - s$
34. $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 8 + 2t$
    $x = 2 + 2s$, $y = -2 + 3s$, $z = -2 + 8s$

El ángulo entre dos líneas $\mathcal{L}_a$ y $\mathcal{L}_b$ es el ángulo entre sus vectores directores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. En los problemas 35 y 36, encuentre el ángulo comprendido entre las líneas proporcionadas.

35. $x = 4 - t$, $y = 3 + 2t$, $z = -2t$
    $x = 5 + 2s$, $y = 1 + 3s$, $z = 5 - 6s$
36. $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y + 5}{7} = \dfrac{z - 1}{-1}$; $\dfrac{x + 3}{-2} = y - 9 = \dfrac{z}{4}$

En los problemas 37 y 38, las líneas proporcionadas se hallan sobre el mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto indicado y es perpendicular a dicho plano.

37. $x = 3 + t$, $y = -2 + t$, $z = 9 + t$
    $x = 1 - 2s$, $y = 5 + s$, $z = -2 - 5s$; $(4, 1, 6)$
38. $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z}{4}$
    $\dfrac{x + 4}{6} = \dfrac{y - 6}{4} = \dfrac{z - 10}{8}$; $(1, -1, 0)$

En los problemas 39-44, encuentre una ecuación del plano que contenga el punto proporcionado y sea perpendicular al vector indicado.

39. $(5, 1, 3)$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
40. $(1, 2, 5)$; $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
41. $(6, 10, -7)$; $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
42. $(0, 0, 0)$; $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
43. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$; $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
44. $(-1, 1, 0)$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas 45-50, encuentre, si es posible, una ecuación de un plano que contenga los puntos proporcionados.

45. $(3, 5, 2), (2, 3, 1), (-1, -1, 4)$
46. $(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, -1)$
47. $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (3, 2, -1)$

48. $(0, 0, 3)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 6)$

49. $(1, 2, -1)$, $(4, 3, 1)$, $(7, 4, 3)$

50. $(2, 1, 2)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, -5)$

En los problemas 51-60, encuentre una ecuación del plano que satisfaga las condiciones dadas.

51. Que contenga a $(2, 3, -5)$ y sea paralela a $x + y - 4z = 1$

52. Que contenga al origen y sea paralela a $5x - y + z = 6$

53. Que contenga a $(3, 6, 12)$ y sea paralela al plano xy

54. Que contenga a $(-7, -5, 18)$ y sea perpendicular al eje y

55. Que contenga a las líneas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$

56. Que contenga a las líneas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, 1, -3\rangle$

57. Que contenga a las líneas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$

58. Que contenga al punto $(4, 0, -6)$ y a la línea $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$

59. Que contenga a $(2, 4, 8)$ y sea perpendicular a la línea $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$

60. Que contenga a $(1, 1, 1)$ y sea perpendicular a la línea que pasa por $(2, 6, -3)$ y $(1, 0, -2)$

61. Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ planos con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente. $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son ortogonales si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son ortogonales, y paralelos si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son paralelos. Determine cuáles de los siguientes planos son ortogonales y cuáles paralelos.

   a) $2x - y + 3z = 1$ *b*) $x + 2y + 2z = 9$

   c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$ *d*) $-5x + 2y + 4z = 0$

   e) $-8x - 8y + 12z = 1$ *f*) $-2x + y - 3z = 5$

62. Encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que contenga a $(-4, 1, 7)$ y sea perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.

63. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la línea $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.

   a) $4x + y + 2z = 1$ *b*) $2x - 3y + z = 4$

   c) $10x - 15y - 5z = 2$ *d*) $-4x + 6y + 2z = 9$

64. Determine cuáles de los siguientes planos son paralelos a la línea $(1 - x)/2 = (y + 2)/4 = z - 5$.

   a) $x - y + 3z = 1$ *b*) $6x - 3y = 1$

   c) $x - 2y + 5z = 0$ *d*) $-2x + y - 2z = 7$

En los problemas 65-68, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea de intersección de los planos dados.

65. $5x - 4y - 9z = 8$, $x + 4y + 3z = 4$

66. $x + 2y - z = 2$, $3x - y + 2z = 1$

67. $4x - 2y - z = 1$, $x + y + 2z = 1$

68. $2x - 5y + z = 0$, $y = 0$

En los problemas 69-72, encuentre el punto de intersección del plano y la línea proporcionados.

69. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$

70. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$

71. $x + y - z = 8$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 1 + t$

72. $x - 3y + 2z = 0$; $x = 4 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 5t$

En los problemas 73 y 74, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto indicado y es paralela a los planos proporcionados.

73. $x + y - 4z = 2$, $2x - y + z = 10$; $(5, 6, -12)$

74. $2x + z = 0$, $-x + 3y + z = 1$; $(-3, 5, -1)$

En los problemas 75 y 76, encuentre una ecuación del plano que contenga a la línea proporcionada y sea ortogonal al plano indicado.

75. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

76. $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los problemas 77-82, grafique la ecuación proporcionada.

77. $5x + 2y + z = 10$

78. $3x + 2z = 9$

79. $-y - 3z + 6 = 0$

80. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

81. $-x + 2y + z = 4$

82. $x - y - 1 = 0$

1.6 Espacios vectoriales

Introducción En las secciones precedentes se estuvo trabajando con puntos y vectores del espacio 2D y 3D. Los matemáticos del siglo XIX, en particular los matemáticos ingleses Arthur Cayley (1821-1895) y James Joseph Sylvester (1814-1897), así como el matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805-1865), se dieron cuenta de que los conceptos de *punto* y *vector* podrían generalizarse. Se descubrió que los vectores se podían describir, o definir, por medios analíticos más que geométricos. Esto fue un hito realmente significativo en la historia de las matemáticas. No hay necesidad de detenerse en tres dimensiones; ordenamientos en cuádruplas $\langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle$, quíntuplas $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\rangle$, y n-uplas $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ de números reales pueden tratarse como vectores, al igual que los pares ordenados $\langle a_1, a_2\rangle$ y las tripletas ordenadas $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$, en las que la única diferencia

es la pérdida de habilidad para visualizar segmentos dirigidos de línea o flechas en espacios 4D, 5D o nD.

■ **Espacio n** En términos formales, un **vector en el espacio n** es cualquier n-upla ordenada $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ de números reales llamados componentes de $\mathbf{a}$. El conjunto de todos los vectores en el espacio n se denota como R^n. Los conceptos de suma vectorial, multiplicación escalar, igualdad, etc., enlistados en la definición 1.2 se mantienen en R^n en forma natural. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$, entonces la suma y la multiplicación escalar en el espacio n se definen como

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n \rangle \quad \text{y} \quad k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, \ldots, ka_n \rangle. \tag{1}$$

El **vector cero** en R^n es $\langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle$. La noción de **longitud** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ en el espacio n es únicamente una extensión del concepto para el espacio 2D y 3D:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

La longitud de un vector también se denomina su **norma**. Un **vector unitario** es uno cuya norma es 1. Para un vector no nulo $\mathbf{a}$, al proceso de construir un vector unitario $\mathbf{u}$ multiplicando $\mathbf{a}$ por el recíproco de su norma, esto es, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a}$, se le conoce como **normalizar** a $\mathbf{a}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2, -1 \rangle$, entonces $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}$ y un vector unitario es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{15}}\mathbf{a} = \left\langle \frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{-1}{\sqrt{15}} \right\rangle.$$

El **producto interior estándar**, también conocido como el **producto interior euclidiano** o **producto escalar** o **producto punto** de dos vectores n $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ es el número real definido por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \cdot \langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n. \tag{2}$$

Se dice que los dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en R^n son **ortogonales** si, y sólo si, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Por ejemplo, $\mathbf{a} = \langle 3, 4, 1, -6 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, \frac{1}{2}, 1, 1 \rangle$ son ortogonales en R^4 puesto que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = 0$.

■ **Espacio vectorial** Incluso, es factible ir más allá de la noción de un vector como una n upla ordenada en R^n. Un vector puede definirse como cualquier cosa que se quiera: una n upla ordenada, un número, un arreglo de números o incluso una función. Empero, se está particularmente interesado en vectores que sean elementos de un conjunto especial llamado **espacio vectorial**. Existen dos tipos de objetos fundamentales para la noción de espacio vectorial: los **vectores** y los **escalares**, así como dos operaciones algebraicas análogas a las proporcionadas en (1). Para un conjunto de vectores se desea poder sumar dos vectores en este conjunto y obtener otro vector del mismo conjunto; de igual manera, se desea poder multiplicar un vector por un escalar y obtener otro vector del mismo conjunto. Para determinar si un conjunto de objetos es un espacio vectorial se debe verificar que el conjunto posea estas dos operaciones algebraicas junto con otras propiedades. Estas propiedades, los *axiomas* de un espacio vectorial, se indican a continuación.

DEFINICIÓN 1.5 Espacio vectorial

Sea V un conjunto de elementos sobre el cual se definen dos operaciones llamadas **suma vectorial** y **multiplicación escalar**. Entonces, se dice que V es un **espacio vectorial** si se satisfacen las siguientes diez propiedades.

Axiomas para la suma vectorial:

i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ se encuentran en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en V.

ii) Para todos los $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. (ley conmutativa)

iii) Para todos los $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ en V, $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$. (ley asociativa)

iv) Existe un vector único $\mathbf{0}$ en V tal que
$\mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. (vector cero)

v) Para cada $\mathbf{x}$ en V, existe un vector $-\mathbf{x}$ tal que
$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$. (negativo de un vector)

Axiomas para la multiplicación escalar:

vi) Si k es cualquier escalar y $\mathbf{x}$ está en V, entonces $k\mathbf{x}$ está en V.

vii) $k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}$ (ley distributiva)

viii) $(k_1 + k_2)\mathbf{x} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}$ (ley distributiva)

ix) $k_1(k_2\mathbf{x}) = (k_1k_2)\mathbf{x}$

x) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

En esta breve introducción a los vectores abstractos, se consideran los escalares de la definición 1.5 como números reales. En este caso, V se refiere a un espacio vectorial *real*, aunque no se sobreutilizará este término. Cuando los escalares pueden ser números complejos, se tiene un espacio vectorial *complejo*. Como las propiedades *i*)-*viii*) de la página 7 son los prototipos para los axiomas de la definición 1.5, es claro que R^2 es un espacio vectorial. Es más, como los vectores en R^3 y R^n tienen estas mismas propiedades, se concluye que R^3 y R^n también son espacios vectoriales. Los axiomas *i*) y *vi*) se denominan axiomas de **clausura**, y se dice que un espacio vectorial V está cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación escalar. Obsérvese, también, que conceptos tales como *longitud* y *producto interior* no son parte de la estructura axiomática de un espacio vectorial.

Ejemplo 1 Comprobación de los axiomas de clausura

Determine si los conjuntos *a*) $V = \{1\}$ y *b*) $V = \{0\}$ son espacios vectoriales bajo suma ordinaria y multiplicación por números reales.

Solución *a*) Para este sistema que consta de un solo elemento, muchos de los axiomas dados en la definición 1.5 se violan. En particular, los axiomas *i*) y *vi*) de clausura no se satisfacen. Ni la suma $1 + 1 = 2$ ni el múltiplo escalar $k \cdot 1 = k$, para $k \neq 1$, están en V. Por consiguiente, V no es un espacio vectorial.

b) En este caso, los axiomas de clausura se satisfacen puesto que $0 + 0 = 0$ y $k \cdot 0 = 0$ para cualquier número real k. Los axiomas conmutativos y asociativos se satisfacen, puesto que $0 + 0 = 0 + 0$ y $0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0$. Es fácil verificar que los axiomas restantes también se satisfacen. Por lo tanto, V es un espacio vectorial. ❑

Al espacio vectorial $V = \{0\}$ se le llama comúnmente **espacio vectorial cero** o **trivial**.

Cuando se tiene el primer contacto con la noción de un vector abstracto, se debe tener la precaución de no considerar los nombres *suma* vectorial y *multiplicación* escalar muy literalmente. Estas operaciones se *definen*, y como tales se deben aceptar como son, aun cuando no tengan ninguna semejanza con el uso común de la suma ordinaria y multiplicación en, digamos, R, R^2, R^3 o R^n. Por ejemplo, la suma de dos vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ podría ser $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. Tras esta advertencia, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Un ejemplo de un espacio vectorial

Considérese el conjunto V de números reales positivos. Si x y y denotan números reales positivos, entonces se escriben vectores en V como $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{y} = y$. Ahora, la *suma* de vectores se define como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy$$

y la *multiplicación escalar* se define como

$$k\mathbf{x} = x^k.$$

Determine si V es un espacio vectorial.

Solución A continuación se analizan los diez axiomas.

i) Para $\mathbf{x} = x > 0$ y $\mathbf{y} = y > 0$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy > 0$. Así, la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ se encuentra en V; V está cerrada bajo la suma.

ii) Como la multiplicación de números reales positivos es conmutativa, se tiene que para todos los $\mathbf{x} = x$ y $\mathbf{y} = y$ en V, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = xy = yx = \mathbf{y} + \mathbf{x}$. Así, la suma es conmutativa.

iii) Para todos los $\mathbf{x} = x$, $\mathbf{y} = y$, $\mathbf{z} = z$ en V,

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = x(yz) = (xy)z = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Así, la suma es asociativa.

iv) Como $\mathbf{1} + \mathbf{x} = 1x = x = \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{1} = x1 = x = \mathbf{x}$, el vector $\mathbf{0}$ es $\mathbf{1} = 1$.

v) Si se define $-\mathbf{x} = \dfrac{1}{x}$, entonces

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = x\frac{1}{x} = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0} \text{ y } (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \frac{1}{x}x = 1 = \mathbf{1} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, el negativo de un vector es su recíproco.

vi) Si k es cualquier escalar y $\mathbf{x} = x > 0$ es cualquier vector, entonces $k\mathbf{x} = x^k > 0$. Así, V está cerrado bajo la multiplicación escalar.

vii) Si k es cualquier escalar, entonces

$$k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (xy)^k = x^k y^k = k\mathbf{x} + k\mathbf{y}.$$

viii) Para los escalares k_1 y k_2,

$$(k_1 + k_2)\mathbf{x} = x^{(k_1 + k_2)} = x^{k_1}x^{k_2} = k_1\mathbf{x} + k_2\mathbf{x}.$$

ix) Para los escalares k_1 y k_2,

$$k_1(k_2\mathbf{x}) = (x^{k_2})^{k_1} = x^{k_1 k_2} = (k_1 k_2)\mathbf{x}.$$

x) $1\mathbf{x} = x^1 = x = \mathbf{x}$.

Puesto que todos los axiomas de la definición 1.5 se satisfacen, se concluye que V es un espacio vectorial. ❑

A continuación se mencionan algunos espacios vectoriales importantes; se han mencionado ya algunos de estos anteriormente. Las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar son las operaciones usuales asociadas con el conjunto.

- El conjunto R de números reales
- El conjunto R^2 de pares ordenados
- El conjunto R^3 de tripletas ordenadas
- El conjunto R^n de n-uplas ordenadas
- El conjunto P_n de polinomios de grado menor o igual a n
- El conjunto P de todos los polinomios
- El conjunto de funciones f definidas sobre la línea real completa
- El conjunto $C[a, b]$ de funciones reales f continuas en el intervalo cerrado $a \le x \le b$
- El conjunto $C(-\infty, \infty)$ de funciones reales f continuas sobre la línea real completa
- El conjunto $C^n[a, b]$ de todas las funciones reales f para las cuales existen $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ y son continuas en el intervalo $[a, b]$

■ **Subespacio** Puede suceder que un subconjunto de vectores W de un espacio vectorial V sea en sí mismo un espacio vectorial.

DEFINICIÓN 1.6 Subespacio

Si un subconjunto W de un espacio vectorial V es en sí mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar definidas en V, entonces W se denomina un **subespacio** de V.

Cada espacio vectorial V tiene por lo menos dos subespacios: el mismo V y el subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$; $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio ya que el vector cero debe ser un elemento en cualquier espacio vectorial.

Para mostrar que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio, no es preciso demostrar que los diez axiomas de la definición 1.5 se satisfacen. Como todos los vectores de W están también en V, deben satisfacer axiomas tales como *ii*) y *iii*). En otras palabras, W hereda de V la mayoría de las propiedades de un espacio vectorial. Como lo indica el próximo teorema, únicamente se necesitan comprobar los dos axiomas de clausura para demostrar que un subconjunto W es un subespacio de V.

TEOREMA 1.4 Criterios para un subespacio

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si, y sólo si, W está cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación escalar definidas en V:

i) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en W, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en W.

ii) Si $\mathbf{x}$ está en W y k es cualquier escalar, entonces $k\mathbf{x}$ está en W.

Ejemplo 3 Subespacio

Supóngase que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones continuas reales definidas en la línea real completa. Entonces se sabe, a partir del cálculo, que $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ y $k\mathbf{f}$, para cualquier número real k, son funciones continuas reales. De esto se puede concluir que $C(-\infty, \infty)$ es un subespacio del espacio vectorial de funciones reales definidas en la línea real completa. ❑

Ejemplo 4 Subespacio

El conjunto P_n de polinomios de grado menor o igual a n es un subespacio de $C(-\infty, \infty)$, es decir, el conjunto de funciones reales continuas sobre la línea real completa. ❑

Siempre es una buena idea tener visualizaciones concretas de los espacios vectoriales y los subespacios. Los subespacios del espacio vectorial R^3 de vectores tridimensionales pueden visualizarse fácilmente pensando en un vector como un punto (a_1, a_2, a_3). Desde luego, $\{0\}$ y el mismo R^3 son subespacios; otros subespacios son todas las líneas que pasan por el origen, y todos los planos que también pasan por el origen. Las líneas y los planos deben pasar por el origen ya que $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ tiene que ser un elemento de cualquier subespacio.

De manera semejante a como se puede establecer un criterio para las soluciones linealmente independientes de una función, es posible definir los vectores linealmente independientes.

DEFINICIÓN 1.7 Independencia lineal

Se dice que un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es **linealmente independiente** si las únicas constantes que satisfacen la ecuación

$$k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{3}$$

son $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$. Si el conjunto de vectores no es linealmente independiente, entonces se dice que es **linealmente dependiente**.

En R^3, los vectores $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ son linealmente independientes puesto que la ecuación $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} + k_3\mathbf{k} = 0$ es la misma que

$$k_1\langle 1, 0, 0\rangle + k_2\langle 0, 1, 0\rangle + k_3\langle 0, 0, 1\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{o} \quad \langle k_1, k_2, k_3\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle.$$

Por igualdad de vectores, inciso *ii*) de la definición 1.2, se concluye que $k_1 = 0$, $k_2 = 0$ y $k_3 = 0$. En la definición 1.7, la dependencia lineal significa que existen constantes k_1, $k_2, \ldots, k_n$ *no todas cero* tales que $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Por ejemplo, en R^3 los vecto-

res $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 4\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 5, 2, 7\rangle$ son linealmente dependientes ya que (3) se satisface cuando $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ y $k_3 = -1$:

$$3\langle 1, 1, 1\rangle + \langle 2, -1, 4\rangle - \langle 5, 2, 7\rangle = \langle 0, 0, 0\rangle \quad \text{o} \quad 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Se observa que dos vectores son linealmente independientes si ninguno es un múltiplo escalar del otro.

■ **Base** Cualquier vector en R^3 puede escribirse como una combinación lineal de los vectores linealmente independientes **i**, **j** y **k**. En la sección 1.2, se muestra que estos vectores forman una **base** para el sistema de vectores tridimensionales.

DEFINICIÓN 1.8 Base para un espacio vectorial

Considérese un conjunto de vectores $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ en un espacio vectorial V. Si el conjunto B es linealmente independiente, y si cada vector en V puede expresarse como una combinación lineal de dichos vectores, entonces se dice que B es una **base** para V.

■ **Bases estándar** Aunque no es posible demostrarlo aquí, cada espacio vectorial tiene una base. El espacio vectorial P_n de todos los polinomios de grado menor o igual a n tiene la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ya que cualquier vector (polinomio) $p(x)$ de grado n o menor puede escribirse como la combinación lineal $p(x) = c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$. Un espacio vectorial puede tener muchas bases. Se mencionó que el conjunto de vectores $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es una base para R^3. Sin embargo, puede demostrarse que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$$

es un conjunto linealmente independiente (véase el problema 23 en los ejercicios 1.6) y, además, cada vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ puede expresarse como una combinación lineal $\mathbf{a} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$. Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es otra base para R^3. En efecto, cualquier conjunto de *tres* vectores linealmente independientes es una base para ese espacio. Sin embargo, el conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se conoce como la **base estándar** para R^3. La base estándar para el espacio P_n es, desde luego, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Para el espacio vectorial R^n, la base estándar está conformada por los n vectores

$$\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle, \ \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle, \ldots, \ \mathbf{e}_n = \langle 0, 0, 0, \ldots, 1\rangle. \tag{4}$$

Si B es una base para el espacio vectorial V, entonces para cualquier vector $\mathbf{v}$ en V existen escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_2 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n. \tag{5}$$

Lea la última frase varias veces.

Los escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, de la combinación lineal (5) se denominan **coordenadas de v relativas a la base B**. En R^n, la notación $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ para un vector **a** significa que los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las coordenadas de **a** *relativas a la base estándar* con las $\mathbf{e}_i$ siguiendo el orden preciso dado en (4).

■ **Dimensión** Si un espacio vectorial V tiene una base B que consta de n vectores, entonces se puede demostrar que *cualquier* base para ese espacio debe contener n vectores. Esto lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.9 Dimensión de un espacio vectorial

Se dice que el número de vectores en una base B de un espacio vectorial V es la **dimensión** del espacio.

Ejemplo 5 Dimensiones de algunos espacios vectoriales

a) De acuerdo con la intuición, las dimensiones de los espacios vectoriales R, R^2, R^3 y R^n son, a su vez, 1, 2, 3 y n.

b) Puesto que existen $n + 1$ vectores en la base estándar $B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, la dimensión del espacio vectorial P_n de polinomios de grado menor o igual a n es $n + 1$.

c) El espacio vectorial cero $\{\mathbf{0}\}$ requiere de especial consideración. Este espacio contiene únicamente a $\mathbf{0}$, y como $\{\mathbf{0}\}$ es un conjunto linealmente dependiente, no es una base. En este caso, se acostumbra tomar el conjunto vacío como la base y *definir* la dimensión de $\{\mathbf{0}\}$ como cero. ❑

Si la base de un espacio vectorial V contiene un número finito de vectores, entonces se dice que el espacio vectorial es de **dimensión finita**; de otro modo, será de **dimensión infinita**. El espacio funcional $C^n(I)$ de funciones diferenciables continuamente n veces sobre un intervalo I es un ejemplo de un espacio vectorial de dimensión infinita.

■ **Ecuaciones diferenciales lineales** Considere la siguiente ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{6}$$

sobre un intervalo I en el que los coeficientes son continuos y $a_n(x) \neq 0$ para cada x en el intervalo. Una solución y_1 de (6) es necesariamente un vector en el espacio vectorial $C^n(I)$. Asimismo, si se parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, se sabe que si y_1 y y_2 son soluciones de (6), entonces la suma $y_1 + y_2$ y cualquier múltiplo escalar ky_1 también son soluciones. Como el conjunto solución está cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar, se concluye a partir del teorema 1.4 que el conjunto solución de (6) es un subespacio de $C^n(I)$. Por lo tanto, el conjunto solución de (6) merece llamarse el **espacio solución** de la ecuación diferencial. También se sabe que si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ son soluciones linealmente independientes de (6), entonces la solución general de la ecuación diferencial es la combinación lineal

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x).$$

Recuerde que por medio de esta solución general puede encontrarse cualquier solución de la ecuación, especificando las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Por lo tanto, el conjunto linealmente independiente de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es una base para el espacio de solución. La dimensión de este espacio de solución es n.

Ejemplo 6 Dimensión de un espacio solución

La solución general de la ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden $y'' + 25y = 0$ es $y = c_1 \cos 5x + c_2 \operatorname{sen} 5x$. Una base para el espacio solución son los vectores linealmente independientes $\{\cos 5x, \operatorname{sen} 5x\}$. El espacio solución es bidimensional. ❑

El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea no es un espacio vectorial. Varios axiomas del espacio vectorial no se satisfacen; de forma más notoria, el conjunto de soluciones no contiene un vector cero. En otras palabras, $y = 0$ no es una solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea.

■ **Claro** Si S denota a un conjunto cualquiera de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio vectorial V, entonces el conjunto de *todas* las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en S,

$$\{k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 + \cdots + k_n\mathbf{x}_n\},$$

donde k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son escalares, se denomina **claro** de los vectores y se escribe Claro(S) o Claro($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$). Se deja como ejercicio demostrar que Claro(S) es un subespacio del espacio vectorial V. Véase el problema 33 en los ejercicios 1.6. Se dice que Claro(S) es un subespacio del *claro* de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Si V = Claro(S), entonces se dice que S es un **conjunto puente** para el espacio vectorial V, o que S funciona como **claro** de V. Por ejemplo, cada uno de los tres conjuntos

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}, \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\}$$

son conjuntos puente para el espacio vectorial R^3. Obsérvese sin embargo que los primeros dos conjuntos son linealmente independientes, mientras que el tercer conjunto es dependiente. Con estos nuevos conceptos, se pueden replantear las definiciones 1.8 y 1.9 de la siguiente forma:

Un conjunto S de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio vectorial V es una **base** *para V si S es linealmente independiente, y además es un conjunto puente para V. El número de vectores de este conjunto puente S es la* **dimensión** *del espacio V.*

Comentarios

i) Supóngase que V es un espacio vectorial real arbitrario. Si existe un producto interior definido sobre V, no necesita parecerse en lo más mínimo al producto interior estándar, o euclidiano, definido sobre R^n. Por ejemplo, en el capítulo 4 se trabajará con un producto interior que es una integral definida. Un producto interior que *no* es el euclidiano se denota a través del símbolo $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Véanse los problemas 30, 31 y 38*b*) en los ejercicios 1.6.
ii) Un espacio vectorial V sobre el cual se ha definido un producto interior se denomina un **espacio con producto interior**. Un espacio vectorial V puede tener más de un producto interior definido en él. Por ejemplo, un producto interior no euclidiano definido sobre R^2 sería $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2$, donde $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$. Véanse los problemas 37 y 38*a*) en los ejercicios 1.6.
iii) Gran parte de los desarrollos en los últimos capítulos de este texto se realizan en un espacio vectorial de dimensión infinita. Como tal, se necesita ampliar la definición de independencia lineal de un conjunto finito de vectores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ dada en la definición 1.7 para un conjunto infinito:

Se dice que un conjunto infinito de vectores $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ es **linealmente independiente** si *todos* los subconjuntos finitos del conjunto S son linealmente independientes. Si el conjunto S no es linealmente independiente entonces es **linealmente dependiente**.

Se observa que si S contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces todo el conjunto S es linealmente dependiente.

El espacio vectorial P de todos los polinomios tiene la base estándar $B = \{1, x, x^2, \ldots\}$ la cual es un conjunto infinito linealmente independiente.

EJERCICIOS 1.6

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1-10, determine si el conjunto proporcionado es un espacio vectorial. Si no, mencione por lo menos un axioma que no se satisfaga. Considere que la suma vectorial y la multiplicación escalar son las operaciones ordinarias definidas en cada conjunto, a menos que se indique lo contrario.

1. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$
2. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_2 = 3a_1 + 1$
3. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde la multiplicación escalar se define como $k\langle a_1, a_2\rangle = \langle ka_1, 0\rangle$
4. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde $a_1 + a_2 = 0$
5. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2, 0\rangle$
6. El conjunto de vectores $\langle a_1, a_2\rangle$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$\langle a_1, a_2\rangle + \langle b_1, b_2\rangle = \langle a_1 + b_1 + 1, a_2 + b_2 + 1\rangle$$
$$k\langle a_1, a_2\rangle = \langle ka_1 + k - 1, ka_2 + k - 1\rangle$$

7. El conjunto de números reales, con la suma definida como $\mathbf{x} + \mathbf{y} = x - y$
8. El conjunto de números complejos $a + bi$, donde $i^2 = -1$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
$$k(a + bi) = ka + kbi, \text{ donde } k \text{ es un número real}$$

9. El conjunto de arreglos de números reales $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, donde la suma y la multiplicación escalar se definen como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + b_{12} & a_{11} + b_{11} \\ a_{22} + b_{22} & a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$$
$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

10. El conjunto de todos los polinomios de grado 2.

En los problemas 11-16, determine si el conjunto proporcionado es un subespacio del espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$.

11. Todas las funciones f tales que $f(1) = 0$
12. Todas las funciones f tales que $f(0) = 1$
13. Todas las funciones no negativas f
14. Todas las funciones f tales que $f(-x) = f(x)$
15. Todas las funciones f diferenciables
16. Todas las funciones f que tengan la forma $f(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

En los problemas 17-20, determine si el conjunto proporcionado es un subespacio del espacio vectorial indicado.

17. Polinomios de la forma $p(x) = c_3x^3 + c_1x$; P_3
18. Polinomios p que son divisibles entre $x - 2$; P_2
19. Todos los vectores unitarios; R^3
20. Las funciones f tales que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$; $C[a, b]$
21. En el espacio 3D, una línea que pasa por el origen puede escribirse como $S = \{(x, y, z) | x = at, y = bt, z = ct$, siendo a, b, c números reales$\}$. Muestre que S es un subespacio de R^3, si la suma y la multiplicación escalar son las mismas que para los vectores $\langle x, y, z\rangle$.
22. En el espacio 3D un plano que pasa por el origen puede escribirse como $S = \{(x, y, z) | ax + by + cz = 0$, siendo a, b, c números reales$\}$. Muestre que S es un subespacio de R^3.
23. Los vectores $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$ forman una base para el espacio vectorial R^3.
    a) Muestre que $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son linealmente independientes.
    b) Exprese el vector $\mathbf{a} = \langle 3, -4, 8\rangle$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.
24. Los vectores $p_1(x) = x + 1$, $p_2(x) = x - 1$ forman una base para el espacio vectorial P_1.
    a) Muestre que $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son linealmente independientes.
    b) Exprese el vector $p(x) = 5x + 2$ como una combinación lineal de $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

En los problemas 25-28, determine si los vectores proporcionados son linealmente independientes o linealmente dependientes.

25. $\langle 4, -8\rangle$, $\langle -6, 12\rangle$ o R^2
26. $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 2, 5\rangle$ o R^2
27. $1, (x + 1), (x + 1)^2$ o P_2
28. $1, (x + 1), (x + 1)^2, x^2$ o P_2
29. Explique por qué $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 3}$ es un vector en $C[0, 3]$, pero no un vector en $C[-3, 0]$.
30. Un espacio vectorial V sobre el cual se ha definido un producto interior, o producto escalar, se denomina **espacio con producto interior**. Un producto interior para el espacio vectorial $C[a, b]$ está dado por
$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$
Calcule $C[0, 2\pi]$ en $(x, \text{sen } x)$.
31. La **norma** de un vector en un espacio con producto interior se define en función de éste. Para el producto interior proporcionado en el problema 30, la norma de un vector está dada por $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. En $C[0, 2\pi]$ calcule $\|x\|$ y $\|\text{sen } x\|$.
32. Encuentre una base para el espacio de soluciones de
$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$
33. Sea $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cualquier conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Muestre que Claro$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ es un subespacio de V.

Problemas para razonar

34. Comente: ¿es R^2 un subespacio de R^3? ¿Son R^2 y R^3 subespacios de R^4?
35. En el problema 9 se debió haber demostrado que el conjunto M_{22} de arreglos de 2×2 de números reales
$$M_{22} = \left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right\},$$
o **matrices**, es un espacio vectorial con suma vectorial y multiplicación escalar definidas en dicho problema. Encuentre una base para M_{22}. ¿Cuál es la dimensión de M_{22}?
36. Considere un conjunto ortogonal finito de vectores no nulos $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en R^n. Comente: ¿es este conjunto linealmente independiente o linealmente dependiente?
37. Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces los axiomas de un producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ son:
    i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$
    ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, donde k es un escalar
    iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$
    iv) $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$.

    Muestre que $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + 4u_2v_2$, donde $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$, es un producto interior sobre R^2.
38. *a*) Encuentre un par de vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^2 que no sean ortogonales con respecto al producto interior euclidiano o estándar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, pero que sean ortogonales con respecto al producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ del problema 37.
    b) Encuentre un par de funciones no nulas f y g en $C[0, 2\pi]$ que sean ortogonales con respecto al producto interior (f, g) dado en el problema 30.

1.7 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Introducción En la sección 1.6 se plantea que un espacio vectorial V puede tener muchas bases diferentes. Conviene recordar que las características que definen a cualquier base $B = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de un espacio vectorial V son

- el conjunto B es linealmente independiente, y
- el conjunto B funciona como claro para el espacio.

En este contexto, la palabra *claro* significa que todos los vectores del espacio se expresan como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Por ejemplo, cada vector $\mathbf{u}$ en R^n se escribe como una combinación lineal de los vectores de la base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, donde

$$\mathbf{e}_1 = \langle 1, 0, 0, \ldots, 0\rangle, \quad \mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, \ldots, 0\rangle, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \langle 0, 0, 0, \ldots, 1\rangle.$$

Esta base estándar $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es también un ejemplo de **base ortonormal**, esto es, los $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son mutuamente ortogonales y son vectores unitarios, o sea,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \; i \neq j \quad \text{y} \quad \|\mathbf{e}_i\| = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esta sección se concentra en bases ortonormales para R^n y examina un procedimiento con el cual es posible transformar o convertir cualquier base B de R^n en una base ortonormal.

Ejemplo 1 Base ortonormal para R^3

El conjunto de tres vectores

$$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, \mathbf{w}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle, \mathbf{w}_3 = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad (1)$$

es linealmente independiente en R^3. Por lo tanto, $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base para R^3. Utilizando el producto interior estándar, o producto escalar, definido sobre R^3, se observa que

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0, \; \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_3 = 0, \; \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 = 0 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{w}_1\| = 1, \; \|\mathbf{w}_2\| = 1, \; \|\mathbf{w}_3\| = 1.$$

Por lo que B es una base ortonormal. ❑

Una base B para R^n no necesita ser ortogonal, ni los vectores base necesitan ser unitarios. De hecho, *cualquier* conjunto linealmente independiente de n vectores sirve como base para el espacio vectorial n-dimensional R^n. Por ejemplo, se puede mostrar de forma directa que los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 0, 0\rangle, \qquad \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1, 0\rangle, \qquad \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 1\rangle$$

en R^3 son linealmente independientes y, por lo tanto, $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base para R^3. Obsérvese que B no es una base ortogonal.

Generalmente, la base más conveniente para un espacio vectorial V resulta ser una base ortonormal para dicho espacio. Una de las ventajas que tienen las bases ortonormales sobre cualquier otra base para R^n es la relativa facilidad con la que se obtienen las coordenadas de un vector $\mathbf{u}$ respecto de dicha base.

TEOREMA 1.5 Coordenadas relativas a una base ortonormal

Supóngase que $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ es una base ortonormal para R^n. Si $\mathbf{u}$ es cualquier vector en R^n, entonces

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_n)\mathbf{w}_n.$$

Demostración El vector $\mathbf{u}$ está en R^n, por lo que es un elemento del conjunto $\mathrm{Sg}(B)$. En otras palabras, existen escalares reales k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $\mathbf{u}$ puede expresarse como la combinación lineal

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_n\mathbf{w}_n.$$

Los escalares k_i son las coordenadas de $\mathbf{u}$ relativas a la base B, y pueden encontrarse calculando el producto escalar de $\mathbf{u}$ con cada uno de los vectores base:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i = (k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \cdots + k_n\mathbf{w}_n) \cdot \mathbf{w}_i &= k_1(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_i) \\ &+ k_2(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_i) + \cdots + k_n(\mathbf{w}_n \cdot \mathbf{w}_i). \qquad (2)\end{aligned}$$

Como B es ortonormal, $\mathbf{w}_i$ es ortogonal a todos los vectores en B con excepción del mismo $\mathbf{w}_i$. Esto es, $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = 0$, $i \neq j$ para $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i = \|\mathbf{w}_i\|^2 = 1$. Por lo tanto, a partir de (2), se obtiene $k_i = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. ❑

Ejemplo 2 Coordenadas de un vector en R^3

Encuentre las coordenadas del vector $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 9\rangle$ con respecto a la base ortonormal B para R^3 proporcionada en (1) del ejemplo 1. Escriba $\mathbf{u}$ en función de la base B.

Solución A partir del teorema 1.5, las coordenadas de $\mathbf{u}$ relativas a la base B en (1) del ejemplo 1 son simplemente

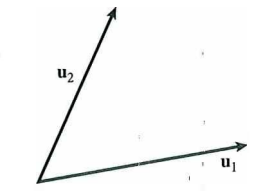
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = \frac{10}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_3 = -\frac{11}{\sqrt{2}}.$$

Por lo que se escribe

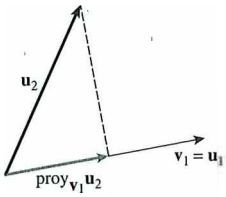
$$\mathbf{u} = \frac{10}{\sqrt{3}}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{w}_2 - \frac{11}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_3.$$ ❑

■ **Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt** El procedimiento conocido como **proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt** es un algoritmo directo para generar una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para cualquier base dada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para R^n. Entonces, se genera una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ mediante la normalización de los vectores de la base ortogonal B'. La idea fundamental en el proceso de ortogonalización es la proyección vectorial y, por ende, se sugiere la revisión de dicho concepto en la sección 1.3. Asimismo, para lograr cierta visión geométrica del proceso, se comienza con R^2 y R^3.

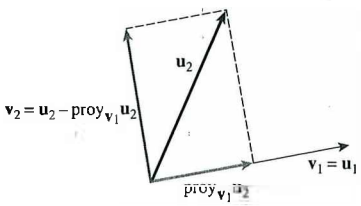
■ **Construcción de una base ortogonal para R^2** El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para R^n es una secuencia de pasos; en cada paso se construye un vector $\mathbf{v}_i$ que es ortogonal al vector del paso precedente. La transformación de una base $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ consta de dos pasos. Véase la figura 1.64*a*). El primer paso es simple: únicamente se elige uno de los vectores de B, digamos $\mathbf{u}_1$, y se renombra como $\mathbf{v}_1$. A continuación, como se muestra en



a) Vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ linealmente independientes

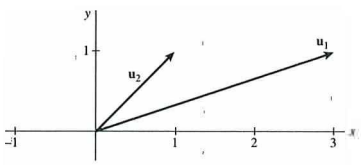


b) Proyección de $\mathbf{u}_2$ sobre $\mathbf{v}_1$

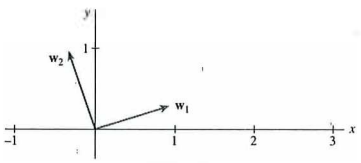


c) $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales

Figura 1.64 Los vectores ortogonales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ se definen en términos de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.



a) Base B



b) Base B''

Figura 1.65 Las dos bases del ejemplo 3

la figura 1.64*b*), se proyecta el vector restante $\mathbf{u}_2$ de B sobre el vector $\mathbf{v}_1$ y se define un segundo vector que es $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2$. Recuérdese de (12) de la sección 1.3 que $\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 = \left(\dfrac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$. Como se ve en la figura 1.64*c*), los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 \end{aligned} \tag{3}$$

son ortogonales. Para verificar esto, se sugiere revisar la ortogonalidad de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ demostrando que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Ejemplo 3 Proceso de Gram-Schmidt en R^2

El conjunto $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, donde $\mathbf{u}_1 = \langle 3, 1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 1\rangle$, es una base para R^2. Transforme B en una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Solución Se selecciona $\mathbf{v}_1$ como $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{v}_1 = \langle 3, 1\rangle$.

Entonces, a partir de la segunda ecuación de (3), con $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 4$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 10$, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \langle 1,1\rangle - \frac{4}{10}\langle 3, 1\rangle = \left\langle -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle.$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\langle 3, 1\rangle, \langle -\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\rangle\}$ es una base ortogonal para R^2. El último paso consiste en normalizar los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right\rangle$$

La base B se muestra en la figura 1.65*a*), y la nueva base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ se muestra con las flechas en la figura 1.65*b*). ❑

En el ejemplo 3 se puede seleccionar cualquier vector de $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ como el vector $\mathbf{v}_1$. Sin embargo, eligiendo $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 = \langle 1, 1\rangle$, se obtiene una base ortonormal diferente; esto es, $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$ y $\mathbf{w}_2 = \langle 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\rangle$. Véase los problemas 5-8 de los ejercicios 1.7.

■ **Construcción de una base ortogonal para R^3** Ahora supóngase que $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base para R^3. Entonces, el conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Es una base ortogonal para R^3. De nuevo, si esto no se ve claramente, calcúlese $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$.

Puesto que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de la lista (4) son ortogonales por la forma en que se generaron, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ debe ser linealmente independiente (véase el problema

36 de los ejercicios 1.6). Así, $W_2 = \text{Sg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ es necesariamente un subespacio bidimensional de R^3. Ahora, el vector $\mathbf{x} = \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$ es un vector en W_2, porque es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Al vector $\mathbf{x}$ se le denomina la **proyección ortogonal** de $\mathbf{u}_3$ sobre el subespacio W_2 y se denota generalmente como $\mathbf{x} = \text{proy}_{W_2}\mathbf{u}_3$. En la figura 1.66, $\mathbf{x}$ es el vector negro remarcado. Obsérvese, también, que $\mathbf{x}$ es la suma de dos proyecciones. Utilizando (12) de la sección 1.3, se escribe

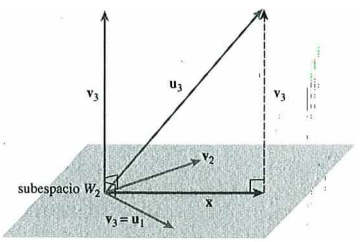


Figura 1.66 Los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ obtenidos del proceso de Gram-Schmidt

$$\mathbf{x} = \text{proj}_{W_2}\mathbf{u}_3 = \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_3} + \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{u}_3} \tag{5}$$

La diferencia $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \mathbf{x}$ es ortogonal a $\mathbf{x}$. En efecto, $\mathbf{v}_3$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y a todos los vectores en W_2. Ésta es precisamente la misma idea de (3). En ese contexto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es la proyección de $\mathbf{u}_2$ sobre el subespacio unidimensional $W_1 = \text{Sg}(\mathbf{v}_1)$ de R^2. Análogamente a (5), se tiene

$$\mathbf{x} = \text{proj}_{W_1}\mathbf{u}_2 = \overbrace{\left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1}^{\text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2}. \tag{6}$$

Ejemplo 4 Proceso de Gram-Schmidt en R^3

El conjunto $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 1, 2, 2\rangle, \mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, 0\rangle$$

es una base para R^3. Transforme B en una base ortonormal B''.

Solución Se elige $\mathbf{v}_1$ como $\mathbf{u}_1$: $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 1, 1\rangle$.
Entonces, de la segunda ecuación de (4), con $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = 5$ y $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, se obtiene

$$\mathbf{v}_2 = \langle 1, 2, 2\rangle - \frac{5}{3}\langle 1, 1, 1\rangle = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle.$$

Ahora con $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 3$, $\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{3}$ y $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \frac{2}{3}$, la tercera ecuación de (4) da por resultado

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \langle 1, 1, 0\rangle - \frac{2}{3}\langle 1, 1, 1\rangle + \frac{1}{2}\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle \\ &= \langle 1, 1, 0\rangle + \left\langle -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle + \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\rangle \\ &= \left\langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle.\end{aligned}$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle, \langle 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\}$ es una base ortogonal para R^3. Como en el ejemplo 3, la tarea se concluye normalizando cada vector en B'. Utilizando $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\|\mathbf{v}_3\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, se encuentra que una base ortonormal para R^3 es $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \quad \mathbf{w}_2 = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle, \quad \mathbf{w}_3 = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle.$$

Se reconoce que el conjunto B'' es la base ortonormal para R^3 examinada en el ejemplo 1. ❑

Esta sección concluye con un teorema que resume el caso más general del proceso de Gram-Schmidt para R^n. Este proceso de ortogonalización se usa sobre cualquier conjunto S linealmente independiente, por lo que se utiliza para encontrar bases ortonormales en subespacios de R^n.

TEOREMA 1.6 Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, con $m \leq n$, una base para el subespacio W_m de R^n. Entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_m = \mathbf{u}_m - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{v}_{m-1}}{\mathbf{v}_{m-1} \cdot \mathbf{v}_{m-1}}\right)\mathbf{v}_{m-1},$$

es una base ortogonal para W_m. Una base ortonormal para W_m es

$$B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\} = \left\{\frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2, \ldots, \frac{1}{\|\mathbf{v}_m\|}\mathbf{v}_m\right\}.$$

Comentarios

Si bien los razonamientos anteriores se han centrado en R^n, el proceso de ortogonalización resumido en (7) del teorema 1.6 es válido para todos los espacios vectoriales V sobre los cuales se defina un producto interior $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. En este caso, se reemplaza el símbolo R^n de (7) con las palabras "un espacio V con producto interior" y cada símbolo de producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ con $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Véanse los problemas 17 y 18 de los ejercicios 1.7.

EJERCICIOS 1.7

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 y 2, verifique que la base B para el espacio vectorial proporcionado sea ortonormal. Utilice el teorema 1.5 para encontrar las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ relativo a la base B. Después escriba $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de los vectores base.

1. $B = \left\{\left\langle\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right\rangle, \left\langle\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right\rangle\right\}$, R^2; $\mathbf{u} = \langle 4, 2\rangle$

2. $B = \left\{\left\langle\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle, \left\langle -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\rangle\right\}$, R^3; $\mathbf{u} = \langle 5, -1, 6\rangle$

En los problemas 3 y 4, verifique que la base B del espacio vectorial proporcionado sea ortogonal. Utilice el teorema 1.5 como una ayuda en la búsqueda de las coordenadas del vector $\mathbf{u}$ relativas a la base B. Después escriba $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de los vectores base.

3. $B = \{\langle 1, 0, 1\rangle, \langle 0, 1, 0\rangle, \langle -1, 0, 1\rangle\}$, R^3; $\mathbf{u} = \langle 10, 7, -13\rangle$

4. $B = \{\langle 2, 1, -2, 0\rangle, \langle 1, 2, 2, 1\rangle, \langle 3, -4, 1, 3\rangle, \langle 5, -2, 4, -9\rangle\}$, R^4; $\mathbf{u} = \langle 1, 2, 4, 3\rangle$

En los problemas 5-8, utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (3) para transformar la base proporcionada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ para R^2 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Después, genere una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

a) En primer lugar, construya B'' utilizando $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1$.

b) A continuación construya B'' utilizando $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2$.

c) Dibuje B y cada base B''.

5. $B = \{\langle -3, 2\rangle, \langle -1, -1\rangle\}$
6. $B = \{\langle -3, 4\rangle, \langle -1, 0\rangle\}$
7. $B = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$
8. $B = \{\langle 5, 7\rangle, \langle 1, -2\rangle\}$

En los problemas 9-12, utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (4) para transformar la base proporcionada $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ para R^3 en una base ortogonal $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. A continuación genere una base ortonormal $B'' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

9. $B = \{\langle 1, 1, 0\rangle, \langle 1, 2, 2\rangle, \langle 2, 2, 1\rangle\}$

10. $B = \{\langle -3, 1, 1\rangle, \langle 1, 1, 0\rangle, \langle -1, 4, 1\rangle\}$

11. $B = \{\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle, \langle -1, 1, -\frac{1}{2}\rangle, \langle -1, \frac{1}{2}, 1\rangle\}$

12. $B = \{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 9, -1, 1\rangle, \langle -1, 4, -2\rangle\}$

En los problemas 13 y 14, los vectores proporcionados funcionan como claro para un subespacio W de R^3. Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a fin de construir una base ortonormal para dicho subespacio.

13. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 5, 2\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle -2, 1, 1\rangle$

14. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 3, 4, 1\rangle$

En los problemas 15 y 16, los vectores proporcionados funcionan como claro para un subespacio W de R^4. Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a fin de construir una base ortonormal para dicho subespacio.

15. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, -1, 1, -1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 3, 0, 1\rangle$

16. $\mathbf{u}_1 = \langle 4, 0, 2, -1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 2, 1, -1, 1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1, 1, -1, 0\rangle$

En los problemas 17 y 18, un producto interior definido sobre el espacio vectorial P_2 de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 está dado por

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

Utilice el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt para transformar la base proporcionada B de P_2 en una base ortogonal B'.

17. $B = \{1, x, x^2\}$

18. $B = \{x^2 - x, x^2 + 1, 1 - x^2\}$

Para el producto interior (p, q) definido para P_2 en los problemas 17 y 18, la norma $\|p(x)\|$ de un polinomio p se define como

$$\|p(x)\|^2 = (p, p) = \int_{-1}^{1} p^2(x)\,dx.$$

Utilice esta norma en los problemas 19 y 20.

19. Construya una base ortonormal B'' a partir del B' obtenido en el problema 17.

20. Construya una base ortonormal B'' a partir del B' obtenido en el problema 18.

En los problemas 21 y 22, sea $p(x) = 9x^2 - 6x + 5$ un vector en P_2. Utilice el teorema 1.5 y la base ortonormal B'' indicada para encontrar las coordenadas $p(x)$ relativas a B''. A continuación escriba $p(x)$ como una combinación lineal de los vectores base.

21. B'' del problema 19 22. B'' del problema 20

Problemas de razonamiento

23. El conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1\langle 1, 1, 3\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle 1, 4, 1\rangle \text{ y } \mathbf{u}_3 = \langle 1, 10, -3\rangle,$$

es linealmente dependiente en R^3, puesto que $\mathbf{u}_3 = -2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2$. Comente qué es lo que se espera de la aplicación a estos vectores del proceso de Gram-Schmidt en (4). A continuación, desarrolle el proceso de ortogonalización.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

Las respuestas para los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

Conteste los problemas 1-30 sin revisar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso.

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10\rangle$ y $\langle -10, -15, 25\rangle$ son paralelos. _____

2. En el espacio 3D, tres puntos diferentes cualesquiera determinan un plano. _____

3. La línea $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$, $z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. _____

4. Los vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. _____

5. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es obtuso. _____

6. Si $\mathbf{a}$ es un vector unitario, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. _____

7. El producto vectorial de dos vectores no es conmutativo. _____

8. El punto terminal del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ se encuentra en el punto terminal de $\mathbf{a}$. _____

9. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ _____

10. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores coplanares no nulos, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$. _____

11. La suma de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es _____.

12. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son _____.

13. $(-\mathbf{k}) \times (5\mathbf{j}) =$ _____

14. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ _____

15. $\|-12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\| =$ _____

16. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ _____

17. Un vector normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es _____.

18. El plano $x + 3y - z = 5$ contiene el punto $(1, -2, ____)$.

19. El punto de intersección de la línea $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y - z = 13$ es _____.

20. Un vector unitario que tiene dirección opuesta a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ es _____.

21. Si $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 5, -4\rangle$ y P_1 tiene coordenadas $(2, 1, 7)$, entonces las coordenadas de P_2 son _____.

22. El punto medio del segmento de línea comprendido entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas _____.

23. Si $\|\mathbf{a}\| = 7.2$, $\|\mathbf{b}\| = 10$, y el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es 135°, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ _____.

24. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 2\rangle$, entonces $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}) =$ _____.

25. Las intersecciones x, y y z del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente, _____.

26. El ángulo θ comprendido entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ es _____.

27. El área de un triángulo del cual dos lados son $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 2\rangle$ es _____.

28. Una ecuación del plano que contiene a (3, 6, –2) y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ es _____.

29. La distancia del plano $y = -5$ al punto (4, –3, 1) es _____.

30. Los vectores $\langle 1, 3, c\rangle$ y $\langle -2, -6, 5\rangle$ son paralelos para $c =$ _____ y ortogonales para $c =$ _____.

31. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular tanto a $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ como a $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

32. Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$.

En los problemas 33-36, sean $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$. Encuentre el número o el vector indicados.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$

34. $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

35. $\text{proy}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

36. $\text{proy}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$

37. Sea $\mathbf{r}$ el vector de posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio; y sea $\mathbf{a}$ un vector constante. Determine la superficie descrita por *a*) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$ y *b*) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

38. Utilice el producto escalar para determinar si los puntos (4, 2, –2), (2, 4, –3) y (6, 7, –5) son vértices de un triángulo rectángulo.

39. Encuentre las ecuaciones simétricas para la línea que pasa por el punto (7, 3, –5) y es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.

40. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea que pasa por el punto (5, –9, 3) y es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.

41. Muestre que las líneas $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s$, $y = -4 + s$, $z = -1 + s$ se intersecan ortogonalmente.

42. Encuentre una ecuación del plano que contenga los puntos (0, 0, 0), (2, 3, 1) y (1, 0, 2).

43. Encuentre una ecuación del plano que contenga las líneas $x = t$, $y = 4t$, $z = -2t$ y $x = 1 + t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$.

44. Encuentre una ecuación del plano que contenga a (1, 7, –1) y sea perpendicular a la línea de intersección entre $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.

45. Una fuerza constante de 10 N en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ mueve un bloque sobre una superficie sin fricción desde P_1 (4, 1, 0) hasta P_2 (7, 4, 0). Suponga que la distancia se mide en metros. Encuentre el trabajo realizado.

46. En el problema 45, encuentre el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ actúa simultáneamente a la fuerza original.

47. El agua que sale de una manguera contra incendios ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ de magnitud 200 libras. Véase la figura 1.67. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_3$ que un bombero debe ejercer para sostener la manguera en un ángulo de 45° con relación a la horizontal?

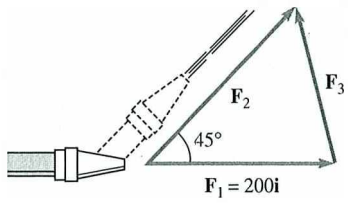


Figura 1.67 Manguera extintora del problema 47

48. Una bola uniforme que pesa 50 libras está soportada por dos planos sin fricción como se muestra en la figura 1.68. Sea $\mathbf{F}_1$ la fuerza ejercida sobre el balón por el plano de soporte $\mathcal{P}_1$ y $\mathbf{F}_2$ la fuerza ejercida por el plano $\mathcal{P}_2$. Como el balón se encuentra en equilibrio, se debe tener $\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{w} = -50\mathbf{j}$. Encuentre las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia:* Considere que las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son normales a los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}P_2$ respectivamente, y actúan a lo largo de líneas que pasan por el centro C del balón. Localice el origen de un sistema coordenado bidimensional en C.]

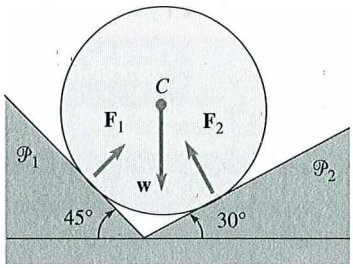


Figura 1.68 Balón soportado del problema 48

49. Determine si el conjunto de vectores $\langle a_1, 0, a_3\rangle$ es un espacio vectorial bajo la suma y la multiplicación escalar definidas por

$$\langle a_1, 0, a_3\rangle + \langle b_1, 0, b_3\rangle = \langle a_1 + b_1, 0, a_3 + b_3\rangle$$

$$k\langle a_1, 0, a_3\rangle = \langle ka_1, 0, a_3\rangle$$

es un espacio vectorial.

50. Determine si los vectores $\langle 1, 1, 2\rangle$, $\langle 0, 2, 3\rangle$, y $\langle 0, 1, -1\rangle$ son linealmente independientes en R^3.

51. Determine si el conjunto de polinomios en P_n que satisfacen la condición $d^2p/dx^2 = 0$ es un subespacio de P_n. Si así es, encuentre una base para el subespacio.

52. Recuérdese que la intersección de dos conjuntos W_1 y W_2 es el conjunto de todos los elementos comunes a ambos, y que la unión de W_1 y W_2 es el conjunto de elementos que están en W_1 o W_2. Considere que W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre o refute, por medio de un contraejemplo, las siguientes proposiciones:

a) $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

b) $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

Por Dayet

CAPÍTULO

2

Matrices

Estructura del capítulo

2.1 Álgebra matricial
2.2 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales
2.3 Rango de una matriz
2.4 Determinantes
2.5 Propiedades de los determinantes
2.6 Inversa de una matriz
  2.6.1 Cálculo de la inversa
  2.6.2 Utilización de la inversa para resolver sistemas
2.7 Regla de Cramer
2.8 El problema del valor propio
2.9 Potencias de las matrices
2.10 Matrices ortogonales
2.11 Aproximación de valores propios
2.12 Diagonalización
2.13 Criptografía
2.14 Código corrector de errores
2.15 Método de los mínimos cuadrados
2.16 Modelos discretos de compartimiento
Ejercicios de repaso del capítulo 2

En las matemáticas, con frecuencia enfrentamos la tarea de manejar arreglos de números o funciones. A uno de dichos arreglos se le denomina **matriz**. La invención de la teoría de matrices se debe al eminente matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895).

2.1 Álgebra matricial

■ **Introducción** En la última sección del capítulo 1 vimos que un vector en R^n es una n-tupla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Los vectores a menudo se escriben como un arreglo horizontal o vertical sin comas:

$$(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

A cada uno de los arreglos mostrados en (1) se le denomina **matriz**. Nuestro objetivo en esta sección es el estudio del álgebra de tales arreglos.

■ **Una definición** Los arreglos mostrados en (1) son casos especiales de (2) en la definición que sigue.

DEFINICIÓN 2.1 Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números o funciones:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

A los números o funciones incluidos en el arreglo (2) se les llama **entidades** o **elementos** de la matriz. Si una matriz tiene m renglones y n columnas decimos que su **tamaño** es de m por n (y se escribe $m \times n$). Una matriz de $n \times n$ se denomina matriz **cuadrada** o matriz de **orden** n. Una matriz de 1×1 es simplemente una constante o función. Por ejemplo, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3 mientras que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & 8 \\ \frac{1}{2} & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 5 & \sqrt{3} & \pi & -4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

es una matriz cuadrada de 4×4 o una matriz de orden 4. A lo largo de este libro denotaremos a una matriz mediante una letra mayúscula en negritas, tal como **A**, **B**, **C**, **X**.

El elemento que aparece en el renglón i-ésimo y en la columna j-ésima de una matriz **A** de $m \times n$ se escribe como a_{ij}. Por lo tanto, una matriz **A** de $m \times n$ se abrevia como $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$. En una matriz cuadrada de $n \times n$ a los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ se les llama **elementos de la diagonal principal**. Los elementos de la diagonal principal de la matriz **B** mostrada en (3) son 9, –2, –1 y –4.

DEFINICIÓN 2.2 Vectores columna y renglón

Una matriz de $n \times 1$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

se llama **vector columna**. Una matriz de $1 \times n$,

$$(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n),$$

se llama **vector renglón**.

DEFINICIÓN 2.3 Igualdad de matrices

Dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de $m \times n$ son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y j.

En otras palabras, dos matrices son iguales si, y sólo si, tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo 1 Igualdad

a) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no son iguales puesto que el tamaño de la primera matriz es de 2×2 y el de la segunda es de 2×3.

b) Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ no son iguales puesto que, en los segundos renglones, los elementos correspondientes no son iguales. ❑

Suma de matrices Cuando dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son del mismo tamaño, podemos sumarlas mediante la adición de sus elementos correspondientes.

DEFINICIÓN 2.4 Suma de matrices

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $m \times n$, entonces su **suma** es

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

Ejemplo 2 Suma de dos matrices

a) La suma de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ -6 & 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -8 \\ 9 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 & 3+(-8) \\ 0+9 & 4+3 & 6+5 \\ -6+1 & 10+(-1) & -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -5 \\ 9 & 7 & 11 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) La suma de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no está definida puesto que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tienen tamaños diferentes. ❑

DEFINICIÓN 2.5 Múltiplo escalar de una matriz

Si k es un número real, entonces el **múltiplo escalar** de una matriz **A** es

$$k\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} = (ka_{ij})_{m\times n}.$$

En otras palabras, para calcular $k\mathbf{A}$, simplemente multiplicamos cada elemento de **A** por k. Por ejemplo, a partir de la definición 2.5, $5\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 & 5\cdot(-3) \\ 5\cdot 4 & 5\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ 20 & -5 \end{pmatrix}$. Se observa de paso que, para cualquier matriz **A**, el múltiplo escalar $k\mathbf{A}$ es lo mismo que $\mathbf{A}k$.

La **resta** de dos matrices de $m \times n$ se define de la manera usual: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ donde $-\mathbf{B} = (-1)\mathbf{B}$.

El teorema siguiente resume algunas propiedades de la suma y la multiplicación escalar de matrices. Cada una de las seis partes del teorema puede demostrarse mediante el uso de las definiciones 2.4 y 2.5.

TEOREMA 2.1 Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar

Suponga que **A**, **B** y **C** son matrices de $m \times n$ que k_1 y k_2 son escalares. Por lo tanto,

i)	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Ley conmutativa de la suma
ii)	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Ley asociativa de la suma
iii)	$(k_1k_2)\mathbf{A} = k_1(k_2\mathbf{A})$	
iv)	$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$	
v)	$k_1(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k_1\mathbf{A} + k_1\mathbf{B}$	Ley distributiva
vi)	$(k_1 + k_2)\mathbf{A} = k_1\mathbf{A} + k_2\mathbf{A}$	Ley distributiva

■ **Multiplicación de matrices** Acabamos de estudiar que cualquier matriz **A** puede multiplicarse por un escalar, sin embargo, ¿pueden multiplicarse entre sí dos matrices? La siguiente definición proporciona la respuesta.

DEFINICIÓN 2.6 Multiplicación de matrices

Sea **A** una matriz que tenga m renglones y p columnas, y sea **B** una matriz con p renglones y n columnas. El **producto AB** es la matriz de $m \times n$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1p}b_{pn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2p}b_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{mp}b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}.$$

La definición 2.6 establece que el producto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ está definido solamente cuando el número de columnas de la matriz $\mathbf{A}$ es igual que el número de renglones de $\mathbf{B}$. La dimensión del producto puede determinarse a partir de

$$\mathbf{A}_{m \times p}\mathbf{B}_{p \times n} = \mathbf{C}_{m \times n}.$$

El número de columnas de **A** debe ser igual al número de renglones de **B**.

Asimismo, usted podrá observar que los elementos en, digamos, el i-ésimo renglón de la matriz resultante $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ se forman utilizando la definición del producto interno o punto del renglón (vector) i-ésimo de $\mathbf{A}$ con cada una de las columnas (vectores) de $\mathbf{B}$.

Ejemplo 3 Multiplicación de matrices

Encuentre el producto **AB** de las matrices siguientes:

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad b)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución A partir de la definición 2.6 se tiene:

$$a)\ \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 9 + 7 \cdot 6 & 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 8 \\ 3 \cdot 9 + 5 \cdot 6 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 & 48 \\ 57 & 34 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 2 & 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -15 \\ -4 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

A diferencia de la suma, la multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa. Esto es, $\mathbf{BA} \neq \mathbf{AB}$. Observe que en la parte a) del ejemplo 3, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 30 & 53 \\ 48 & 82 \end{pmatrix}$, mientras que en la parte b) el producto **BA** *no está definido*, ya que la primera matriz (en este caso la matriz **B**) no tiene el mismo número de columnas que la segunda matriz tiene de renglones.

El producto de una matriz de $m \times n$ con un vector columna de $n \times 1$ es un vector columna de $m \times 1$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A menudo resulta muy conveniente escribir un vector columna como la suma de dos o más vectores columna. En vista de las definiciones 2.4 y 2.5, el resultado en (3) puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

■ **Ley asociativa** Aunque aquí no se demostrará, la multiplicación de matrices es **asociativa**. Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times p$, $\mathbf{B}$ una matriz de $p \times r$ y $\mathbf{C}$ una matriz de $r \times n$, entonces el producto

$$\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)C}$$

es una matriz de $m \times n$.

■ **Ley distributiva** Si tanto $\mathbf{B}$ como $\mathbf{C}$ son matrices de $r \times n$ y $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times r$, entonces la **ley distributiva** es

$$\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Además, si el producto $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A}$ está definido, entonces

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}.$$

DEFINICIÓN 2.7 Transpuesta de una matriz

La **transpuesta** de la matriz $m \times n$ (2) es la matriz $\mathbf{A}^T$ de $n \times m$ dada por

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, los renglones de una matriz $\mathbf{A}$ se convierten en las columnas de su transpuesta $\mathbf{A}^T$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ entonces } \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Si } \mathbf{B} = (5\ 3), \text{ entonces } \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

En el teorema siguiente proporcionamos algunas propiedades importantes de la matriz transpuesta.

TEOREMA 2.2 Propiedades de la transpuesta

Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices y k es un escalar. Por lo tanto,

i)	$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$	Transpuesta de la transpuesta
ii)	$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$	Transpuesta de una suma
iii)	$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$	Transpuesta de un producto
iv)	$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$	Transpuesta de un múltiplo escalar

Desde luego, en las propiedades *ii)* y *iii)* del teorema 2.2 suponemos que la suma y el producto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ están definidos. Observe con cuidado que la parte *iii)* del teorema indica que la transpuesta del producto es el producto de las transpuestas *con el orden invertido*. Además, tanto *ii)* como *iii)* pueden hacerse extensivas a cualquier suma o producto finitos de matrices. Por ejemplo, en el caso de tres matrices, tenemos

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T + \mathbf{C}^T \quad \text{y} \quad (\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

■ **Matrices especiales** En la teoría de matrices existen muchos tipos de matrices que son importantes debido a que poseen ciertas propiedades. A continuación presentamos una lista de algunas de estas matrices:

- Una matriz formada sólo por elementos cero se denomina **matriz cero** y se denota mediante un $\mathbf{0}$. Por ejemplo,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices cero. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{0}$ son matrices $m \times n$, entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}. \tag{4}$$

Además,

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}. \tag{5}$$

- Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **triangular** si todos sus elementos ubicados por debajo de la diagonal principal son ceros o si todos sus elementos por arriba de la diagonal principal son ceros. En otras palabras, la matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es triangular si $a_{ij} = 0$ para $i < j$ o $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Siendo más específicos, en el primer caso la matriz

se llama **triangular superior**, y en el segundo caso tenemos una matriz **triangular inferior**. Las matrices siguientes son triangulares:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 15 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz triangular superior matriz triangular inferior

- Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es una **matriz diagonal** si todos sus elementos que no se encuentran en la diagonal principal son ceros. Simbólicamente $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. La siguiente es una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Cuando todos los elementos a_{ij} de una matriz diagonal $\mathbf{A}$ son iguales, tenemos una **matriz escalar**. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar. Una matriz escalar de $n \times n$ es simplemente un múltiplo escalar de una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En general, la matriz de $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

se representa con el símbolo $\mathbf{I}$ (o mediante $\mathbf{I}_n$ cuando existe la necesidad de enfatizar el orden de la matriz). Para cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ se comprueba fácilmente que $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$. Debido a que esta última propiedad es análoga a $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, para cualquier número real a, a la matriz $\mathbf{I}$ se le denomina **matriz identidad**.

- Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **simétrica** si $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$; esto es, $\mathbf{A}$ es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$ para todos i y j. Lo anterior significa que los elementos de una matriz simétrica son simétricos con respecto a la diagonal principal de la matriz. Por ejemplo, una inspección rápida de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

muestra que es simétrica. Además, al calcular la transpuesta de $\mathbf{A}$ podemos observar que

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Comentarios

Suponga que el símbolo $M_{m,n}$ expresa el conjunto de todas las matrices $m \times n$ donde se encuentran definidas las operaciones de suma y multiplicación escalar de matrices. Entonces,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ está en } M_{m,n} \quad \text{y} \quad k\mathbf{A} \text{ está en } M_{m,n} \tag{6}$$

para todas **A** y **B** en $M_{m,n}$ y para cada escalar k. Es decir, $M_{m,n}$ es cerrado con respecto a la suma matricial y a la multiplicación escalar. Cuando combinamos (5) con las propiedades (3) y (4) y con las propiedades listadas en el teorema 2.1, de inmediato podemos deducir que $M_{m,n}$ es un espacio vectorial. Para efectos prácticos, los espacios vectoriales $M_{1,n}$ (vectores renglón) y $M_{n,1}$ (vectores columna) no se pueden distinguir a partir del espacio vectorial R^n.

EJERCICIOS 2.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-3.

En los problemas 1 a 6, establezca el tamaño de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -15 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 & 0 \\ 7 & -10 & 2 & 12 \\ 0 & 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \\ -10 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

En los problemas 7 a 10, determine si las matrices mostradas son iguales.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} \sqrt{(-2)^2} & 1 \\ 2 & \frac{2}{8} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2 \\ 1.414 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 y 12, determine los valores de x y y para los que las matrices son iguales.

11. $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 4x & 5 \end{pmatrix}$

En los problemas 13 y 14, encuentre los elementos c_{23} y c_{12} de la matriz $\mathbf{C} = 2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$.

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

15. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, *b*) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, *c*) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

16. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, *b*) $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, *c*) $2(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.

17. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{AB}$, *b*) $\mathbf{BA}$, *c*) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, *d*) $\mathbf{B}^2 = \mathbf{BB}$.

18. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{AB}$, *b*) $\mathbf{BA}$.

19. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{BC}$, *b*) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$, *c*) $\mathbf{C}(\mathbf{BA})$, *d*) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})$.

20. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{AB}$, *b*) $\mathbf{BA}$, *c*) $(\mathbf{BA})\mathbf{C}$, *d*) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

21. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, *b*) $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$, *c*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$.

22. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$, *b*) $2\mathbf{A}^T - \mathbf{B}^T$, *c*) $\mathbf{A}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

23. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $(\mathbf{AB})^T$, *b*) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

24. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 11 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$, encuentre *a*) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}$, *b*) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$.

En los problemas 25 a 28, escriba la suma como una sola matriz columna.

25. $4\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

26. $3\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\4\\-5\end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix}2&-3\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1&6\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix}1&-3&4\\2&5&-1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\8\\-6\end{pmatrix}$

En los problemas 29 y 30, determine el tamaño de la matriz **A** de tal forma que se defina el producto dado.

29. $\begin{pmatrix}2&1&3&3\\9&6&7&0\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}0\\5\\7\\9\\2\end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix}2&1&3\\3&9&6\\7&0&-1\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}0&1\\7&4\end{pmatrix}$

En los problemas 31 a 34, suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&4\\-3&2\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}4&10\\2&5\end{pmatrix}$. Verifique la propiedad que se expresa calculando los miembros derecho e izquierdo de la igualdad dada.

31. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

32. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

33. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

34. $(6\mathbf{A})^T = 6\mathbf{A}^T$

35. Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&1\\6&3\\2&5\end{pmatrix}$. Verifique si la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{AA}^T$ es simétrica.

36. Demuestre que si **A** es una matriz de $m \times n$ entonces $\mathbf{AA}^T$ es simétrica.

37. En la teoría de matrices, una gran parte de las propiedades del sistema de números reales no es válida. Si a y b son números reales, entonces $ab = 0$ implica que $a = 0$ o $b = 0$. Encuentre dos matrices tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ pero $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

38. Si a, b y c son números reales y $c \neq 0$, entonces $ac = bc$ implica que $a = b$. En el caso de matrices, $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$, no implica necesariamente que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Verifique esto,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&1&4\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix}5&1&6\\9&2&-3\\-1&3&7\end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&3&4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

En los problemas 39 y 40, sean **A** y **B** matrices de $n \times n$. Explique por qué, en general, no es válida la fórmula dada.

39. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$

40. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$

41. Escriba $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ sin matrices.

42. Escriba el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7\\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1\\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9\end{aligned}$$

como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde **X** y **B** son vectores columna.

43. Compruebe que la forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ es la misma que,

$$\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&\frac{1}{2}b\\\frac{1}{2}b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

44. Compruebe que la integral del campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ puede escribirse como

$$\text{integral } \mathbf{F} = \begin{pmatrix}0&-\partial/\partial x&\partial/\partial x\\ \partial/\partial x&0&-\partial/\partial x\\ -\partial/\partial y&\partial/\partial x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}.$$

(Los lectores que no estén familiarizados con el concepto de la integral de un campo vectorial deberán ver la sección 3.7.)

45. Como se muestra en la figura 2.1*a*), una nave espacial puede efectuar rotaciones, llamadas **elevación**, **giro** y **ruedo**, con respecto a tres ejes distintos. Para describir las coordenadas de un punto P utilizamos dos sistemas de coordenadas: un sistema de coordenadas cartesianas fijo y tridimensional donde las coordenadas de P sean (x, y, z), y un sistema de coordenadas de la nave que se mueva con cada rotación en particular. En la figura 2.1*b*) se ilustra un ruedo; es decir, una rotación alrededor del eje z (el cual es perpendicular al plano del papel). Las coordenadas (x_Y, y_Y, z_Y) del punto P en el sistema nave-espacio después del ruedo están relacionadas con las coordenadas (x, y, z) de P en el sistema fijo de coordenadas mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}x_Y &= x\cos\gamma + y\,\text{sen}\,\gamma\\ y_Y &= -x\,\text{sen}\,\gamma + y\cos\gamma\\ z_Y &= z\end{aligned}$$

donde γ es el ángulo de rotación.

a) Compruebe que el sistema de ecuaciones anterior puede escribirse como la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix}x_Y\\y_Y\\z_Y\end{pmatrix} = \mathbf{M}_Y\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{M}_Y = \begin{pmatrix}\cos\gamma&\text{sen}\,\gamma&0\\-\text{sen}\,\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

b) Cuando la nave espacial realiza una elevación, un giro y un ruedo *en secuencia* a los ángulos α, β, y γ, respectivamente, las coordenadas finales del punto P en el sistema de la nave espacial (x_S, y_S, z_S) se obtienen a partir de la secuencia de transformaciones

$$\begin{aligned} x_P &= x & x_R &= x_P \cos\beta - z_P \operatorname{sen}\beta \\ y_P &= y\cos\alpha + z\operatorname{sen}\alpha & y_R &= y_P \\ z_P &= -y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha & z_R &= x_P \operatorname{sen}\beta + z_P\cos\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_S &= x_R\cos\gamma + y_R\operatorname{sen}\gamma \\ y_S &= -x_R\operatorname{sen}\gamma + y_R\cos\gamma \\ z_S &= z_R \end{aligned}$$

Escriba esta secuencia de transformaciones como una ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\gamma\mathbf{M}_R\mathbf{M}_P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{M}_\gamma$ es la misma que aparece en la parte *a*). Identifique las matrices $\mathbf{M}_R$ y $\mathbf{M}_P$.

c) Suponga que las coordenadas de un punto son (1, 1, 1) en el sistema de coordenadas fijo. Determine las coordenadas del punto en el sistema de la nave si ésta realiza una elevación, un giro y un ruedo en secuencia a los ángulos $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

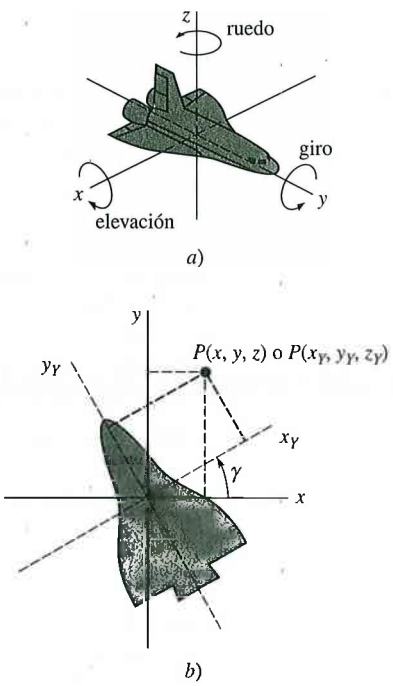


Figura 2.1 Nave espacial del problema 45

46. Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede escribirse como el producto de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ y una matriz triangular superior $\mathbf{U}$, entonces se dice que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ es una **factorización LU** de $\mathbf{A}$. Compruebe que una matriz $\mathbf{A}$ dada puede escribirse como el producto de las matrices $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ indicadas.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. **Proyecto** *a*) Una matriz $\mathbf{A}$ puede **ser partida** en submatrices. Por ejemplo, las matrices de 3×5 y de 5×2

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc:cc} 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & -1 & 5 \\ \hdashline 0 & 4 & 6 & -2 & 3 \end{array}\right), \quad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 0 & 7 \\ -4 & 1 \\ \hdashline -2 & -1 \\ 2 & 5 \end{array}\right)$$

pueden escribirse como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

donde A_{11} es el bloque superior izquierdo, o submatriz, que se indica a gris en $\mathbf{A}$; A_{12} es el bloque superior derecho, y así sucesivamente. Calcule el producto $\mathbf{AB}$ utilizando las matrices particionadas.

b) Investigue de qué manera pueden ser útiles las matrices particionadas cuando se utiliza una computadora para llevar a cabo cálculos matriciales que involucren matrices de gran tamaño.

2.2 Sistemas de ecuaciones algebraicas lineales

Introducción Recuerde: se dice que cualquier ecuación de la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales, es una **ecuación lineal** en las variables x y y. La gráfica de una ecuación lineal en dos variables es una línea recta. Para números reales a, b, c y d, $ax + by + cz = d$ es una ecuación lineal en las variables x, y y z, y es la ecuación de un plano en el espacio tridimensional. En general, una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_n,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b_n son números reales, es una ecuación lineal en las n variables x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

En esta sección estudiaremos los **sistemas de ecuaciones lineales**, a los que también se les conoce con el nombre de **sistemas lineales**.

Forma general Un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas tiene la forma general

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

En el sistema lineal (1), los **coeficientes** de las incógnitas pueden abreviarse como a_{ij}, donde i significa el renglón y j la columna en la que aparece el coeficiente. Por ejemplo, a_{23} es el coeficiente de la incógnita localizada en el segundo renglón y la tercera columna (es decir, x_3). Por tanto, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ y $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Los números $b_1, b_2, \ldots, b_m$ se llaman **constantes** del sistema. Si todas las constantes son cero, se dice que el sistema (1) es **homogéneo**, de otra forma es **no homogéneo**. Por ejemplo,

Este sistema es homogéneo	Este sistema es no homogéneo
↓	↓
$5x_1 - 9x_2 + x_3 = 0$	$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1$
$x_1 + 3x_2 \qquad = 0$	$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 9.$
$4x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$	

Solución Una **solución** de un sistema lineal (1) es un conjunto de n números x_1, $x_2, \ldots, x_n$ que satisface cada una de las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ es una solución del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 &= 7. \end{aligned}$$

Para comprobar lo anterior, sustituimos x_1 por 3 y x_2 por -1 en cada ecuación:

$$3(3) + 6(-1)9 - 6 = 3 \quad \text{y} \quad 3 - 4(-1) = 3 + 4 = 7.$$

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene al menos una solución, y es **inconsistente** cuando no tiene soluciones. Si un sistema lineal es consistente tiene ya sea

- una solución única (es decir, exactamente una solución), o
- un número infinito de soluciones.

Por tanto, un sistema de ecuaciones lineales no puede tener, digamos, exactamente tres soluciones. En un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas, las líneas se intersecan en un punto, como ilustra la figura 2.2*a*) (solución única), son idénticas, figura 2.2*b*) (un número infinito de soluciones), o son paralelas, figura 2.2*c*) (inconsistente).

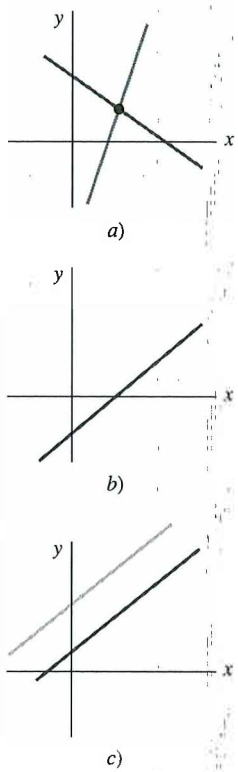


Figura 2.2 Solución única en *a*); un número infinito de soluciones en *b*); sin solución en *c*)

Ejemplo 1 Verificación de una solución

Compruebe que $x_1 = 14 + 7t$, $x_2 = 9 + 6t$, $x_3 = t$, donde t es un número real cualquiera, es una solución del sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Solución Al reemplazar x_1, x_2 y x_3 por $14 + 7t$, $9 + 6t$ y t, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} 2(14 + 7t) - 3(9 + 6t) + 4t &= 1 \\ 14 + 7t - (9 + 6t) - t &= 5. \end{aligned}$$

Por cada número real t obtenemos una solución diferente del sistema; en otras palabras, el sistema tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, $t = 0$, $t = 4$ y $t = -2$ proporcionan las tres soluciones

$$\begin{aligned} &x_1 = 14, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = 0, \\ &x_1 = 42, \quad x_2 = 33, \quad x_3 = 4, \\ \text{y} \quad &x_1 = 0, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -2, \end{aligned}$$

respectivamente. Desde el punto de vista geométrico, cada ecuación del sistema representa un plano en R^3. En este caso, los planos se intersecan formando una línea; las ecuaciones paramétricas de la línea son $x_1 = 14 + 7t$, $x_2 = 9 + 6t$, $x_3 = t$. ❑

■ **Resolución de sistemas** Podemos transformar un sistema de ecuaciones lineales en un sistema equivalente (es decir, en uno que tenga las mismas soluciones) mediante las **operaciones elementales** siguientes:

i) La multiplicación de una ecuación por una constante diferente de cero.

ii) El intercambio de posiciones de las ecuaciones presentes en el sistema.

iii) La suma de un múltiplo diferente de cero de una ecuación con cualquiera de las demás ecuaciones.

Tal como ilustra el ejemplo siguiente, estas operaciones elementales nos permiten eliminar variables sistemáticamente a partir de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo 2 Resolución de un sistema lineal

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Solución Comenzamos intercambiando los renglones primero y segundo:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es eliminar x_1 de las ecuaciones segunda y tercera. Si sumamos a la segunda ecuación -2 veces la primera, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 &= 9. \end{aligned}$$

Sumándole a la tercera ecuación -5 veces la primera, obtenemos un nuevo sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Ahora vamos a utilizar la segunda ecuación para eliminar la variable x_2 a partir de las ecuaciones primera y tercera. Para hacer más sencillo el procedimiento, multiplicaremos la segunda ecuación por $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Sumamos a la primera ecuación –2 veces la segunda y obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ -3x_2 + x_3 &= 14. \end{aligned}$$

A continuación, sumando 3 veces la segunda ecuación a la tercera obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ \frac{11}{2}x_3 &= \frac{55}{2}. \end{aligned}$$

Utilizaremos la última ecuación para eliminar la variable x_3 de las ecuaciones primera y segunda. Para tal fin, multiplicamos la tercera ecuación por $\frac{2}{11}$:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 &= -10 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

En este punto podríamos utilizar la **sustitución hacia atrás**; esto es, sustituir el valor $x_3 = 5$ en las ecuaciones restantes para determinar x_1 y x_2. Sin embargo, continuando con nuestra eliminación sistemática, sumamos a la segunda ecuación $-\frac{3}{2}$ veces la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_3 &= -10 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Por último, sumando a la primera ecuación 4 veces la tercera, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 10 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Es evidente que $x_1 = 10$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$ es la solución al sistema original. ❑

■ **Matriz aumentada** Lo que refleja la solución del sistema lineal del ejemplo 2 debe convencerlo de que la solución del sistema no depende de qué símbolos se utilicen como variables. Por lo tanto, los sistemas

$$\begin{aligned} 2x + 6y + z &= 7 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 5x + 7y - 4z &= 9 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2u + 6v + w &= 7 \\ u + 2v - w &= -1 \\ 5u + 7v - 4w &= 9 \end{aligned}$$

tienen la misma solución que el sistema del ejemplo 2. En otras palabras, en la solución de un sistema lineal, los símbolos utilizados para denotar las variables no tienen significado; son los coeficientes de las variables y las constantes los que determinan la solución del sistema. De hecho, podemos resolver un sistema de la forma (1) eliminando

completamente las variables y realizando las operaciones de los renglones del arreglo de coeficientes y constantes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right). \tag{2}$$

A este arreglo se le denomina **matriz aumentada** del sistema o simplemente **matriz del sistema** (1).

Ejemplo 3 Matrices aumentadas

a) La matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right)$ representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - x_3 &= 8. \end{aligned}$$

b) El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 8x_2 &= 7 \\ x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{es lo mismo que} \quad \begin{aligned} x_1 + 0x_2 - 5x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 0x_3 &= 7 \\ 0x_1 + x_2 + 9x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 2 & 8 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right).$$

❑

■ **Operaciones elementales con renglones** Puesto que los renglones de una matriz aumentada representan las ecuaciones de un sistema lineal, las tres operaciones elementales de un sistema lineal listado previamente son equivalentes a las siguientes **operaciones elementales con renglones**:

i) Multiplicación de un renglón por una constante diferente de cero.

ii) Intercambio de cualquier par de renglones.

iii) Suma de un múltiplo constante diferente de cero de un renglón a cualquier otro renglón.

Desde luego, cuando sumamos un múltiplo de un renglón a otro, sumamos los elementos correspondientes en los renglones. Se puede decir que dos matrices son **equivalentes por renglón** si puede obtenerse un renglón a partir de otro mediante una secuencia de operaciones elementales con renglones. Al procedimiento de llevar a cabo operaciones elementales con renglones en una matriz para obtener una matriz con renglones equivalentes se le llama **reducción de renglones**.

■ **Métodos de eliminación** Para resolver un sistema como el expresado en (1) utilizando una matriz aumentada, podemos aplicar tanto el **método de eliminación gaussiana** como el de **eliminación de Gauss-Jordan**. En el primero, se reduce a renglones la matriz aumentada del sistema hasta llegar a una matriz aumentada equivalente en renglones, la cual se presenta en la llamada **forma escalonada**:

i) El primer elemento diferente de cero en un renglón diferente de cero es un 1.

ii) En los renglones consecutivos diferentes de cero, el primer elemento 1 situado en el renglón más bajo aparece a la derecha del 1 localizado en el renglón más alto.

iii) Los renglones cuyos elementos son todos iguales a cero se encuentran en la parte inferior de la matriz.

En el método de Gauss-Jordan, continúan realizándose las operaciones de renglón hasta obtener una matriz aumentada que se encuentre en su **forma escalonada reducida**. Una matriz escalonada reducida tiene las tres propiedades que se listaron anteriormente, además de la siguiente:

iv) Una columna que contenga como primer elemento un 1, tendrá ceros en cualquier otro lugar.

Ejemplo 4 Formas escalonadas

a) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

se encuentran en forma escalonada. El lector debe verificar que los tres criterios enunciados se satisfagan para esta forma.

b) Las matrices aumentadas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

se encuentran en forma escalonada reducida. Observe que todos los elementos restantes localizados en las columnas que contienen un elemento 1 son cero. ❑

Se debe observar que en la eliminación gaussiana nos detuvimos cuando se obtuvo *una* matriz aumentada en forma escalonada. En otras palabras, utilizando diferentes secuencias de operaciones de renglón, es posible obtener diferentes formas escalonadas reducidas. Este método requiere entonces el uso de la sustitución hacia atrás. En la eliminación de Gauss-Jordan nos detuvimos cuando se obtuvo *la* matriz aumentada en la forma escalonada reducida. Cualquier secuencia de operaciones con renglones nos llevará a la misma matriz aumentada en forma escalonada reducida. Este método no requiere la sustitución hacia atrás; la solución del sistema será evidente al inspeccionar la matriz final. En términos de las ecuaciones del sistema original, nuestro objetivo en ambos métodos es simplemente hacer que el coeficiente de x_1 en la primera ecuación* sea igual a uno y después utilizar múltiplos de esta ecuación para eliminar x_1 de las demás ecuaciones. El proceso se repite para las variables restantes.

Nota: Las operaciones con renglones pueden dar como resultado diferentes formas escalonadas.

Para mantener un registro de las operaciones con renglones que se realicen en una matriz aumentada, se utiliza la siguiente notación:

Símbolo	Significado
R_{ij}	Intercambie los renglones i y j
cR_i	Multiplique el i-ésimo renglón por la constante c diferente de cero
$cR_i + R_j$	Multiplique el i-ésimo renglón por c y súmelo al renglón j-ésimo

---

Ejemplo 5 Métodos de eliminación y matrices aumentadas

Resuelva el sistema lineal del ejemplo 2 utilizando *a*) la eliminación gaussiana y *b*) la eliminación de Gauss-Jordan.

---

*Siempre es posible intercambiar las ecuaciones de tal forma que la primera ecuación contenga a la variable x_1.

Solución *a*) Al utilizar las operaciones de renglón en la matriz aumentada del sistema, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right) \overset{R_{12}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 7 \\ 5 & 7 & -4 & 9 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$$

$$\overset{3R_2+R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{55}{2} \end{array}\right) \overset{\frac{2}{11}R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

La última matriz está en la forma escalonada y representa el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= -1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Sustituir $x_3 = 5$ en la segunda ecuación nos da $x_2 = -3$. Al reemplazar ambos valores en la primera ecuación obtenemos finalmente $x_1 = 10$.

b) Comenzamos con la última matriz escrita anteriormente. Puesto que los primeros elementos localizados en la segunda y tercera columnas son unos, debemos hacer, a su vez, que los elementos restantes de la segunda y tercera columnas sean ceros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{-2R_2+R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{-4R_3+R_1 \\ -\frac{3}{2}R_3+R_2}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

La última matriz está en la forma escalonada reducida. Tomando en cuenta lo que significa la matriz en términos de ecuaciones, podemos observar que la solución del sistema es $x_1 = 10, x_2 = -3, x_3 = 5$. ❑

Ejemplo 6 Eliminación por el método de Gauss-Jordan

Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 19. \end{aligned}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{array}\right) \overset{\substack{-4R_1+R_2 \\ -2R_1+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \\ 0 & -11 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{11}R_2 \\ -\frac{1}{11}R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{\substack{-3R_2+R_1 \\ -R_2+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso, la última matriz en forma escalonada reducida implica que el sistema original de tres ecuaciones con tres incógnitas equivale realmente a dos ecuaciones en cuanto a las incógnitas. Puesto que solamente x_3 es común a ambas ecuaciones (los renglones diferentes de cero), podemos asignar sus valores de forma arbitraria. Si dejamos que

$x_3 = t$, donde t representa cualquier número real, entonces se puede observar que el sistema tiene un infinito número de soluciones: $x_1 = 2 - t$, $x_2 = -3 + t$, $x_3 = t$. Geométricamente, estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de la línea de intersección de los planos $x_1 + 0x_2 + x_3 = 2$ y $0x_1 + x_2 - x_3 = -3$. ❑

Ejemplo 7 Sistema inconsistente

Resuelva

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 &= -6 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 8. \end{aligned}$$

Solución En el proceso de aplicar el método de eliminación de Gauss-Jordan a la matriz del sistema, nos detenemos en

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right).$$

El tercer renglón de la última matriz significa $0x_1 + 0x_2 = 16$ (o $0 = 16$). Puesto que ningún valor de x_1 y x_2 puede satisfacer esta ecuación, es posible concluir que el sistema no tiene solución. ❑

Los sistemas inconsistentes de m ecuaciones lineales con n incógnitas siempre generarán la situación que se ilustra en el ejemplo 7; esto es, en la forma escalonada reducida de la matriz aumentada habrá un renglón en el que los primeros n elementos son cero y el elemento $(n + 1)$ es diferente de cero.

Vale la pena recordar.

■ **Redes** Las corrientes que circulan por las ramas de una red eléctrica pueden determinarse utilizando las leyes de nodos y de mallas de Kirchhoff:

> **Ley de nodos:** La suma algebraica de las corrientes en cualquier nodo en un circuito es 0.
>
> **Ley de mallas:** En una malla, la suma algebraica de las diferencias de potencial en cada elemento de ésta es 0.

Cuando se recorre una malla en una dirección específica (en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido opuesto), se considera que la fem es *positiva* cuando va de – a + y *negativa* cuando va de + a –. El producto iR se considera *positivo* si la dirección seleccionada por el resistor es opuesta a la de la corriente que se supuso, y es *negativo* si la dirección seleccionada es igual a la supuesta.

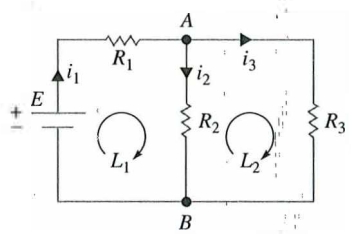


Figura 2.3 Red eléctrica

En la figura 2.3, los puntos de las ramas de la red se identifican como A y B, las mallas como L_1 y L_2, y la dirección seleccionada en cada malla va en el sentido de las manecillas del reloj. Ahora, aplicando las leyes anteriores a la red, obtenemos el sistema no homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ E - i_1R_1 - i_2R_2 &= 0 \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ i_1R_1 + i_2R_2 &= E \\ i_2R_2 - i_3R_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ejemplo 8 Corrientes en una red

Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema (3) cuando $R_1 = 10$ ohms, $R_2 = 20$ ohms, $R_3 = 10$ ohms y $E = 12$ volts.

Solución El sistema a resolver es

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0 \\ 10i_1 + 20i_2 &= 12 \\ 20i_2 - 10i_3 &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 12 \\ 0 & 20 & -10 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{operaciones con renglones}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{12}{25} \end{array}\right).$$

Por lo tanto, vemos que las corrientes en las tres ramas son $i_1 = \frac{18}{25} = 0.72$ ampere, $i_2 = \frac{6}{25} = 0.24$ ampere e $i_3 = \frac{12}{25} = 0.48$ ampere. ❑

■ **Sistemas homogéneos** Todos los sistemas de los ejemplos anteriores son no homogéneos. Como hemos observado, un sistema no homogéneo puede ser consistente o inconsistente. Por el contrario, un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

siempre es consistente, puesto que $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ satisfarán cada una de las ecuaciones del sistema. Una solución donde todos los valores son iguales a cero se llama **solución trivial**. Sin embargo, es natural que estemos interesados en conocer si un sistema de la forma (4) tiene cualesquiera soluciones para las que *algunas* de las x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son diferentes de cero. Una solución de este tipo se denomina **solución no trivial**. Un sistema homogéneo tiene ya sea solamente la solución trivial o la solución trivial junto con un número infinito de soluciones no triviales. El teorema siguiente, enunciado sin demostración, nos proporciona una condición que es suficiente para justificar la existencia de soluciones no triviales.

TEOREMA 2.3 Existencia de soluciones no triviales

Un sistema homogéneo de la forma (4) tiene soluciones no triviales si el número m de ecuaciones es menor que el número n de incógnitas ($m < n$).

Ejemplo 9 Resolución de un sistema homogéneo

Resuelva

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Solución Puesto que el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas sabemos, a partir del teorema 2.3, que el sistema dado tiene soluciones no triviales. Utilizando el método de eliminación de Gauss-Jordan encontramos que

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{R_{12}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{6}R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \end{array}\right) \overset{-R_2+R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & 0 \end{array}\right).$$

Como en el ejemplo 6, si $x_3 = t$, entonces la solución del sistema es $x_1 = \frac{5}{6}t$, $x_2 = \frac{7}{6}t$, $x_3 = t$. Observe que al seleccionar $t = 0$ obtenemos la solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ para este sistema. Para $t \neq 0$ se obtienen soluciones no triviales. Por ejemplo, las soluciones correspondientes a $t = 6$, $t = -12$ y $t = 3$ son, a su vez, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 6$; $x_1 = -10$, $x_2 = -14$, $x_3 = -12$ y $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = 3$. ❑

■ **Ecuaciones químicas** El ejemplo siguiente proporciona una aplicación de sistemas no homogéneos en la química.

Ejemplo 10 Balanceo de una ecuación química

Balancee la ecuación química $C_2H_6 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$.

Solución Deseamos encontrar enteros positivos x_1, x_2, x_3 y x_4 de tal forma que

$$x_1C_2H_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3CO_2 + x_4H_2O.$$

Debido a que el número de átomos de cada elemento debe ser el mismo en cada miembro de la última ecuación, tenemos:

$$\begin{array}{lll} \text{carbono (C):} & 2x_1 = x_3 & 2x_1 + 0x_2 - x_3 + 0x_4 = 0 \\ \text{hidrógeno (H):} & 6x_1 = 2x_4 \quad \text{o} & 6x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 2x_4 = 0 \\ \text{oxígeno (O):} & 2x_2 = 2x_3 + x_4 & 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{array}$$

El método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{con renglones}]{\text{operaciones}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $x_1 = \frac{1}{3}t$, $x_2 = \frac{7}{6}t$, $x_3 = \frac{2}{3}t$, $x_4 = t$. En este caso t debe ser un entero positivo seleccionado de tal forma que x_1, x_2 y x_3 sean enteros positivos. Para llevar a cabo lo anterior establecemos $t = 6$, lo cual da $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$. La ecuación química balanceada es entonces,

$$2C_2H_6 + 7O_2 \rightarrow 4CO_2 + 6H_2O. \qquad \square$$

Notación En vista de la multiplicación de matrices y de la igualdad de matrices definidas en la sección 2.1, observe que el sistema lineal (1) puede escribirse de manera compacta como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Como es natural, la matriz $\mathbf{A}$ se denomina matriz de coeficientes. La matriz aumentada de un sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ a menudo se denota como $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

Un sistema lineal consistente no homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, comparte una propiedad con las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas. Si $\mathbf{X}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$, y $\mathbf{X}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, entonces la superposición $\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$ es también una solución del sistema no homogéneo. Esto es fácil de comprobar: $\mathbf{A}(\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p) = \mathbf{AX}_h + \mathbf{AX}_p = \mathbf{0} + \mathbf{B} = \mathbf{B}$. Además, de modo análogo a la noción de una solución general de una ecuación diferencial lineal, *cada* solución del sistema no homogéneo puede obtenerse a partir de $\mathbf{X}_h + \mathbf{X}_p$.

Una similitud con las ecuaciones diferenciales lineales.

Comentarios

i) Para resolver sistemas de ecuaciones lineales de tamaño grande, es evidente que necesitamos la ayuda de una computadora. Puesto que los dos métodos presentados en esta sección son muy sistemáticos, pueden programarse con facilidad. Sin embargo, el requisito de que cada renglón diferente de cero comience con un uno puede implicar a menudo la división entre un número muy pequeño. Podrían presentarse problemas. Los sistemas de tamaño grande con frecuencia se resuelven de manera indirecta, esto es, mediante una técnica de aproximación tal como la **iteración de Gauss-Seidel**. Consulte la sección 8.1.

ii) Puesto que el método de eliminación de Gauss-Jordan evita la necesidad de sustitución hacia atrás, parecería ser el más eficiente de los dos métodos que hemos

considerado. En realidad, éste no es el caso. Se ha demostrado que, en sistemas muy grandes, el método de eliminación de Gauss-Jordan puede requerir aproximadamente un 50% más de operaciones que el gaussiano.

iii) Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas se dice que está **sobredeterminado**, mientras que un sistema con un menor número de ecuaciones que de incógnitas se llama **subdeterminado**. Como regla, un sistema sobredeterminado es generalmente —no siempre— inconsistente. Y un sistema subdeterminado es usualmente —no siempre— consistente. (Consulte los ejemplos 7 y 9.) Debe observarse la imposibilidad de que un sistema subdeterminado consistente tenga una solución única. Para comprender esto, suponga que se tienen m ecuaciones y n incógnitas donde $m < n$. Si se utiliza la eliminación gaussiana para resolver dicho sistema, entonces la forma escalonada para la matriz del sistema contendrá $r \leq m$ renglones diferentes de cero. Por lo tanto, podemos despejar r de las variables en términos de $n - r > 0$ variables. Si el sistema subdeterminado es consistente, entonces las $n - r$ variables restantes pueden seleccionarse arbitrariamente, por lo que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

EJERCICIOS 2.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 20, utilice la eliminación gaussiana o la de Gauss-Jordan para resolver el sistema dado o demostrar que no tiene solución.

1. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 11 \\ 4x_1 + 3x_2 &= -5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 10x_1 + 15x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -11 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 9 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 4 \\ 4x_1 + 3x_2 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 &= 11 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 16 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 6 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 + 12x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 + 21x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 9x_4 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 21 y 22, utilice una calculadora para resolver el sistema dado.

21. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4.280 \\ 0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.5x_3 &= -1.978 \\ 4.1x_1 + 0.3x_2 + 0.12x_3 &= 1.686 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 2.5x_1 + 1.4x_2 + 4.5x_3 &= 2.6170 \\ 1.35x_1 + 0.95x_2 + 1.2x_3 &= 0.7545 \\ 2.7x_1 + 3.05x_2 - 1.44x_3 &= -1.4292 \end{aligned}$

En los problemas 23 a 28, utilice los procedimientos que se ilustran en el ejemplo 10 para balancear la ecuación química dada.

23. $Na + H_2O \rightarrow NaOH + H_2$

24. $KClO_3 \rightarrow KCl + O_2$

25. $Fe_3O_4 + C \rightarrow Fe + CO$

26. $C_5H_8 + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O$

27. $Cu + HNO_3 \rightarrow Cu(NO_3)_2 + H_2O + NO$

28. $Ca_3(PO_4)_2 + H_3PO_4 \rightarrow Ca(H_2PO_4)_2$

En los problemas 29 y 30, establezca y resuelva el sistema de ecuaciones necesario para encontrar las corrientes en las ramas de la red eléctrica dada.

29.

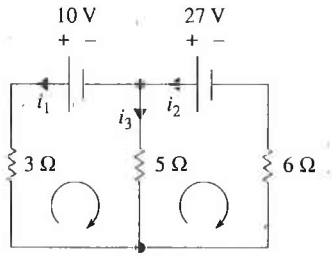


Figura 2.4 Red para el problema 29

30.

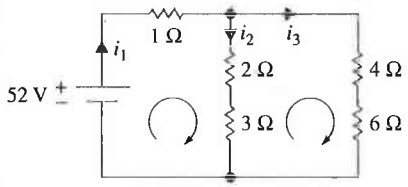


Figura 2.5 Red para el problema 30

Una **matriz elemental E** se obtiene realizando una sola operación de renglón sobre la matriz identidad **I**. En los problemas 31 a 34, compruebe que el esquema dado es una matriz elemental.

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si una matriz **A** se multiplica previamente por una matriz elemental **E**, el producto **EA** será la matriz que se obtenga a partir de **A** mediante la operación elemental de renglón simbolizada por **E**. En los problemas 35 a 38, calcule el producto dado para una matriz arbitraria **A** de 3×3.

35. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$

36. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\mathbf{A}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$

38. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}\mathbf{A}$

El sistema lineal (1) puede escribirse como la ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Suponga que $m = n$. Si la matriz **A** de coeficientes $n \times n$ presente en el sistema tiene una factorización LU $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ (consulte la página 55), entonces el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, o $\mathbf{LUX} = \mathbf{B}$, puede resolverse de forma eficiente en dos etapas *sin* eliminación gaussiana o de Gauss-Jordan:

i) Primero, sea $\mathbf{Y} = \mathbf{UX}$ y despeje **Y** en $\mathbf{LY} = \mathbf{B}$ por sustitución directa.

ii) Después, despeje **X** en la expresión $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ utilizando sustitución hacia atrás.

En los problemas 39 a 42, utilice los resultados del problema 46 dado en los ejercicios 2.1 para resolver el sistema que se muestra.

39. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

40. $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 43 a 46, utilice un sistema asistido por computadora para resolver el sistema dado.

43.
$$\begin{aligned} 1.567x_1 - 3.48x_2 + 5.22x_3 &= 1.045 \\ 3.56x_1 + 4.118x_2 + 1.57x_3 &= -1.625 \end{aligned}$$

44.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 14x_2 - 13x_3 &= 0 \end{aligned}$$

45.
$$\begin{aligned} 1.2x_1 + 3.5x_2 - 4.4x_3 + 3.1x_4 &= 1.8 \\ 0.2x_1 - 6.1x_2 - 2.3x_3 + 5.4x_4 &= -0.6 \\ 3.3x_1 - 3.5x_2 - 2.4x_3 - 0.1x_4 &= 2.5 \\ 5.2x_1 + 8.5x_2 - 4.4x_3 - 2.9x_4 &= 0 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 5 \\ 6x_1 + 9x_2 - 6x_3 + 17x_4 - x_5 &= 40 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

2.3 Rango de una matriz

Introducción En una matriz general de $m \times n$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a los renglones

$$\mathbf{u}_1 = (a_{11}\ a_{12} \cdots\ a_{1n}),\ \mathbf{u}_2 = (a_{21}\ a_{22} \cdots\ a_{2n}),\ \ldots,\ \mathbf{u}_m = (a_{m1}\ a_{m2} \cdots\ a_{mn})$$

y a las columnas

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots,\quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

se les llama **vectores renglón** de $\mathbf{A}$ y **vectores columna** de $\mathbf{A}$, respectivamente.

Una definición Como vectores, el conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ puede ser linealmente independiente o linealmente dependiente. Tenemos la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.8 Rango de una matriz

El rango de una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$, representado mediante rango($\mathbf{A}$), es el número máximo de vectores renglón linealmente independientes de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1 Rango de una matriz de 3×4

Considere la matriz de 3×4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Con $\mathbf{u}_1 = (-1\ \ 1\ \ -1\ \ 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2\ \ -2\ \ 6\ \ 8)$ y $\mathbf{u}_3 = (3\ \ 5\ \ -7\ \ 8)$, podemos observar que $4\mathbf{u}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$. En vista de la definición 1.7 y del análisis que le sigue, concluimos que el conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ es linealmente dependiente. Por otro lado, puesto que ni $\mathbf{u}_1$ ni $\mathbf{u}_2$ pueden considerarse múltiplos constantes entre sí, el conjunto de vectores renglón $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ es linealmente independiente. De aquí que, por la definición 2.8, rango($\mathbf{A}$) = 2. ❑

Espacio de renglón De acuerdo con la terminología del capítulo anterior, los vectores renglón $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ de la matriz (1) son un conjunto de vectores en el *espacio vectorial* R^4. Puesto que $R_{\mathbf{A}} = \text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ (el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$) es un subespacio de R^4, se justifica denominar a $R_{\mathbf{A}}$ como el **espacio renglón** de la matriz $\mathbf{A}$. Ahora el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ es linealmente independiente y también abarca a $R_{\mathbf{A}}$; en otras palabras, el conjunto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ es una *base* para $R_{\mathbf{A}}$. La dimensión (el número de vectores presentes en la base) del espacio renglón $R_{\mathbf{A}}$ es 2, el cual constituye el rango($\mathbf{A}$).

Consulte la página 36 en la sección 1.6.

Rango por reducción de renglones No obstante el ejemplo 1, en general no es fácil determinar por inspección el rango de una matriz. Aunque existen varias formas mecánicas de encontrar rango($\mathbf{A}$), examinamos una forma que utiliza las operaciones elementales con renglones presentadas en la sección anterior. *Específicamente, el rango de* $\mathbf{A}$ *puede encontrarse escribiendo la matriz* $\mathbf{A}$ *como la matriz escalonada reducida* $\mathbf{B}$. Para comprender esto, recuerde primero que una matriz $\mathbf{B}$ de $m \times n$ es equivalente en renglones a una matriz $\mathbf{A}$ de $m \times n$ si los renglones de $\mathbf{B}$ se obtuvieron a partir de los renglones de $\mathbf{A}$

mediante la aplicación de las operaciones elementales en los renglones. Si únicamente intercambiamos dos renglones en $\mathbf{A}$ para obtener $\mathbf{B}$, entonces el espacio renglón R_A de $\mathbf{A}$ y el espacio renglón R_B de $\mathbf{B}$ son iguales debido a que los vectores renglón de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son los mismos. Cuando los vectores renglón de $\mathbf{B}$ son combinaciones lineales de los renglones de $\mathbf{A}$, se deduce que los vectores renglón de $\mathbf{B}$ están en el espacio renglón R_A, y por lo tanto R_B es un subconjunto de R_A (escrito como $R_B \subseteq R_A$). De forma contraria, $\mathbf{A}$ es equivalente en renglones a $\mathbf{B}$ puesto que podemos obtener $\mathbf{A}$ aplicando operaciones en los renglones en $\mathbf{B}$. De aquí que los renglones de $\mathbf{A}$ sean combinaciones lineales de los renglones de $\mathbf{B}$, y así puede deducirse que R_A es un subconjunto de R_B ($R_A \subseteq R_B$). A partir de $R_B \subseteq R_A$ y $R_A \subseteq R_B$, podemos concluir que $R_A = R_B$. Por último, si escribimos la matriz $\mathbf{A}$ como una matriz $\mathbf{B}$ de forma escalonada reducida, entonces los renglones de $\mathbf{B}$ son linealmente independientes. (¿Por qué?) Los renglones de $\mathbf{B}$ forman la base del espacio de renglones R_A, por lo cual tenemos el resultado de que rango($\mathbf{A}$) = dimensión de R_A.

En el teorema siguiente se resumen estas conclusiones.

TEOREMA 2.4 Rango de una matriz mediante reducción de renglones

Si una matriz $\mathbf{A}$ es equivalente a una matriz escalonada $\mathbf{B}$, entonces

i) el espacio de renglones de $\mathbf{A}$ = el espacio de renglones de $\mathbf{B}$,

ii) los renglones de $\mathbf{B}$ diferentes de cero forman una base para el espacio de renglones de $\mathbf{A}$, y

iii) rango($\mathbf{A}$) = al número de renglones de $\mathbf{B}$ diferentes de cero.

Ejemplo 2 Rango mediante reducción de renglones: vuelta al ejemplo 1

Reducimos una matriz $\mathbf{A}$ a una matriz escalonada $\mathbf{B}$ exactamente de la misma forma que reducimos en renglones la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales a una forma escalonada al usar el método de eliminación gaussiana. Utilizando la matriz (1) en el ejemplo 1, las operaciones elementales de renglones nos dan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -7 & 8 \end{pmatrix} \overset{\substack{-2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{2}R_2+R_3 \\ -\frac{1}{4}R_2}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la última matriz está en la forma escalonada, y debido a que la última matriz tiene dos renglones diferentes de cero, a partir del inciso *iii*) del teorema 2.4 podemos concluir que rango($\mathbf{A}$) = 2. ❑

Ejemplo 3 Independencia y dependencia lineales

Determine si el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 1, 1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 0, 3, 0\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, 1, 2\rangle$, en R^3 es linealmente dependiente o linealmente independiente.

Solución A partir del análisis anterior, debe ser claro que si formamos una matriz $\mathbf{A}$ con los vectores dados como renglones, y si reducimos por renglones la matriz $\mathbf{A}$ a una matriz escalonada $\mathbf{B}$ con rango 3, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente. Si rango($\mathbf{A}$) < 3, entonces el conjunto de vectores es linealmente dependiente. En este caso, resulta sencillo convertir la reducción de renglones hasta una forma de renglones escalonados,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, rango($\mathbf{A}$) = 3 y el conjunto de vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ es linealmente independiente. ❑

Como se mencionó anteriormente, los vectores de una matriz escalonada **A** pueden servir como base para el espacio de renglones. En el ejemplo 3, podemos observar que una base para el espacio de renglones de **A** es la base estándar $\langle 1, 0, 0\rangle$, $\langle 0, 1, 0\rangle$, $\langle 0, 0, 1\rangle$ de R^3.

Rango y sistemas lineales El concepto de rango puede asociarse con la resolución de sistemas lineales de ecuaciones algebraicas. Suponga que $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es un sistema lineal y que $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ representa la matriz aumentada del sistema. En el ejemplo 7 de la sección 2.2, observamos que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= 1 \\ 4x_1 - \ \ x_2 &= -6 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

era inconsistente. La inconsistencia del sistema se puede observar en el hecho de que, después de escribir la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ en forma escalonada reducida,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & -3 & 8 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{2}$$

el último renglón es diferente de cero. Desde luego, esta reducción muestra que rango$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3$. Sin embargo, observe también que el resultado en (2) indica el rango$(\mathbf{A}) = 2$ debido a que

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ya hemos ilustrado un caso especial del teorema siguiente.

TEOREMA 2.5 Consistencia de $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$

Un sistema lineal de ecuaciones $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente si, y sólo si, el rango de la matriz de coeficientes **A** es el mismo que el de la matriz aumentada del sistema $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$.

En el ejemplo 6 de la sección 2.2, pudimos observar que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -7 \\ 4x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 19 \end{aligned} \tag{3}$$

era consistente y tenía una número infinito de soluciones. Despejamos dos de las incógnitas, x_1 y x_2, en términos de la incógnita x_3 restante, la cual nombramos como el parámetro t. En una solución de un sistema, el número de parámetros está relacionado con el rango de la matriz de coeficientes **A**.

TEOREMA 2.6 Número de parámetros en una solución

Suponga que un sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ con m ecuaciones y n incógnitas es consistente. Si la matriz de coeficientes **A** es de rango r, entonces la solución del sistema contiene $n - r$ parámetros.

Para el sistema (3), a partir de la reducción de renglones podemos observar

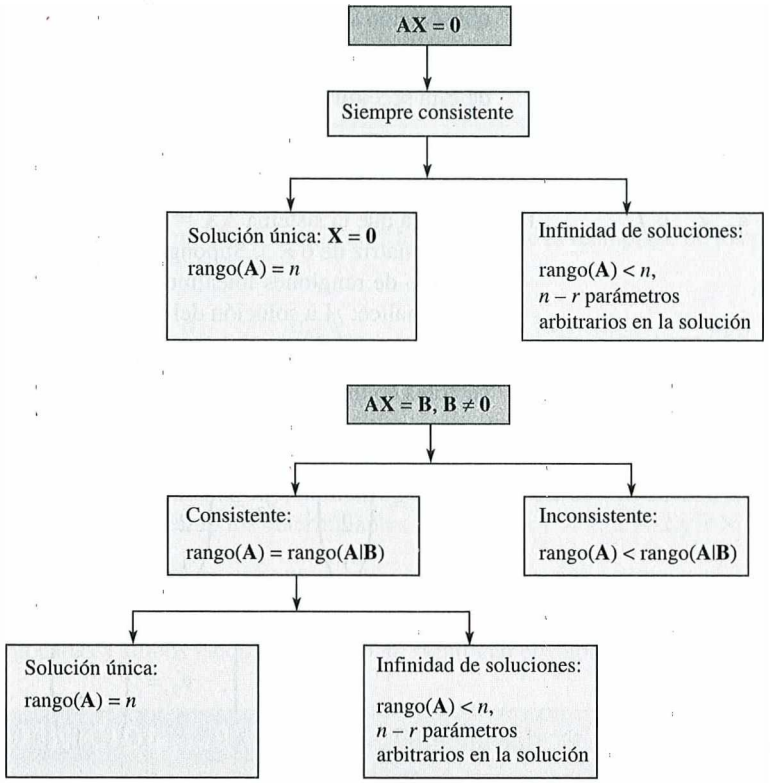
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 7 & 19 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que rango($\mathbf{A}$) = rango($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) = 2, y por ende el sistema es consistente de acuerdo con el teorema 2.5. Con $n = 3$, vemos que a partir del teorema 2.6 el número de parámetros presentes en la solución es $3 - 2 = 1$.

El diagrama siguiente expresa la conexión que hay entre el concepto de rango de una matriz y la solución de un sistema lineal.

Para m ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

Dos casos: $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Sea rango($\mathbf{A}$) = r.



Comentarios

No hemos mencionado la conexión que hay entre las columnas de una matriz $\mathbf{A}$ y el rango de $\mathbf{A}$. Resulta que el número máximo de columnas independientes que una matriz $\mathbf{A}$ puede tener debe ser igual al número máximo de renglones independientes. En la terminología de los espacios vectoriales, el espacio de renglones $R_{\mathbf{A}}$ de la matriz $\mathbf{A}$ tiene la misma dimensión que su espacio de columnas $C_{\mathbf{A}}$. Por ejemplo, si tomamos la transpuesta de la matriz dada en (1) y la escribimos en la forma escalonada:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 6 & -7 \\ 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos observar que el número máximo de renglones de $\mathbf{A}^T$ es 2, y por lo tanto el número máximo de columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$ es 2.

EJERCICIOS 2.3

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 10, utilice el inciso *iii*) del teorema 2.4 para encontrar el rango de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \\ 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} & 3 & \frac{1}{3} \\ 6 & 6 & 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 8 & -1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 8 & -1 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 a 14, determine si el conjunto de vectores dados es linealmente dependiente o linealmente independiente.

11. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, 0, 1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1, -1, 5\rangle$

12. $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 6, 3\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, -1, 4\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, 2, 1\rangle$, $\mathbf{u}_4 = \langle 2, 5, 4\rangle$

13. $\mathbf{u}_1 = \langle 1, -1, 3, -1\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 1, -1, 4, 2\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 1, -1, 5, 7\rangle$

14. $\mathbf{u}_1 = \langle 2, 1, 1, 5\rangle$, $\mathbf{u}_2 = \langle 2, 2, 1, 1\rangle$, $\mathbf{u}_3 = \langle 3, -1, 6, 1\rangle$, $\mathbf{u}_4 = \langle 1, 1, 1, -1\rangle$

15. Suponga que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente y que $\mathbf{A}$ es una matriz de 5×8 y rango($\mathbf{A}$) = 3. ¿Cuántos parámetros tiene la solución del sistema?

16. Sea $\mathbf{A}$ una matriz de 4×6 diferente de cero.

    a) ¿Cuál es el rango máximo que $\mathbf{A}$ puede tener?

    b) Si el rango($\mathbf{A}|\mathbf{B}$) = 2, ¿entonces para qué valor(es) del rango($\mathbf{A}$) el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \neq 0$, es inconsistente? ¿Y consistente?

    c) Si rango($\mathbf{A}$) = 3, ¿entonces cuántos parámetros tiene la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$?

17. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ los vectores columna primero, segundo y tercero, respectivamente, de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

¿Qué podemos concluir acerca de rango($\mathbf{A}$) a partir de la observación $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$?

[*Sugerencia*: Consulte los *Comentarios* incluidos al final de esta sección.]

Problemas de análisis

18. Suponga que el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es consistente y que $\mathbf{A}$ es una matriz de 6×3. Suponga también que el número máximo de renglones linealmente independientes en $\mathbf{A}$ es 3. Analice: ¿La solución del sistema es única?

19. Suponga que deseamos determinar si el conjunto de vectores columna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es linealmente dependiente o linealmente independiente. Por medio de la definición 1.7, si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0} \qquad (4)$$

solamente para $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, entonces el conjunto de vectores es linealmente independiente; de otra forma, el conjunto es linealmente dependiente. Sin embargo, (4) es equivalente al sistema lineal

$$\begin{aligned} 4c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4 + c_5 &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 + 3c_4 + 7c_5 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 + 4c_4 - 5c_5 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 &= 0. \end{aligned}$$

Sin llevar a cabo ninguna tarea adicional, explique por qué ahora podemos concluir que el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

Tareas para el laboratorio de cómputo

20. Un CAS puede utilizarse para obtener una matriz en su forma escalonada. Utilice un CAS para determinar los rangos de la matriz aumentada $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ y la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ para

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 &= 3 \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + 6x_6 &= 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 &= 5. \end{aligned}$$

¿El sistema es consistente o inconsistente? Si es consistente, resuélvalo.

2.4 Determinantes

Introducción Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. Relacionado con $\mathbf{A}$ existe un *número* llamado el **determinante de A**, y se expresa como det $\mathbf{A}$. De manera simbólica, una matriz $\mathbf{A}$ se distingue del determinante de $\mathbf{A}$ mediante el reemplazo de los paréntesis por barras verticales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se dice que el determinante de una matriz de $n \times n$ es **un determinante de orden n**. Comenzaremos definiendo los determinantes de matrices 1×1, 2×2 y 3×3.

Una definición Para una matriz $\mathbf{A} = (a)$ de 1×1, tenemos que det $\mathbf{A} = |a| = a$. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = (-5)$, entonces det $\mathbf{A} = |-5| = -5$. En este caso, las barras verticales || colocadas a ambos lados del número *no* significan el valor absoluto del número.

DEFINICIÓN 2.9 Determinante de una matriz de 2×2

El determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

Tal como en el método mnemotécnico, se piensa de un determinante de orden 2 como el producto de los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ menos el producto de los elementos de la otra diagonal:

multiplicar multiplicar restar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{2}$$

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, entonces $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 6(9) - (-3)(5) = 69$.

DEFINICIÓN 2.10 Determinante de una matriz de 3×3

El determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (3)$$

La expresión mostrada en (3) puede escribirse en una forma más manejable. Mediante factorización, tenemos

$$\det \mathbf{A} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Sin embargo, considerando (1), cada término entre paréntesis se reconoce como el determinante de una matriz de 2×2:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Observe que cada determinante mostrado en (4) es un determinante de una *submatriz* de la matriz $\mathbf{A}$ y corresponde a su coeficiente de la forma siguiente: a_{11} es el coeficiente del determinante de una submatriz obtenida mediante la eliminación del *primer renglón y la primera columna* de $\mathbf{A}$; a_{12} es el coeficiente del negativo del determinante de la submatriz obtenida eliminando *el primer renglón y la segunda columna* de $\mathbf{A}$; y, por último, a_{13} es el coeficiente del determinante de la submatriz que se obtuvo eliminando *el primer renglón y la tercera columna* de $\mathbf{A}$. En otras palabras, los coeficientes de (4) son simplemente los elementos del primer renglón de $\mathbf{A}$. Decimos que det $\mathbf{A}$ ha sido **expandido por cofactores con respecto al primer renglón**, siendo los cofactores a_{11}, a_{12} y a_{13} los determinantes

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Por lo tanto, (4) es

$$\det \mathbf{A} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}. \quad (5)$$

En general, el **cofactor de a_{ij}** es el determinante

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \quad (6)$$

donde M_{ij} es el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $\mathbf{A}$. El determinante M_{ij} se llama **menor**. Un cofactor es un menor *con signo*; esto es, $C_{ij} = M_{ij}$ cuando $i + j$ es par y $C_{ij} = -M_{ij}$ cuando $i + j$ es impar.

Una matriz de 3×3 tiene nueve cofactores:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = M_{11} & C_{12} = -M_{12} & C_{13} = M_{13} \\ C_{21} = -M_{21} & C_{22} = M_{22} & C_{23} = -M_{23} \\ C_{31} = M_{31} & C_{32} = -M_{32} & C_{33} = M_{33}. \end{array}$$

La inspección del arreglo anterior muestra que el factor con signo $+1$ o -1 asociado con un cofactor puede obtenerse a partir del patrón de verificación:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array} \quad (7)$$

matriz de 3×3

Ahora observe que (3) puede agruparse y factorizarse de nuevo como

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ &= a_{12}\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\left(-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) \qquad (8) \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32},\end{aligned}$$

lo cual es la expansión por cofactores de det **A** a lo largo de la segunda columna. Se deja como ejercicio para el lector la demostración a partir de (3) de que det **A** puede expandirse también por cofactores a lo largo del tercer renglón:

$$\det \mathbf{A} = a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}. \qquad (9)$$

Desde luego, en las ecuaciones (5), (8) y (9) estamos sugiriendo el resultado general siguiente: *El determinante de una matriz de 3 × 3 puede evaluarse expandiendo por cofactores det* **A** *a lo largo de cualquier renglón o columna.*

Ejemplo 1 Expansión por cofactores a lo largo del primer renglón

Evalúe el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución Al utilizar la expansión por cofactores a lo largo del primer renglón se obtiene

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2C_{11} + 4C_{12} + 7C_{13}.$$

Ahora, los cofactores de los elementos del primer renglón de **A** son

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix},$$

donde las líneas en gris indican el renglón y la columna que se deben eliminar. Así,

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 7(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2[0(3) - 3(5)] - 4[6(3) - 3(1)] + 7[6(5) - 0(1)] = 120. \qquad \square\end{aligned}$$

Si una matriz tiene un renglón (o una columna) que contenga muchos elementos en cero, entonces el sentido común nos dice que evaluemos el determinante de la matriz utilizando la expansión por cofactores a lo largo de dicho renglón (o columna). Por lo tanto, en el ejemplo 1, si expandimos el determinante de **A** utilizando cofactores a lo largo de, digamos, el segundo renglón, entonces

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= 6C_{21} + 0C_{22} + 3C_{23} = 6C_{21} + 3C_{23} \\ &= 6(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= -6(-23) - 3(6) = 120.\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Expansión por cofactores a lo largo de la tercera columna

Evaluar el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que existen dos ceros en la tercera columna, expandimos por cofactores a lo largo de esa columna:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0C_{13} + (-7)C_{23} + 0C_{33}$$

$$= (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & -7 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-7)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 7[6(4) - 5(-2)] = 238. \qquad \square$$

Llevemos las ideas anteriores un paso más adelante, de manera que podamos evaluar el determinante de una matriz de 4×4 multiplicando los elementos de un renglón (o columna) por sus cofactores correspondientes y sumando los productos. En este caso, cada cofactor es un menor con el signo de una submatriz de 3×3 apropiada. El teorema siguiente, enunciado sin comprobación, establece que el determinante de cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede evaluarse mediante cofactores.

TEOREMA 2.7 Expansión de un determinante empleando cofactores

Sea $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ una matriz de $n \times n$. Para cada $1 \leq i \leq n$, **la expansión por cofactores de det A a lo largo del *i*-ésimo renglón** es

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, **la expansión por cofactores de det A a lo largo de la *j*-ésima columna** es

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

El patrón de verificación de signos del factor para los cofactores, que se mostró en (7), se extiende a las matrices de orden superior a 3:

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

matriz de 4×4 **matriz de $n \times n$**

Ejemplo 3 Expansión por cofactores a lo largo del cuarto renglón

Evalúe el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución Puesto que la matriz tiene dos elementos iguales a cero en su cuarto renglón, optamos por expandir por cofactores det **A** a lo largo de ese renglón:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)C_{41} + 0C_{42} + 0C_{43} + (-4)C_{44}, \tag{10}$$

donde $C_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ y $C_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Enseguida expandimos por cofactores estos determinantes a lo largo del segundo renglón:

$$C_{41} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\left(0(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}\right)$$
$$= 18$$

$$C_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \left((-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -4.$$

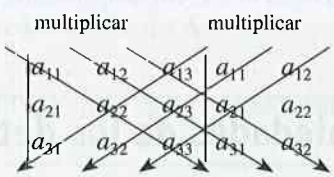
Por lo tanto, (10) se convierte en

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = (1)(18) + (-4)(-4) = 34.$$

Usted puede comprobar este resultado expandiendo por cofactores det **A** a lo largo de la segunda columna. ❑

Comentarios

En cursos previos sobre matemáticas, seguramente usted estudió el dispositivo de memoria siguiente, análogo a (2), para evaluar un determinante de orden 3:



(11)

i) Sume los productos de los elementos correspondientes a las flechas que van de izquierda a derecha.

ii) Reste del número obtenido en *i*) la suma de los productos de los elementos correspondientes a las flechas que van de derecha a izquierda.

Es conveniente hacer aquí una advertencia. El dispositivo de memoria que se da en la ecuación (11), aunque se adapta fácilmente a las matrices mayores a 3×3, no proporciona los resultados correctos. No existen dispositivos mnemotécnicos para evaluar los determinantes de orden 4 o mayores.

Nota: El método ilustrado en la ecuación (11) no es válido para los determinantes de orden $n > 3$.

EJERCICIOS 2.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 4, suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Encuentre los siguientes menores o cofactores.

1. M_{12} 2. M_{32} 3. C_{13} 4. C_{22}

En los problemas 5 a 8, suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los siguientes menores o cofactores.

5. M_{33} 6. M_{41} 7. C_{34} 8. C_{23}

En los problemas 9 a 14, evalúe el determinante de la matriz dada.

9. (-7)

10. (2)

11. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -3-\lambda & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

En los problemas 15 a 28, evalúe el determinante de la matriz dada mediante la expansión por cofactores.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 6 & 0 \\ \frac{1}{3} & 8 & 0 \\ \frac{1}{2} & 9 & 0 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -3 & 6 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 7 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 2+x & 3+y & 4+z \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 29 y 30, encuentre los valores de λ que satisfagan la ecuación dada.

29. $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

30. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

2.5 Propiedades de los determinantes

■ **Introducción** En esta sección vamos a considerar algunas de las muchas propiedades de los determinantes. El objetivo de nuestro estudio es emplear estas propiedades para desarrollar medios de evaluación de un determinante como una alternativa para la expansión por cofactores.

■ **Propiedades** La primera propiedad establece que el determinante de una matriz de $n \times n$ y su transpuesta son iguales.

TEOREMA 2.8 Determinante de una transpuesta

Si $\mathbf{A}^T$ es la transpuesta de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, entonces $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Por ejemplo, para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, se tiene $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$. Observe que

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -41 \quad \text{y} \quad \det \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -41.$$

Puesto que la transposición de una matriz tiene el efecto de intercambiar sus renglones y columnas, el significado del teorema 2.8 es que los enunciados que tienen que ver con determinantes y con los renglones de una matriz también son válidos cuando la palabra "renglón" se reemplaza por la palabra "columna".

TEOREMA 2.9 Dos renglones idénticos

Si cualesquiera dos renglones (columnas) de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son iguales, entonces $\det \mathbf{A} = 0$.

Ejemplo 1 Matriz con dos renglones idénticos

Puesto que la segunda y la tercera columnas de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ son iguales,

a partir del teorema 2.9 se puede deducir que

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Usted deberá verificar lo anterior expandiendo por cofactores el determinante. ❑

TEOREMA 2.10 Renglón o columna con ceros

Si todos los elementos presentes en un renglón (columna) de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ son cero, entonces $\det \mathbf{A} = 0$.

Demostración Suponga que el i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ está constituido por ceros. De aquí que, en la expansión por cofactores de $\det \mathbf{A}$ a lo largo del i-ésimo renglón, todos los productos sean cero y, en consecuencia, $\det \mathbf{A} = 0$. ❑

Por ejemplo, del teorema 2.10 se puede deducir inmediatamente que

$$\text{renglón cero} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \overset{\text{columna cero} \downarrow}{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = 0.$$

TEOREMA 2.11 Intercambio de renglones

Si $\mathbf{B}$ es la matriz que se obtiene al intercambiar cualquier par de renglones (columnas) de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, entonces $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.

Por ejemplo, si **B** es la matriz que se obtiene al intercambiar los renglones primero y tercero de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, entonces, a partir del teorema 2.11 tenemos

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\det \mathbf{A}.$$

Usted puede comprobar lo anterior calculando ambos determinantes.

TEOREMA 2.12 Constante múltiple de un renglón

Si **B** es la matriz que se obtiene a partir de una matriz **A** de $n \times n$ multiplicando un renglón (columna) por un número k real diferente de cero, entonces $\det \mathbf{B} = k \det \mathbf{A}$.

Demostración Suponga que los elementos presentes en el i-ésimo renglón de **A** se multiplican por el número k. Llamemos **B** a la matriz resultante. Al expandir por cofactores la matriz **B** a lo largo del i-ésimo renglón nos da

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &= ka_{i1}C_{i1} + ka_{i2}C_{i2} + \cdots + ka_{in}C_{in} \\ &= \underbrace{k(a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in})}_{\text{expansión por cofactores de } \det \mathbf{A} \text{ a lo largo del } i\text{-ésimo renglón}} = k \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

❑

Ejemplo 2 Teoremas 2.12 y 2.9

a) $\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 20 & 16 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 \cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 80(1 - 2) = -80$

(de la primera columna; de la segunda columna; del segundo renglón)

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 0 = 0$

(de la segunda columna; del teorema 2.9)

❑

TEOREMA 2.13 Determinante de un producto de matrices

Si tanto **A** como **B** son matrices de $n \times n$, entonces $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$.

En otras palabras, el determinante de un producto de dos matrices de $n \times n$ es igual al producto de los determinantes.

Ejemplo 3 Determinante de un producto de matrices

Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -12 & 22 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$. Ahora $\det \mathbf{AB} = -24$, $\det \mathbf{A} = -8$, $\det \mathbf{B} = 3$, y así podemos observar que

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = (-8)(3) = -24 = \det \mathbf{AB}.$$

❑

TEOREMA 2.14 Determinante inalterado

Suponga que $\mathbf{B}$ es la matriz obtenida a partir de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ multiplicando los elementos de un renglón (columna) por un número real k diferente de cero, y sumando luego el resultado a los elementos correspondientes de otro renglón (columna). Entonces $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.

Ejemplo 4 Un múltiplo de un renglón sumado a otro

Suponga que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y que la matriz $\mathbf{B}$ está definida como la matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ mediante la operación elemental de renglones,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{-3R_1+R_3}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ -11 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Al expandir por cofactores a lo largo de, digamos, la segunda columna, encontramos que $\det \mathbf{A} = 45$ y $\det \mathbf{B} = 45$. El estudiante deberá comprobar este resultado. ❑

TEOREMA 2.15 Determinante de una matriz triangular

Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz triangular de $n \times n$ (superior o inferior). Entonces

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn},$$

donde $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$.

Comprobación Demostremos el resultado de una matriz triangular inferior de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Al expandir $\det \mathbf{A}$ por cofactores a lo largo del primer renglón nos da

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - 0 \cdot a_{32}) = a_{11}a_{22}a_{33}.$$ ❑

Ejemplo 5 Determinante de una matriz triangular

a) El determinante de la matriz triangular inferior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & -4 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2) = 144.$$

b) El determinante de la matriz diagonal $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 6 \cdot 4 = -72. \qquad \square$$

Reducción de renglones Evaluar el determinante de una matriz de $n \times n$ empleando el método de expansión por cofactores requiere de un esfuerzo colosal cuando la matriz es de orden superior. Para expandir el determinante de, digamos, una matriz de 5×5 con elementos diferentes de cero se requiere la evaluación de cinco cofactores que son los determinantes de submatrices de 4×4; cada una de éstas, a su vez, requiere de cuatro cofactores adicionales que son los determinantes de submatrices de 3×3, etc. Existe un método más práctico (y programable) para evaluar el determinante de una matriz. Este método se basa en la **reducción** de una matriz a una forma triangular, mediante operaciones de renglón, y en el hecho de que los determinantes de las matrices triangulares son fáciles de evaluar (consulte el teorema 2.15).

Ejemplo 6 Reducción de un determinante a su forma triangular

Evalúe el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$ (2 es un factor común en el tercer renglón: teorema 2.12)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$ (Intercambio de los renglones primero y tercero: teorema 2.11)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$ (4 veces el primer renglón sumado al segundo: teorema 2.14)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -10 & -17 \end{vmatrix}$$ (−6 veces el primer renglón sumado al tercero: teorema 2.14)

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & 0 & 19 \end{vmatrix}$$ (2 veces el segundo renglón sumado al tercero: teorema 2.14)

$$= (-2)(1)(5)(19) = -190$$ (Teorema 2.15) $\square$

Nuestro teorema final tiene que ver con los cofactores. En la sección 2.4 estudiamos que un determinante det **A** de una matriz **A** de $n \times n$ podría ser evaluado mediante la expansión de cofactores a lo largo de cualquier renglón (columna). Esto significa que los n

elementos a_{ij} de un renglón (columna) se multiplican por los cofactores correspondientes C_{ij} y que los n productos se suman. Sin embargo, si los elementos a_{ij} de un renglón (a_{ij} de una columna) de $\mathbf{A}$ se multiplican por los cofactores correspondientes C_{kj} de un renglón diferente (C_{ik} de una columna diferente), la suma de los n productos es igual a cero.

TEOREMA 2.16 Una propiedad de los cofactores

Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$. Si $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ son los elementos presentes en el renglón i-ésimo y $C_{k1}, C_{k2}, \ldots, C_{kn}$ son los cofactores de los elementos ubicados en el k-ésimo renglón, entonces

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn} = 0 \quad \text{para } i \neq k.$$

Si $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ son los elementos de la columna j-ésima y $C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}$ son los cofactores de los elementos de la k-ésima columna, entonces

$$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \cdots + a_{nj}C_{nk} = 0 \quad \text{para } j \neq k.$$

Demostración Se demostrarán los resultados por renglones. Sea $\mathbf{B}$ la matriz que se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ permitiendo que los elementos del i-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ sean los mismos que hay en el k-ésimo renglón, es decir, $a_{i1} = a_{k1}, a_{i2} = a_{k2}, \ldots, a_{in} = a_{kn}$. Puesto que $\mathbf{B}$ tiene dos renglones iguales, a partir del teorema 2.9 se puede deducir que $\det \mathbf{B} = 0$. La expansión por cofactores a lo largo del k-ésimo renglón proporciona entonces el resultado deseado:

$$\begin{aligned} 0 = \det \mathbf{B} &= a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{kn}C_{kn} \\ &= a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \cdots + a_{in}C_{kn}. \end{aligned}$$ ❑

Ejemplo 7 Cofactores del tercer renglón y elementos del primer renglón

Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Ahora suponga que multiplicamos los elementos del primer renglón por los cofactores del tercero y sumamos los resultados; esto es,

$$\begin{aligned} a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} &= 6\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\left(-\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right) + 7\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 6(25) + 2(-40) + 7(-10) = 0. \end{aligned}$$ ❑

EJERCICIOS 2.5

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

En los problemas 1 a 10, establezca el o los teoremas apropiados de esta sección que justifiquen la igualdad dada. No expanda por cofactores los determinantes.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -6 & -8 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & -4 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 18 \\ 5 & 9 & -12 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -8 & -4 \end{vmatrix} = 0$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

En los problemas 11 a 14, evalúe el determinante de la matriz dada usando el resultado,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 5.$$

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2a_1 & a_2 & a_3 \\ 6b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 2c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

En los problemas 15 a 18, evalúe el determinante de la matriz dada sin expandir por cofactores.

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 10 \\ 0 & \frac{2}{3} & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

En los problemas 19 y 20, verifique si $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$ para la matriz $\mathbf{A}$ que se proporciona.

19. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

21. Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique si $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

22. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, donde $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$. Demuestre que $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

23. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ c & c+1 & c+2 \end{pmatrix}.$$

Sin utilizar expansión, evalúe $\det \mathbf{A}$.

24. Considere la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}.$$

Sin utilizar expansión, demuestre que $\det \mathbf{A} = 0$.

En los problemas 25 a 32, utilice el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 6 para evaluar el determinante de la matriz que se proporciona.

25. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -8 & 1 \\ 3 & -11 & 12 & 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 20 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

33. Proceda como en el ejemplo 6, y demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

34. Evalúe $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$. [*Sugerencia*: Consulte el problema 33.]

En los problemas 35 y 36, verifique el teorema 2.16 mediante la evaluación de $a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13}$ y $a_{13}C_{12} + a_{23}C_{22} + a_{33}C_{32}$ en la matriz dada.

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

37. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Verifique si

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

38. Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz de 5×5 para la que $\det \mathbf{A} = -7$. ¿Cuál es el valor de $\det(2\mathbf{A})$?

39. Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **antisimétrica** si $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ es una matriz antisimétrica de 5×5, demuestre que $\det \mathbf{A} = 0$.

40. Toma alrededor de $n!$ multiplicaciones evaluar el determinante de una matriz de $n \times n$ utilizando la expansión por cofactores, mientras que por el método de reducción de renglones, ilustrado en el ejemplo 6, se requiere de sólo $n^3/3$ operaciones aritméticas.

a) Compare el número de operaciones necesarias para ambos métodos utilizando una matriz de 25×25.

b) Si una computadora puede realizar 50 000 operaciones por segundo, compare los tiempos que le tomaría a la computadora evaluar el determinante de una matriz de 25×25 utilizando la expansión por cofactores y la reducción de renglones.

2.6 Inversa de una matriz

Introducción El concepto del determinante de una matriz cuadrada de $n \times n$ tendrá un papel importante en esta sección y en la siguiente.

2.6.1 Cálculo de la inversa

En el sistema de los números reales, si a es un número diferente de cero, entonces existe un número b tal que $ab = ba = 1$. El número b se llama inverso multiplicativo de a y se denota mediante a^{-1}. En una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ también es importante saber si podemos calcular otra matriz cuadrada $\mathbf{B}$ del mismo orden tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Tenemos la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.11 Inversa de una matriz

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. Si existe una matriz $\mathbf{B}$ de $n \times n$ tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de $n \times n$, entonces se dice que la matriz $\mathbf{A}$ es **no singular** o **invertible**. Se afirma que la matriz $\mathbf{B}$ es la **inversa** de $\mathbf{A}$.

Por ejemplo, la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es no singular o invertible ya que la matriz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es su inversa. Para comprobar esto, observe que

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

y

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

A diferencia del sistema de los números reales, donde *cada* número a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo, no toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ diferente de cero tiene una inversa.

Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La inspección de este resultado muestra que es posible obtener la matriz identidad $\mathbf{I}$ de 2×2, puesto que no hay forma de seleccionar b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} para obtener 1 como el elemento presente en el segundo renglón y la segunda columna. Hemos demostrado que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

Importante.

Una matriz de $n \times n$ que no tiene inversa se denomina matriz **singular**. Si $\mathbf{A}$ es no singular, su inversa se expresa como $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Observe que en la notación $\mathbf{A}^{-1}$ el símbolo -1 no es un exponente; en otras palabras, $\mathbf{A}^{-1}$ no es un recíproco. Asimismo, si $\mathbf{A}$ es no singular, su inversa es única.

Propiedades El teorema siguiente relaciona algunas propiedades de la inversa de una matriz.

TEOREMA 2.17 Propiedades de la inversa

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices no singulares.

i) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

ii) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

iii) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Demostración de *i)* Esta parte del teorema establece que si $\mathbf{A}$ es no singular, entonces su inversa $\mathbf{A}^{-1}$ también es no singular y *su* inversa es $\mathbf{A}$. Para demostrar que $\mathbf{A}^{-1}$ es no singular, debemos demostrar que puede encontrarse una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1} = \mathbf{I}$. Sin embargo, como suponemos que $\mathbf{A}$ es no singular, a partir de (1) sabemos que $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ y, de manera equivalente, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. La última ecuación matricial indica que la matriz requerida, la inversa de $\mathbf{A}^{-1}$, es $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Como consecuencia, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. ❑

El teorema 2.17*ii)* se puede hacer extensivo a cualquier número finito de matrices no singulares:

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_k)^{-1} = \mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{A}_{k-1}^{-1} \cdots \mathbf{A}_1^{-1},$$

esto es, la inversa de un producto de matrices no singulares es el producto de las inversas en sentido contrario.

En el estudio que sigue vamos a considerar dos maneras diferentes de encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ para una matriz no singular $\mathbf{A}$. El primer método utiliza determinantes, mientras que el segundo emplea las operaciones elementales de renglones estudiadas en la sección 2.2.

Método de la adjunta Recuerde que en la expresión (6) dada en la sección 2.4 mostramos que el cofactor C_{ij} del elemento a_{ij} de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, donde M_{ij} es el menor de a_{ij}; esto es, el determinante de la submatriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene eliminando el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $\mathbf{A}$.

DEFINICIÓN 2.12 Matriz adjunta

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. La matriz que representa a la transpuesta de la matriz de cofactores correspondientes a los elementos de $\mathbf{A}$:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

se conoce como la **adjunta** de $\mathbf{A}$, y se representa como adj $\mathbf{A}$.

El teorema siguiente proporciona una fórmula breve de la inversa de una matriz no singular en términos de la adjunta de la matriz. Sin embargo, debido a los determinantes involucrados, este método es poco manejable para $n \geq 4$.

TEOREMA 2.18 Cálculo de la inversa

Sea $\mathbf{A}$ una matriz de $n \times n$. Si el $\det \mathbf{A} \neq 0$, entonces

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}}\right) \text{adj } \mathbf{A}. \tag{2}$$

Demostración Para efectos de brevedad, demostramos el caso cuando $n = 3$. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \det \mathbf{A} & 0 & 0 \\ 0 & \det \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & \det \mathbf{A} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

puesto que $\det \mathbf{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}$, para $i = 1, 2, 3$ son las expansiones por cofactores de $\det \mathbf{A}$ a lo largo de los renglones primero, segundo y tercero, y

$$\begin{aligned} a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} &= 0 \qquad a_{11}C_{31} + a_{12}C_{32} + a_{13}C_{33} = 0 \\ a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + a_{23}C_{13} &= 0 \qquad a_{21}C_{31} + a_{22}C_{32} + a_{23}C_{33} = 0 \\ a_{31}C_{11} + a_{32}C_{12} + a_{33}C_{13} &= 0 \qquad a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} = 0 \end{aligned}$$

en vista del teorema 2.16. Por lo tanto, (3) es lo mismo que

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\det \mathbf{A}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\mathbf{I}$$

o $\mathbf{A}(1/\det \mathbf{A})$ adj $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. De manera similar, es posible demostrar exactamente de igual manera que $((1/\det \mathbf{A})$ adj $\mathbf{A})\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Así, por definición, $\mathbf{A}^{-1} = (1/\det \mathbf{A})$adj $\mathbf{A}$. ❑

Para alguna referencia futura, observemos en el caso de una matriz no singular de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

que los cofactores son $C_{11} = a_{22}$, $C_{12} = -a_{21}$, $C_{21} = -a_{12}$ y $C_{22} = a_{11}$. En este caso,

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

A partir de (2), se puede deducir que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Para una matriz no singular de 3×3,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad C_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Después de que se ha formado la adjunta de $\mathbf{A}$, (2) da

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Ejemplo 1 Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que $\det \mathbf{A} = 10 - 8 = 2$, se puede deducir a partir de (4) que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Comprobación
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & -2+2 \\ 10-10 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4 & 20-20 \\ -1+1 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \square$$

Ejemplo 2 Inversa de una matriz

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que $\det \mathbf{A} = 12$, podemos calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de (5). Los cofactores correspondientes a los elementos presentes en $\mathbf{A}$ son

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

A partir de (5) obtenemos entonces,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Se invita al lector a comprobar que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. $\square$

Ahora ya estamos en la posición de poder demostrar una condición necesaria y suficiente para que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tenga una inversa.

TEOREMA 2.19 Matrices no singulares y det $\mathbf{A}$

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es no singular si, y sólo si, $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Demostración Demostraremos primero la suficiencia. Suponga que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Entonces $\mathbf{A}$ es no singular, ya que $\mathbf{A}^{-1}$ puede encontrarse a partir del teorema 2.18.

Para demostrar la necesidad, debemos suponer que $\mathbf{A}$ es no singular y demostrar que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Ahora, a partir del teorema 2.13, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ implica

$$(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A}^{-1})(\det \mathbf{A}) = \det \mathbf{I}.$$

Sin embargo, puesto que $\det \mathbf{I} = 1$ (¿por qué?), el producto $(\det \mathbf{A})(\det \mathbf{A}^{-1}) = 1 \neq 0$ demuestra que debemos tener $\det \mathbf{A} \neq 0$. ❑

Ejemplo 3 Una matriz singular

La matriz de 2×2 matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa; esto es, $\mathbf{A}$ es singular, ya que $\det \mathbf{A} = 6 - 6 = 0$. ❑

Debido al número de determinantes que deben evaluarse, el anterior procedimiento para calcular la inversa de una matriz resulta muy tedioso cuando el orden de la matriz es grande. En el caso de matrices de 3×3 o mayores, el siguiente método es una manera particularmente eficiente de encontrar $\mathbf{A}^{-1}$.

■ **Método de las operaciones en renglones** A pesar de que estaría más allá del alcance de este libro demostrarlos, utilizaremos los resultados siguientes:

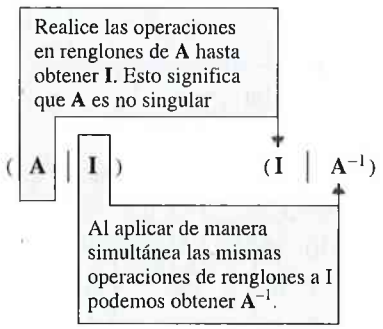
TEOREMA 2.20 Cálculo de la inversa

Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede transformarse en una matriz identidad $\mathbf{I}$ de $n \times n$ mediante una secuencia de operaciones elementales en renglones, entonces $\mathbf{A}$ es no singular. La misma secuencia de operaciones que transforma a la matriz $\mathbf{A}$ en la matriz identidad $\mathbf{I}$ transformará $\mathbf{I}$ en $\mathbf{A}^{-1}$.

Es conveniente llevar a cabo estas operaciones en renglones en las matrices $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ de manera simultánea mediante una matriz de $n \times 2n$ obtenida aumentando $\mathbf{A}$ con la identidad $\mathbf{I}$, tal como se ilustra enseguida:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

El procedimiento para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ se muestra en el diagrama siguiente:



Ejemplo 4 Obtención de la inversa mediante operaciones elementales de renglones

Encuentre la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Solución Utilizaremos la misma notación que en la sección 2.2, cuando redujimos la matriz aumentada a la forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{2R_1+R_2 \\ 5R_1+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{3}R_2 \\ \frac{1}{5}R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{17}{10} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{30R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{-\frac{1}{2}R_3+R_1 \\ -\frac{5}{3}R_3+R_2}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -10 & 6 \end{array}\right)$$

Puesto que **I** aparece a la izquierda de la línea vertical, podemos concluir que la matriz ubicada a la derecha de la línea es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Si la reducción de renglones de $(\mathbf{A}|\mathbf{I})$ nos lleva a la situación

$$(\mathbf{A}|\mathbf{I}) \overset{\substack{\text{operaciones} \\ \text{con renglones}}}{\Rightarrow} (\mathbf{B}|\mathbf{C}),$$

donde la matriz **B** contiene un renglón de ceros, entonces **A** es necesariamente singular. Ya que reducir más **B** siempre nos da otra matriz con un renglón de ceros, nunca podremos transformar **A** en **I**.

Ejemplo 5 Una matriz singular

La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ no tiene inversa, ya que

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-2R_1+R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-6R_1+R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{-R_2+R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Puesto que la matriz ubicada a la izquierda de la barra vertical tiene un renglón de ceros, podemos detenernos en este punto y concluir que **A** es singular. ❑

2.6.2 Utilización de la inversa para resolver sistemas

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{6}$$

puede escribirse de manera breve como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

■ **Caso especial** Suponga que $m = n$ en (6), de tal forma que la matriz de coeficientes **A** es de $n \times n$. En particular, si **A** es no singular, entonces el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ puede resolverse multiplicando ambas ecuaciones por $\mathbf{A}^{-1}$. A partir de $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, obtenemos $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Debido a que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{IX} = \mathbf{X}$, tenemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \tag{7}$$

Ejemplo 6 Uso de la ecuación (7) para resolver un sistema

Utilice la inversa de la matriz de coeficientes para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 9x_2 &= 15 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 16. \end{aligned}$$

Solución El sistema dado puede escribirse como,

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Debido a que $\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$, la matriz de coeficientes es no singular. Como consecuencia, a partir de (4) se obtiene

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Al utilizar (7) podemos deducir que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{39}\begin{pmatrix} 234 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

y, por lo tanto, $x_1 = 6$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$. ❑

Ejemplo 7 Uso de la ecuación (7) para resolver un sistema

Utilice la inversa de la matriz de coeficientes para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + \qquad\quad x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Solución Ya calculamos la inversa de la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

en el ejemplo 4. Por lo tanto, (7) nos da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -8 & 17 & -10 \\ 5 & -10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 62 \\ -36 \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia, $x_1 = 19$, $x_2 = 62$ y $x_3 = -36$. ❑

■ **Unicidad** Cuando $\det \mathbf{A} \neq 0$ la solución del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ es única. Suponga que no es así, es decir, que $\det \mathbf{A} \neq 0$ y que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ son dos vectores solución *diferentes*. Entonces, $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{AX}_2 = \mathbf{B}$ implican que $\mathbf{AX}_1 = \mathbf{AX}_2$. Puesto que $\mathbf{A}$ es no singular, $\mathbf{A}^{-1}$ existe, por lo que $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_1) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AX}_2)$ y $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}_1 = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{X}_2$. Esto nos genera $\mathbf{IX}_1 = \mathbf{IX}_2$ o $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$, lo cual contradice nuestro supuesto de que $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ eran vectores solución diferentes.

■ **Sistemas homogéneos** Un sistema de ecuaciones homogéneo puede escribirse como $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$. Recuerde que un sistema homogéneo siempre tiene la solución trivial $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ y posiblemente un número infinito de soluciones. En el teorema siguiente podremos observar que los sistemas homogéneos de n ecuaciones con n incógnitas *solamente* tienen la solución trivial cuando $\mathbf{A}$ es no singular.

TEOREMA 2.21 Solamente la solución trivial

Un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es no singular.

Demostración Comprobemos la parte de suficiencia del teorema. Suponga que $\mathbf{A}$ es no singular. Entonces, mediante (7), obtenemos la solución única $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ❑

El teorema siguiente responderá la pregunta: ¿cuándo un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial? Recuerde que si un sistema homogéneo tiene una solución no trivial, debe poseer un número infinito de soluciones.

TEOREMA 2.22 Existencia de soluciones no triviales

Un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es singular.

En vista del teorema 2.22, podemos concluir que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ tiene

- solamente la solución trivial si, y sólo si, $\det \mathbf{A} \neq 0$, y
- una solución no trivial si, y sólo si, $\det \mathbf{A} = 0$.

El último resultado se utilizará en la sección 2.8.

Comentarios

i) Como una forma práctica de resolver n ecuaciones lineales con n incógnitas, el uso de una matriz inversa brinda algunas ventajas sobre el método presentado en la sección 2.2. Sin embargo, en algunas aplicaciones, a menudo necesitamos resolver un sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ varias veces; esto es, necesitamos analizar las soluciones del sistema correspondientes a la misma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ pero con vectores de entrada $\mathbf{B}$ diferentes. En este caso, el simple cálculo de $\mathbf{A}^{-1}$ permite obtener estas soluciones de manera rápida mediante la multiplicación de matrices $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

ii) En la definición 2.11 estudiamos que si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$ y existe otra matriz $\mathbf{B}$ de $n \times n$ que se puede intercambiar con $\mathbf{A}$, de tal forma que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{y} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}, \tag{8}$$

entonces $\mathbf{B}$ es la inversa de $\mathbf{A}$. Aunque la multiplicación de matrices, en general, no es conmutativa, la condición dada en (8) de alguna forma es menos estricta en este sentido: si calculamos una matriz $\mathbf{B}$ de $n \times n$ para la que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, entonces puede demostrarse que $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ también, y que $\mathbf{B}$ es la inversa de $\mathbf{A}$. Como consecuencia de este resultado, si en secciones subsecuentes de este capítulo deseáramos demostrar que cierta matriz $\mathbf{B}$ es la inversa de una matriz $\mathbf{A}$ dada, será suficiente probar sólo que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. No necesitamos demostrar que $\mathbf{B}$ se puede intercambiar con $\mathbf{A}$ para dar $\mathbf{I}$.

EJERCICIOS 2.6

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-4.

2.6.1 Encontrar la inversa

En los problemas 1 y 2, compruebe que la matriz $\mathbf{B}$ es la inversa de la matriz $\mathbf{A}$.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

En los problemas 3 a 14, aplique el teorema 2.19 para determinar si la matriz dada es singular o no singular. Si es no singular, utilice el teorema 2.18 para encontrar la inversa.

3. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -2\pi & -\pi \\ -\pi & \pi \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 11 & 14 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 15 a 26, utilice el teorema 2.20 para encontrar la inversa de la matriz dada o para demostrar que no existe.

15. $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 27 y 28, utilice las matrices dadas para encontrar $(\mathbf{AB})^{-1}$.

27. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

28. $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

29. Si $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor de $\mathbf{A}$?

30. Si $\mathbf{A}$ es no singular, entonces $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$. Compruebe lo anterior para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$.

31. Encuentre un valor de x tal que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x & -4 \end{pmatrix}$ sea su propia inversa.

32. Calcule la inversa de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$.

33. Se dice que una matriz no singular $\mathbf{A}$ es **ortogonal** si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

a) Demuestre que la matriz del problema 32 es ortogonal.

b) Demuestre que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

34. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal (consulte el problema 33), entonces $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

35. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices no singulares de $n \times n$, utilice el teorema 2.19 para demostrar que $\mathbf{AB}$ es no singular.

36. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $n \times n$. Demuestre que si $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ son singulares, entonces $\mathbf{AB}$ es singular.

37. Demuestre que si $\mathbf{A}$ es una matriz no singular, entonces $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

38. Demuestre que si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, entonces tanto $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ como $\mathbf{A}$ es singular.

39. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $n \times n$ y que $\mathbf{A}$ es no singular. Demuestre que si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

40. Suponga que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de $n \times n$ y que $\mathbf{A}$ es no singular. Demuestre que si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

41. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices no singulares de $n \times n$, ¿necesariamente $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es no singular?

42. Considere la matriz diagonal de 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Determine las condiciones necesarias para que $\mathbf{A}$ sea no singular. Si $\mathbf{A}$ es no singular, encuentre $\mathbf{A}^{-1}$. Generalice sus resultados a una matriz diagonal de $n \times n$.

2.6.2 Utilización de la matriz inversa en la resolución de sistemas

En los problemas 43 a 50, utilice la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones dado.

43. $x_1 + x_2 = 4$
$2x_1 - x_2 = 14$

44. $x_1 - x_2 = 2$
$2x_1 + 4x_2 = -5$

45. $4x_1 - 6x_2 = 6$
$2x_1 + x_2 = 1$

46. $x_1 + 2x_2 = 4$
$3x_1 + 4x_2 = -3$

47. $x_1 + x_3 = -4$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$5x_1 - x_2 = 6$

48. $x_1 - x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -3$

49. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3$
$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$

50. $x_1 - x_3 = 2$
$x_2 + x_3 = 1$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -5$
$x_3 - x_4 = 3$

En los problemas 51 y 52, escriba el sistema en la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Utilice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para resolver el sistema para cada matriz $\mathbf{B}$.

51. $7x_1 - 2x_2 = b_1$,
$3x_1 - 2x_2 = b_2$,

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \end{pmatrix}$

52. $x_1 + 2x_2 + 5x_3 = b_1$
$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = b_2$,
$-x_1 + x_2 + 2x_3 = b_3$

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

En los problemas 53 a 56, determine, sin resolverlo, si el sistema de ecuaciones homogéneo que se proporciona tiene solamente la solución trivial o una solución no trivial.

53. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
$4x_1 - x_2 + x_3 = 0$
$5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

54. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$
$-2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$

55. $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$
$5x_2 + 2x_4 = 0$
$x_1 + x_3 - x_4 = 0$
$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

56. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

57. El sistema de ecuaciones de las corrientes i_1, i_2 e i_3 de la red que se muestra en la figura 2.6 es

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ -R_1 i_1 + R_2 i_2 &= E_2 - E_1 \\ - R_2 i_2 + R_3 i_3 &= E_3 - E_2 \end{aligned}$$

donde R_k y E_k, $k = 1, 2, 3$, son constantes.

a) Exprese el sistema como una ecuación matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

b) Demuestre que la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es no singular.

c) Utilice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para encontrar las corrientes.

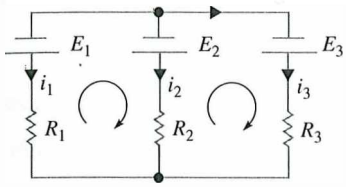


Figura 2.6 Red para el problema 57

58. Considere la placa cuadrada que se muestra en la figura 2.7, con las temperaturas que se indican en cada uno de los lados. Bajo ciertas circunstancias, se puede demostrar que las temperaturas aproximadas u_1, u_2, u_3 y u_4 localizadas en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4, respectivamente, están dadas por

$$u_1 = \frac{u_2 + u_4 + 100 + 100}{4}$$

$$u_2 = \frac{200 + u_3 + u_1 + 100}{4}$$

$$u_3 = \frac{200 + 100 + u_4 + u_2}{4}$$

$$u_4 = \frac{u_3 + 100 + 100 + u_1}{4}.$$

a) Demuestre que el sistema anterior puede escribirse como la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -300 \\ -300 \\ -200 \end{pmatrix}.$$

b) Resuelva el sistema de la parte *a*) encontrando la inversa de la matriz de coeficientes.

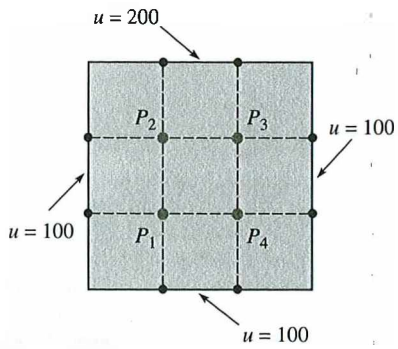


Figura 2.7 Placa del problema 58

2.7 Regla de Cramer

■ **Introducción** Al final de la sección anterior pudimos observar que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ tiene precisamente una solución cuando $\det \mathbf{A} \neq 0$. Esta solución, como se verá ahora, puede expresarse en términos de determinantes. Por ejemplo, el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

tiene la solución

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

siempre y cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Puede reconocerse que los numeradores y denominadores mostrados en (2) son determinantes. Esto es, el sistema (1) tiene una única solución,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{3}$$

siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. En esta sección generalizamos el resultado que se muestra en (2).

Utilización de determinantes para resolver sistemas En un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{4}$$

es conveniente definir una matriz especial,

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,k-1} & \overset{k\text{-ésima columna}}{\overset{\downarrow}{b_1}} & a_{1\,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,k-1} & b_2 & a_{2\,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,k-1} & b & a_{n\,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

En otras palabras, $\mathbf{A}_k$ es la misma matriz $\mathbf{A}$ excepto que la columna k-ésima de $\mathbf{A}$ se ha reemplazado por elementos de la matriz columna

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

La generalización de (3), conocida como **regla de Cramer**, está dada en el teorema siguiente.

TEOREMA 2.23 Regla de Cramer

Sea $\mathbf{A}$ la matriz de coeficientes del sistema (1). Si $\det \mathbf{A} \neq 0$, entonces la solución de (1) está dada por

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ está definida en (5).

Demostración En primera instancia, escribimos el sistema (1) como $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Puesto que $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{A}^{-1}$ existe, por lo que

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora el elemento del renglón k-ésimo de la última matriz es

$$x_k = \frac{b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \cdots + b_nC_{nk}}{\det \mathbf{A}}. \tag{7}$$

Sin embargo, $b_1C_{1k} + b_2C_{2k} + \ldots + b_nC_{nk}$ es la expansión por cofactores de $\det \mathbf{A}_k$, donde $\mathbf{A}_k$ es la matriz dada en (5) junto con la k-ésima columna. De esta manera, tenemos que $x_k = \det \mathbf{A}_k/\det \mathbf{A}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. ❑

Ejemplo 1 Utilización de la regla de Cramer para resolver un sistema

Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Solución La solución requiere que se evalúen los cuatro determinantes:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 13, \qquad \det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -39,$$

$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 78, \qquad \det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 52.$$

Por lo tanto, (3) da

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = -3, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} = 6, \quad x_3 = \frac{\det \mathbf{A}_3}{\det \mathbf{A}} = 4. \qquad ❑$$

Comentarios

Igual que en el método de la sección anterior, la regla de Cramer no es una forma muy práctica de resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas. Para $n \geq 4$, el trabajo que se requiere para evaluar los determinantes se vuelve enorme. Sin embargo, la regla de Cramer se utiliza *algunas veces*, y resulta importante desde el punto de vista teórico.

Al aplicar la regla de Cramer se pueden tomar algunos atajos. En el ejemplo 1, digamos, en realidad no tuvimos que calcular $\det \mathbf{A}_3$ puesto que una vez encontrados los valores de x_1 y x_2 el valor de x_3 puede encontrarse utilizando una de las ecuaciones del sistema.

EJERCICIOS 2.7

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 10, resuelva el sistema de ecuaciones dado mediante la regla de Cramer.

1. $\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - 4x_2 &= -6 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 0.1x_1 - 0.4x_2 &= 0.13 \\ x_1 - x_2 &= 0.4 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 0.21x_1 + 0.57x_2 &= 0.369 \\ 0.1x_1 + 0.2\,x_2 &= 0.135 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= -2 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 5r + 4s &= -1 \\ 10r - 6s &= 5 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -4 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 6x_3 &= -2 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} u + 2v + w &= 8 \\ 2u - 2v + 2w &= 7 \\ u - 4v + 3w &= 1 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 8 \\ -x + 2z &= 12 \\ 3x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$

11. Utilice la regla de Cramer para determinar la solución del sistema

$$\begin{aligned} (2 - k)x_1 + kx_2 &= 4 \\ kx_1 + (3 - k)x_2 &= 3. \end{aligned}$$

¿Para qué valor(es) de k el sistema es inconsistente?

12. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \varepsilon x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Cuando el valor de ε es muy cercano a 1, las líneas que forman el sistema son casi paralelas.

a) Utilice la regla de Cramer para demostrar que una solución del sistema es $x_1 = 1 - \dfrac{1}{\varepsilon - 1}, x_2 = \dfrac{1}{\varepsilon - 1}$.

b) Se dice que el sistema está en **condición anormal** puesto que pequeños cambios en los datos de entrada (por ejemplo, los coeficientes) provocan un cambio grande o significativo en la salida o solución. Compruebe lo anterior encontrando la solución del sistema para $\varepsilon = 1.01$ y, después, para $\varepsilon = 0.99$.

13. Las magnitudes de T_1 y T_2 de la tensión presente en los cables de soporte que se muestran en la figura 2.8 satisfacen las ecuaciones

$$(\cos 25°)T_1 - (\cos 15°)T_2 = 0$$
$$(\text{sen } 25°)T_1 + (\text{sen } 15°)T_2 = 300.$$

Utilice la regla de Cramer para obtener T_1 y T_2.

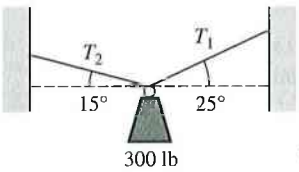


Figura 2.8 Cables de soporte del problema 13

14. El bloque de 400 libras que se muestra en la figura 2.9 se mantiene sin resbalar a lo largo del plano inclinado gracias a la fricción y a una fuerza F de magnitud más pequeña. Si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado es de 0.5, entonces la magnitud de la fuerza de fricción es de $0.5N$, donde N es la magnitud de la fuerza perpendicular ejercida por el plano sobre el bloque. Utilice el hecho de que el sistema se encuentra en equilibrio para establecer un sistema de ecuaciones y encontrar F y N. Aplique la regla de Cramer para calcular F y N.

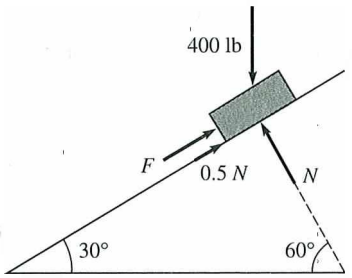


Figura 2.9 Plano inclinado del problema 14

15. Como se muestra en la figura 2.10, un circuito consta de dos baterías con resistencias internas r_1 y r_2 conectadas en paralelo con un resistor. Utilice la regla de Cramer para demostrar que la corriente i que pasa por la resistencia está dada por

$$i = \frac{r_1E_2 + r_2E_1}{r_1R + r_2R + r_1r_2}.$$

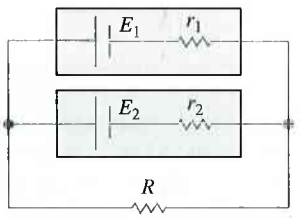


Figura 2.10 Circuito para el problema 15

2.8 El problema del valor propio

Introducción Si **A** es una matriz de $n \times n$ y **K** una matriz de $n \times 1$ (vector columna), entonces el producto **AK** está definido y es otra matriz de $n \times 1$. En muchas aplicaciones, es importante determinar si existen matrices **K** de $n \times 1$ diferentes de cero tales que el vector producto **AK** sea un múltiplo de una constante λ con la propia **K**. A la situación que plantea resolver $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ para vectores **K** diferentes de cero se le llama el **problema del valor propio** de la matriz **A**.

Una definición Los comentarios introductorios anteriores se resumen en la definición siguiente.

DEFINICIÓN 2.13 Valores propios o eigenvalores y vectores propios o eigenvectores

Sea **A** una matriz de $n \times n$. Se dice que un número λ es un **valor propio** de **A** si existe un vector solución **K** diferente de cero del sistema lineal

$$\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}. \qquad (1)$$

Se dice que el vector solución **K** es un **vector propio** que corresponde al valor propio λ.

La palabra "eigenvalor" es una combinación de términos en alemán e inglés adaptados a partir de la palabra alemana *eigenwert* que, traducida literalmente, significa "valor apropiado". A los valores y vectores propios se les conoce también como **valores característicos** y **vectores característicos**, respectivamente.

El método de eliminación de Gauss-Jordan que se presentó en la sección 2.2 puede utilizarse para encontrar los **vectores propios** de una matriz cuadrada **A**.

Ejemplo 1 Verificación de un vector propio

Compruebe que $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución Realizando la multiplicación **AK** podemos observar que

$$\mathbf{AK} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\overset{\text{valor propio}}{\overset{\downarrow}{-2}})\mathbf{K}.$$

Podemos observar, a partir de la línea anterior y la definición 2.13, que $\lambda = -2$ es un valor propio de **A**. ❑

Al utilizar las propiedades del álgebra matricial, podemos escribir (1) en la forma alterna

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

donde **I** es la identidad multiplicativa. Si hacemos

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

entonces (2) es lo mismo que

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)k_1 + \quad & a_{12}k_2 + \cdots + \quad a_{1n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - \lambda)k_2 + \cdots + \quad & a_{2n}k_n = 0 \\ \vdots \qquad & \vdots \\ a_{n1}k_1 + \quad & a_{n2}k_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)k_n = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

A pesar de que la solución obvia de (3) es $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_n = 0$, estamos buscando solamente soluciones no triviales. Sabemos que un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y sólo si, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a cero. Por lo tanto, para encontrar una solución **K** diferente de cero para (2), debemos tener que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{4}$$

La inspección de (4) muestra que la expansión por cofactores de $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ da como resultado un polinomio de grado n en λ. La ecuación (4) se llama **ecuación característica** de **A**. Por lo tanto, *los valores propios de* **A** *son las raíces de la ecuación característica.* Para encontrar el vector propio correspondiente a un valor propio λ, simplemente resolvemos el sistema de ecuaciones $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$ aplicando el método de eliminación Gauss-Jordan a la matriz aumentada $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$.

Ejemplo 2 Cálculo de valores y vectores propios

Encuentre los valores y vectores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución Para expandir el determinante a su ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

utilizamos los cofactores del segundo renglón. Se puede deducir que la ecuación característica es

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \quad \text{o} \quad \lambda(\lambda + 4)(\lambda - 3) = 0.$$

De aquí que los valores propios sean $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = 3$. Para calcular los vectores propios, debemos reducir $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|\mathbf{0})$ tres veces correspondientes a los tres valores propios distintos.

Para $\lambda_1 = 0$, tenemos

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-6R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{13}R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-2R_2+R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, podemos observar que $k_1 = -\frac{1}{13}k_3$ y $k_2 = -\frac{6}{13}k_3$. Seleccionando $k_3 = -13$ nos da el vector propio*

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-6R_1+R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{9}R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-2R_2+R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica que $k_1 = -k_3$ y $k_2 = 2k_3$. Seleccionamos $k_3 = 1$ y entonces resulta un segundo vector propio

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

*Desde luego, k_3 podría seleccionarse como cualquier valor diferente de cero. En otras palabras, una constante diferente de cero que sea múltiplo de un vector propio es también un vector propio.

Por último, para $\lambda_3 = 3$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y así $k_1 = -k_3$ y $k_2 = -\frac{3}{2}k_3$. La elección de que $k_3 = -2$ da como resultado un tercer vector propio,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Cuando una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se puede demostrar que es posible calcular un conjunto de n vectores propios lineales independientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$. Sin embargo, cuando la ecuación característica tenga raíces repetidas, puede que no sea posible calcular n vectores propios lineales independientes para $\mathbf{A}$.

Ejemplo 3 Cálculo de valores y vectores propios

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Solución A partir de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ -1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 = 0,$$

podemos observar que $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ es un valor propio de multiplicidad 2. En el caso de una matriz de 2×2, no es necesario utilizar el método de eliminación de Gauss-Jordan. Para encontrar el o los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = 5$, recurrimos al sistema $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0})$ en su forma equivalente

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Es evidente, a partir de este sistema, que $k_1 = 2k_2$. Por lo tanto, si seleccionamos $k_2 = 1$, encontraremos un solo vector propio $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Ejemplo 4 Cálculo de valores y vectores propios

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 9 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 11)(\lambda - 8)^2 = 0$$

muestra que $\lambda_1 = 11$ y que $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ es un valor propio de multiplicidad 2.

Para $\lambda_1 = 11$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - 11\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De aquí que $k_1 = k_3$ y $k_2 = k_3$. Si $k_3 = 1$, entonces

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para $\lambda_2 = 8$ tenemos

$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

En la ecuación $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ podemos seleccionar libremente dos de las variables de forma arbitraria. Por un lado, seleccionando $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ y, por el otro, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$, obtenemos dos vectores propios lineales independientes:

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que corresponden a un solo valor propio. ❑

Valores propios complejos Una matriz $\mathbf{A}$ puede tener **valores propios complejos**

TEOREMA 2.24 Valores y vectores propios complejos

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada con elementos reales. Si $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, es un valor propio complejo de $\mathbf{A}$, entonces su conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es un valor propio de $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{K}$ es el vector propio correspondiente a λ, entonces su conjugado $\overline{\mathbf{K}}$ es un vector propio correspondiente a $\overline{\lambda}$.

Demostración Puesto que $\mathbf{A}$ es una matriz de elementos reales, la ecuación característica $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ es una ecuación polinomial con coeficientes reales. A partir del álgebra sabemos que las raíces complejas de dichas ecuaciones se presentan en pares conjugados. En otras palabras, si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz, entonces $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ lo es también. Ahora dejemos que $\mathbf{K}$ sea un vector propio de $\mathbf{A}$ correspondiente a λ. Por definición, $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. Calculando los conjugados complejos de la última ecuación tenemos

$$\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}} \quad \text{o} \quad \mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}},$$

puesto que $\mathbf{A}$ es una matriz real. La última ecuación muestra que $\overline{\mathbf{K}}$ es un vector propio correspondiente a $\overline{\lambda}$. ❑

Ejemplo 5 Valores propios y vectores propios complejos

Calcule los valores y vectores propios de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica es

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 5 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

A partir de la fórmula cuadrática, encontramos que $\lambda_1 = 5 + 2i$ y $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = 5 - 2i$.

Ahora, para $\lambda_1 = 5 + 2i$, debemos resolver

$$\begin{aligned} (1 - 2i)k_1 - \quad\; k_2 &= 0 \\ 5k_1 - (1 + 2i)k_2 &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que $k_2 = (1 - 2i)k_1$,* se puede deducir que, después de seleccionar $k_1 = 1$, ese vector propio es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Del teorema 2.24, podemos observar que un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = 5 - 2i$ es

$$\mathbf{K}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Nuestro último teorema se deduce inmediatamente a partir del hecho de que el determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior o diagonal, es el producto de los elementos de la diagonal.

TEOREMA 2.25 Matrices triangular y diagonal

Los eigenvalores de una matriz triangular superior, triangular inferior o diagonal son los elementos de la diagonal principal.

*Observe que la segunda ecuación es simplemente $1 + 2i$ veces la primera.

EJERCICIOS 2.8

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 a 6, determine cuáles de los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz **A** dada. Proporcione los valores propios correspondientes.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

En los problemas 7 a 22, calcule los valores y vectores propios de la matriz dada.

7. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 9 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ 22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los valores propios de $\mathbf{A}^{-1}$ son los recíprocos de los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ no singular. Además, los vectores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ son iguales. En los problemas 23 y 24, compruebe estos hechos para la matriz dada.

23. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 24. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Una matriz $\mathbf{A}$ es singular si, y sólo si $\lambda = 0$ es un eigenvalor. En los problemas 25 y 26, compruebe que una matriz $\mathbf{A}$ dada es singular. Calcule la ecuación característica de $\mathbf{A}$ y demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor.

25. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 26. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \\ 7 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Tareas para el laboratorio de cómputo

27. Se dice que una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ es una **matriz estocástica** si ninguno de sus elementos es negativo y la suma de los elementos de cada renglón (o la suma de los elementos de cada columna) da como resultado máximo un 1. Las matrices estocásticas son de gran importancia en la teoría de la probabilidad.

a) Compruebe que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1,$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

son matrices estocásticas.

b) Utilice un programa de cómputo para álgebra lineal o un sistema asistido por computadora para encontrar los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A}$ de 3×3 de la parte *a*). Forme al menos seis matrices estocásticas más de diferentes tamaños, 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5. Calcule los valores y vectores propios de cada matriz. Si encuentra un patrón, formule una conjetura y después trate de demostrarla.

c) En la matriz $\mathbf{A}$ de 3×3 de la parte *a*), utilice un programa de cómputo para calcular $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4, \ldots$ Repita el proceso en las matrices que usted formó en *b*). Si encuentra un patrón, formule una conjetura y después trate de demostrarla.

2.9 Potencias de las matrices

Introducción En algunas ocasiones es importante poder calcular de manera rápida una potencia de $\mathbf{A}^m$, siendo m un entero positivo, de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$:

$$\mathbf{A}^m = \underbrace{\mathbf{AAA} \cdots \mathbf{A}}_{m \text{ número de factores}}.$$

Desde luego, el cálculo de $\mathbf{A}^m$ podría hacerse con un programa de cómputo apropiado o escribiendo un programa corto; sin embargo, aún así, usted debe estar consciente de que no resulta eficiente utilizar la fuerza bruta para realizar multiplicaciones sucesivas: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{AA}^2$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{AAAA} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^3) = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^2$, y así por el estilo.

Cálculo de $\mathbf{A}^m$ Vamos a esquematizar un método alterno para efectuar el cálculo de $\mathbf{A}^m$ mediante el teorema siguiente, el cual se conoce como teorema Cayley-Hamilton.

TEOREMA 2.26 Teorema Cayley-Hamilton

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ satisface su propia ecuación característica.

Si $(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$ es la ecuación característica de $\mathbf{A}$, entonces el teorema 2.26 establece que,

$$(-1)^n\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Matrices de orden 2 La ecuación característica de la matriz de 2×2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ es $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, y los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$. El teorema 2.26 implica que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = 0$, o, despejando el valor más elevado de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}. \tag{2}$$

Ahora, si multiplicamos (2) por $\mathbf{A}$, obtenemos $\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2$, y si utilizamos otra vez (2) para eliminar $\mathbf{A}^2$ en el lado derecho de esta nueva ecuación, entonces

$$\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} + (2\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{A}.$$

Al continuar de esta manera —en otras palabras, multiplicando el último resultado por $\mathbf{A}$ y utilizando (2) para eliminar $\mathbf{A}^2$— obtenemos la sucesión de potencias de $\mathbf{A}$ expresada solamente en términos de la matriz identidad $\mathbf{I}$ y $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^4 &= 6\mathbf{I} + 5\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^5 &= 10\mathbf{I} + 11\mathbf{A} \\ \mathbf{A}^6 &= 22\mathbf{I} + 21\mathbf{A} \end{aligned} \tag{3}$$

y así sucesivamente (compruébelo). Así, por ejemplo,

$$\mathbf{A}^6 = 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 21\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 84 \\ -21 & 85 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ahora podemos determinar c_k sin efectuar en realidad las multiplicaciones y sustituciones sucesivas como hicimos en (3). En primera instancia, observe que debido a que la ecuación característica de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ puede escribirse como $\lambda^2 = 2 + \lambda$, resultados similares a (3) deben ser válidos para los valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, esto es, $\lambda^3 = 2 + 3\lambda$, $\lambda^4 = 6 + 5\lambda$, $\lambda^5 = 10 + 11\lambda$, $\lambda^6 = 22 + 21\lambda, \ldots$. Se puede deducir entonces que las ecuaciones

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} \quad \text{y} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda \tag{5}$$

son válidas *para el mismo par de constantes* c_0 y c_1. Podemos determinar las constantes c_0 y c_1 fijando simplemente los valores $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$ en la última ecuación de (5) y resolviendo el sistema resultante de dos ecuaciones con dos incógnitas. La solución del sistema

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 + c_1(-1) \\ 2^m &= c_0 + c_1(2) \end{aligned}$$

es $c_0 = \frac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m]$, $c_1 = \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m]$. Ahora, sustituyendo estos coeficientes en la primera ecuación de (5), sumando las dos matrices y simplificando cada elemento, obtenemos

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[-2^m + 4(-1)^m] & \frac{4}{3}[2^m - (-1)^m] \\ -\frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^{m+2} - (-1)^m] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Usted deberá comprobar el resultado de (4) estableciendo el valor $m = 6$ en (6). Observe que (5) y (6) son válidas para $m \geq 0$ ya que $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$.

Matrices de orden n Si la matriz $\mathbf{A}$ fuera de 3×3, entonces la ecuación característica (1) sería una ecuación polinomial cúbica y la analogía de (2) nos permitiría expresar $\mathbf{A}^3$ en términos de $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$. Podemos proceder como se acaba de ilustrar y escribir cualquier potencia de $\mathbf{A}^m$ en términos de $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^2$. En general, para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, podemos escribir

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \cdots + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1},$$

donde cada uno de los coeficientes c_k, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, depende del valor de m.

Ejemplo 1 $\mathbf{A}^m$ para una matriz de 3×3

Calcule $\mathbf{A}^m$ para $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución La ecuación característica de $\mathbf{A}$ es $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ o $\lambda^3 = -2 + \lambda + 2\lambda^2$, y los valores propios son $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 2$. A partir del análisis anterior, sabemos que los mismos coeficientes son válidos en las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 \quad \text{y} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2. \tag{7}$$

A su vez, asignar $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ en la última ecuación genera tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 - c_1 + c_2 \\ 1 &= c_0 + c_1 + c_2 \\ 2^m &= c_0 + 2c_1 + 4c_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Resolver (8) nos da

$$\begin{aligned} c_0 &= \tfrac{1}{3}[3 + (-1)^m - 2^m], \\ c_1 &= 2[1 - (-1)^m], \\ c_2 &= \tfrac{1}{6}[-3 + (-1)^m + 2^{m+1}]. \end{aligned}$$

Después de calcular $\mathbf{A}^2$, sustituimos estos coeficientes en la primera ecuación de (7) y simplificamos los elementos de la matriz resultante. El resultado es

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}[9 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-9 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \\ 1 - 2^m & 2^m & 2^m - 1 \\ \frac{1}{6}[3 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-3 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, con $m = 10$,

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} -340 & 341 & 341 \\ -1023 & 1024 & 1023 \\ -341 & 341 & 342 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

■ **Cálculo de la inversa** Suponga que $\mathbf{A}$ es una matriz no singular. El que $\mathbf{A}$ satisfaga su propia ecuación característica puede utilizarse para calcular $\mathbf{A}^{-1}$ como una combinación lineal de potencias de $\mathbf{A}$. Por ejemplo, acabamos de ver que la matriz no singular $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ satisface $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = 0$. Despejando la matriz identidad obtenemos $\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 - \mathbf{A}$. Multiplicando el último resultado por $\mathbf{A}^{-1}$, encontramos que $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}$. En otras palabras,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Comentarios

Existen algunos problemas evidentes al usar el método recién mostrado para calcular $\mathbf{A}^m$. Si, por ejemplo, la matriz del ejemplo 1 tuviera un eigenvalor de multiplicidad dos, entonces tendríamos, en lugar de tres ecuaciones y tres incógnitas como en (8), solamente dos ecuaciones con tres incógnitas. ¿Cómo calculamos los coeficientes *únicos* c_0, c_1 y c_2? Consulte los problemas 11 a 14 de los ejercicios 2.9. También, en el caso de matrices de tamaños grandes que tienen valores propios diferentes, el cálculo de $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ es muy tedioso de hacer a mano.

EJERCICIOS 2.9

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-5.

En los problemas 1 y 2, demuestre que la matriz dada satisface su propia ecuación característica.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 3 a 10, utilice el método presentado en esta sección para calcular $\mathbf{A}^m$. Aplique el resultado así obtenido y encuentre el valor de la potencia indicada de la matriz $\mathbf{A}$.

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; m = 3$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}; m = 4$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; m = 5$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; m = 6$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; m = 10$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; m = 6$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; m = 10$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}; m = 8$

En los problemas 11 a 12, demuestre que la matriz dada tiene un eigenvalor λ_1 de multiplicidad dos. Como consecuencia, las ecuaciones $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda$ (Problema 11) y $\lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2$ (Problema 12) no proporcionan las suficientes ecuaciones independientes como para formar un sistema y determinar los coeficientes c_i. Utilice la derivada (con respecto a λ) para cada una de estas ecuaciones evaluada en λ_1 como la ecuación extra necesaria para formar un sistema. Calcule $\mathbf{A}^m$ y utilice este resultado para calcular la potencia indicada de la matriz $\mathbf{A}$.

11. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}; \quad m = 6$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}; \quad m = 5$

13. Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de cada matriz. En este caso, el coeficiente c_0 de la ecuación característica (1) es 0. Calcule $\mathbf{A}^m$ en cada caso. En las partes *a*) y *b*), explique por qué no es necesario despejar en ningún sistema los coeficientes c_i para determinar $\mathbf{A}^m$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

14. En su obra *Liber Abbaci*, publicada en 1202, Leonardo Fibonacci de Pisa realizó especulaciones acerca de la reproducción de los conejos:

¿Cuántos pares de conejos se tendrán en un año si, comenzando con un solo par, cada mes un par engendra un nuevo par que a su vez puede procrear a partir del segundo mes en adelante?

La respuesta a esta pregunta está contenida en una secuencia conocida como serie de Fibonacci.

						Después de cada mes						
Inicio n =	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Pares adultos	1	1	2	3	5	8	13	21	...				
Pares bebés	0	1	1	2	3	5	8	13	...				
Pares totales	1	2	3	5	8	13	21	34	...				

Cada uno de los tres renglones que describen a los pares de conejos es una serie de Fibonacci y puede definirse recursivamente empleando una **ecuación diferencial de segundo orden** $x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, donde x_0 y x_1 dependen del renglón. Por ejemplo, para el primer renglón que designa pares adultos de conejos, $x_0 = 1, x_1 = 1$.

a) Si dejamos que $y_{n-1} = x_{n-2}$, entonces $y_n = x_{n-1}$, y la ecuación de diferencia puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

$$y_n = x_{n-1}.$$

Escriba este sistema en la forma matricial $\mathbf{X}_n = \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$

b) Demuestre que

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_2\lambda_1^m - \lambda_1\lambda_2^m + \lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \dfrac{\lambda_2^m - \lambda_1^m}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{\lambda_2\lambda_1^m - \lambda_1\lambda_2^m}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}$$

o

$$\mathbf{A}^m = \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^{m+1} - (1-\sqrt{5})^{m+1} & 2(1+\sqrt{5})^m - 2(1-\sqrt{5})^m \\ 2(1+\sqrt{5})^m - 2(1-\sqrt{5})^m & (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^m - (1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^m \end{pmatrix},$$

donde $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ son los valores propios distintos de $\mathbf{A}$.

c) Utilice el resultado obtenido en la parte *a*) para demostrar que $\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}_1$. Aplique el último resultado y el de la parte *b*) para calcular el número de pares adultos, de pares bebés y de pares totales de conejos después del doceavo mes.

En los problemas 15 y 16, utilice el procedimiento que se ilustra en (9) para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.

15. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. Se dice que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ diferente de cero es **nilpotente de índice *m*** si m es el entero positivo más pequeño para el que $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}$. ¿Qué matrices de las incluidas a continuación son nilpotentes? Si alguna es nilpotente, ¿cuál es su índice?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *f*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. *a*) Explique por qué cualquier matriz nilpotente $\mathbf{A}$ es singular. [*Sugerencia*: Revise la sección 2.5.] *b*) Demuestre que todos los valores propios de una matriz nilpotente $\mathbf{A}$ son cero. [*Sugerencia*: Utilice la expresión (1) presentada en la sección 2.8.]

2.10 Matrices ortogonales

Introducción En esta sección vamos a utilizar algunas propiedades elementales de los **números complejos**. Suponga que $z = a + ib$ denota un número complejo, donde a y b son números reales y el símbolo i está definido por $i^2 = -1$. Si $\bar{z} = a - ib$ es el **conjugado** de z, entonces la igualdad $z = \bar{z}$ o $a + ib = a - ib$ implica que $b = 0$. En otras palabras, si $z = \bar{z}$, entonces z es un número real. Además, se comprueba fácilmente que el producto de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ es un número real: $z\bar{z} = a^2 + b^2$. La **magnitud** de z se define como el número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. La magnitud de z puede expresarse en términos del producto $z\bar{z}$: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, o $|z|^2 = z\bar{z}$. En la sección 9.1 puede encontrarse un análisis detallado de los números complejos.

Existen muchos tipos de matrices especiales, pero son dos los que se presentan con mucha frecuencia en las aplicaciones: matrices simétricas (página 57) y matrices ortogonales (página 98). En esta sección vamos a estudiar ambos tipos con más detalle.

Matrices simétricas Comencemos recordando la definición formal de una matriz simétrica.

DEFINICIÓN 2.14 Matriz simétrica

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es **simétrica** si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, donde $\mathbf{A}^T$ es la transpuesta de $\mathbf{A}$.

La demostración del teorema siguiente está en función de las propiedades de los números complejos estudiadas en el repaso incluido al comienzo de esta sección.

TEOREMA 2.27 Valores propios reales

Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica con elementos reales. Por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ son reales.

Demostración Si $\mathbf{K}$ es un vector propio correspondiente a un valor propio λ de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. El conjugado de la última ecuación es

$$\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}\,\bar{\mathbf{K}}. \tag{1}$$

Puesto que los elementos de $\mathbf{A}$ son reales, tenemos $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}$, y entonces (1) es

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}. \tag{2}$$

Enseguida calculamos la transpuesta de (2), aprovechamos que $\mathbf{A}$ es simétrica y multiplicamos la ecuación resultante en el lado derecho por $\mathbf{K}$:

$$\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{A}\mathbf{K} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{3}$$

Sin embargo, cuando multiplicamos el miembro derecho de $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$ por $\overline{\mathbf{K}}^T$, obtenemos

$$\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{A}\mathbf{K} = \lambda\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{4}$$

Restar (4) de (3) nos da

$$0 = (\overline{\lambda} - \lambda)\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}. \tag{5}$$

Ahora $\overline{\mathbf{K}}^T$ es una matriz de $1 \times n$ y $\mathbf{K}$ es una matriz de $n \times 1$, por lo que el producto $\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}$ es la matriz $\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K} = (|k_1|^2 + |k_2|^2 + \cdots + |k_n|^2)$ de 1×1. Ya que por definición, $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$, la última expresión es una cantidad positiva. Por lo tanto, a partir de (5) podemos concluir que $\overline{\lambda} - \lambda = 0$ o $\overline{\lambda} = \lambda$. Esto implica que λ es un número real. ❑

En R^n el **producto interno** o **producto punto** de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ está dado por

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n. \tag{6}$$

Ahora, si $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ son vectores columna de $n \times 1$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, entonces

la matriz análoga de (6) es

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y} = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n).^* \tag{7}$$

Desde luego, para los vectores columna dados, $\mathbf{Y}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$. La **norma** de un vector columna $\mathbf{X}$ está dada por

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}} = \sqrt{\mathbf{X}^T\mathbf{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

TEOREMA 2.28 Vectores propios ortogonales

Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces los vectores propios correspondientes a los distintos (diferentes) valores propios son ortogonales.

Demostración Sean λ_1 y λ_2 dos valores propios distintos de $\mathbf{A}$ correspondientes a los vectores propios $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, respectivamente. Deseamos demostrar que $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = 0$.

Ahora, por definición, debemos tener

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2. \tag{8}$$

*Puesto que una matriz de 1×1 es simplemente un escalar, de aquí en adelante eliminaremos los paréntesis y escribiremos $\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$.

Calculamos la transpuesta de la primera de estas ecuaciones, utilizamos $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, y después multiplicamos el resultado de la derecha por $\mathbf{K}_2$:

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{A}\mathbf{K}_2 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2. \tag{9}$$

La segunda ecuación incluida en (8) está multiplicada en su primer miembro por $\mathbf{K}_1^T$:

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{A}\mathbf{K}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2. \tag{10}$$

Restar (10) de (9) nos da

$$0 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 - \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 \quad \text{o} \quad 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2.$$

Puesto que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se puede deducir que $\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = 0$. ❑

Ejemplo 1 Vectores propios ortogonales

Los valores propios de una matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -2$. A su vez, los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que todos los valores propios son diferentes, tenemos

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_3 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_3 = (-1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0.$$ ❑

En el ejemplo 3 de la sección 2.8 pudimos observar que probablemente no se puedan encontrar n vectores propios linealmente independientes para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ cuando algunos de los valores propios están repetidos. Sin embargo, una matriz simétrica es la excepción. Es demostrable que un conjunto de n vectores propios linealmente independientes puede calcularse siempre para una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de $n \times n$ aun cuando existan algunos valores propios repetidos. (Consulte el ejemplo 4 de la sección 2.8.)

A partir de la expresión (2) incluida en la sección 2.6, podemos deducir que un conjunto de vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en R^n es **ortonormal** si cada par de vectores diferentes es ortogonal y cada vector presente en el conjunto es un vector unitario. En términos del producto interno de vectores, el conjunto es ortonormal si

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La última condición establece simplemente que $\|\mathbf{x}_i\| = \sqrt{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

■ **Matriz ortogonal** El concepto de un conjunto ortonormal de vectores juega un papel importante en la consideración del siguiente tipo de matriz.

DEFINICIÓN 2.15 Matriz ortogonal

Una matriz $\mathbf{A}$ no singular de $n \times n$ es **ortogonal** si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

En otras palabras, $\mathbf{A}$ es ortogonal si $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Ejemplo 2 Matrices ortogonales

a) La matriz identidad $\mathbf{I}$ de $n \times n$ es una matriz ortogonal. Por ejemplo, en el caso de la identidad de 3×3

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

se puede observar fácilmente que $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$ y $\mathbf{I}^T\mathbf{I} = \mathbf{II} = \mathbf{I}$.

b) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es ortogonal. Para poder apreciar lo anterior, solamente necesitamos comprobar que $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

TEOREMA 2.29 Criterio para la existencia de una matriz ortogonal

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es ortogonal si, y sólo si, sus columnas $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$ forman un conjunto ortonormal.

Demostración parcial Supongamos que $\mathbf{A}$ es una matriz ortogonal de $n \times n$ con columnas $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$. De aquí que los renglones de $\mathbf{A}^T$ sean $\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T$. Sin embargo, puesto que $\mathbf{A}$ es ortogonal, $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$; esto es,

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_n \\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede deducir, a partir de la definición de igualdad de matrices, que

$$\mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esto significa que las columnas de la matriz ortogonal forman un conjunto ortonormal de n vectores. $\square$

Si escribimos las columnas de la matriz del inciso *b*) del ejemplo 2 como

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

entonces los vectores son ortogonales:

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = -\frac{2}{9}+\frac{4}{9}-\frac{2}{9} = 0$$

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} = -\frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{4}{9} = 0$$

$$\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} = -\frac{4}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9} = 0$$

y son vectores unitarios:

$$\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$$

$$\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = 1$$

$$\mathbf{X}_3^T\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} = \frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9} = 1.$$

■ **Construcción de una matriz ortogonal** Si una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, a partir del teorema 2.28 se puede deducir que los vectores propios $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ son mutuamente ortogonales. Multiplicando cada vector por el recíproco de su normal, obtenemos un conjunto de vectores unitarios mutuamente ortogonales, esto es, un conjunto ortonormal. Por lo tanto, podemos construir una matriz ortogonal elaborando una matriz $\mathbf{P}$ de $n \times n$ cuyas columnas sean esos vectores propios normalizados de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 3 Construcción de una matriz ortogonal

En el ejemplo 1 se comprobó que los vectores propios

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

de la matriz simétrica $\mathbf{A}$ dada son ortogonales. Ahora, las normas de los vectores propios son

$$\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_1} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_2} = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{K}_3\| = \sqrt{\mathbf{K}_3^T\mathbf{K}_3} = \sqrt{6}.$$

Por ende, un conjunto ortonormal de vectores es

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Se utilizan estos vectores como columnas para obtener la matriz ortogonal

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Usted debe comprobar que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$. ❑

En la sección siguiente se utilizará la técnica de construcción de una matriz ortogonal a partir de los vectores propios de una matriz simétrica.

No malinterprete el teorema 2.28. Siempre es posible calcular n vectores propios linealmente independientes para una matriz simétrica real $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Sin embargo, el teorema no establece que *todos* los vectores propios sean mutuamente ortogonales. El conjunto de vectores propios correspondientes a los distintos valores propios son ortogonales; sin embargo, los diferentes vectores propios correspondientes a un eigenvalor repetido pueden no ser ortogonales. Considere la matriz simétrica del ejemplo siguiente.

Ejemplo 4 Utilización del proceso de Gram-Schmidt

En la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

se encontró que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$ y $\lambda_3 = 9$. Procediendo como en la sección 2.8, para $\lambda_1 = \lambda_2 = -9$, encontramos que

$$(\mathbf{A} + 9\mathbf{I}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A partir de la última matriz observamos que $k_1 = -\frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{4}k_3$. Los parámetros $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ seguidos de $k_2 = -4$, $k_3 = 0$ nos dan, a su vez, los distintos vectores propios

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para $\lambda_1 = 9$,

$$(\mathbf{A} - 9\mathbf{I}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & -17 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -17 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{con renglones}}{\overset{\text{operaciones}}{\Rightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

indica que $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un tercer vector propio.

Observe que, de acuerdo con el teorema 2.28, el vector $\mathbf{K}_3$ es ortogonal con respecto a $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$; sin embargo $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$, vectores propios correspondientes al valor propio repetido $\lambda_1 = -9$, no son ortogonales ya que $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2 = -4 \neq 0$.

Utilizamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (consulte la página 46) para transformar el conjunto $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ en un conjunto ortogonal. Sea $\mathbf{V}_1 = \mathbf{K}_1$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}_2 - \left(\frac{\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1}\right)\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El conjunto $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$ es un conjunto ortogonal de vectores (compruébelo). Además, el conjunto $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{K}_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores propios. Utilizando las normales $\|\mathbf{V}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{V}_2\| = 3$ y $\|\mathbf{K}_3\| = 3\sqrt{2}$, obtenemos un conjunto de vectores ortonormales

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

por lo que la matriz

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

es ortogonal. ❑

Comentarios

Para una matriz simétrica real de $n \times n$ con valores propios repetidos, siempre es posible *calcular*, más que *construir*, un conjunto de n vectores propios mutuamente ortogonales. En otras palabras, el proceso de Gram-Schmidt no necesariamente tiene que utilizarse. Consulte el problema 23 dado en la sección de ejercicios 2.10.

EJERCICIOS 2.10

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

En los problemas 1 a 4, *a*) compruebe que los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz simétrica dada, *b*) identifique los valores propios correspondientes y *c*) compruebe que los vectores columna son ortogonales.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 \\ 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 5 a 10, determine si la matriz dada es ortogonal.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} & 0 \\ \frac{5}{13} & \frac{12}{13} & 0 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{8}{17} & 0 & -\frac{15}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{17} & 0 & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$

En los problemas 11 a 18, proceda como en el ejemplo 3 para construir una matriz ortogonal a de los vectores propios de la matriz simétrica dada. (Las respuestas no son únicas.)

11. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 8 & -4 & 10 \\ -2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$

En los problemas 19 y 20, utilice el teorema 2.29 para calcular los valores de a y b de tal forma que la matriz dada sea ortogonal.

19. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & a \\ \frac{4}{5} & b \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & b \\ a & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

En los problemas 21 y 22, *a*) compruebe que los vectores columna indicados son vectores propios de la matriz simétrica dada. *b*) Identifique los valores propios correspondientes. *c*) Proceda como en el ejemplo 4 y utilice el proceso de Gram-Schmidt para construir una matriz ortogonal **P** a partir de los vectores propios.

21. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

23. En el ejemplo 4, utilice la ecuación $k_1 = -\frac{1}{4}k_2 + \frac{1}{4}k_3$ y seleccione dos diferentes conjuntos de valores para k_2 y k_3 en tal forma que los vectores propios $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ sean ortogonales.

24. Construya una matriz ortogonal a partir de los vectores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Demuestre que si **A** y **B** son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces **AB** es ortogonal.

2.11 Aproximación de valores propios

Introducción Recuerde que para calcular los valores propios de una matriz **A** debemos encontrar las raíces de la ecuación polinomial $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Si **A** es una matriz de tamaño grande, los cálculos para obtener esta ecuación característica podrían volverse una pesadilla. Además, aunque pudiésemos calcular la ecuación característica exacta, es probable que tuviéramos que utilizar un procedimiento numérico para aproximar sus raíces. Existen procedimientos numéricos alternos para aproximar valores propios y los correspondientes vectores propios. El procedimiento que consideraremos en esta sección tiene que ver con matrices que poseen un **valor propio dominante**.

Una definición Un valor propio dominante de una matriz cuadrada **A** es uno cuyo valor absoluto es mayor que el valor absoluto de cada uno de los valores propios restantes. En la definición siguiente, enunciamos de modo formal este último enunciado.

DEFINICIÓN 2.16 Valor propio dominante

Hagamos que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n$ expresen los valores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Se dice que el valor propio λ_k es el **valor propio dominante** de $\mathbf{A}$ si

$$|\lambda_k| > \lambda_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{pero } i \neq k.$$

Se llama **vector propio dominante** de $\mathbf{A}$ a un valor propio correspondiente a λ_k.

En el ejemplo 2 de la sección 2.8, observamos que los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 3$. Puesto que $|-4| > 0$ y $|-4| > 3$, podemos observar que $\lambda_2 = -4$ es el valor propio dominante de $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1 Matrices sin ningún valor propio dominante

a) La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 2$. Puesto que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 2$, se puede deducir que no existe valor propio dominante.

b) Los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ son } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 5.$$

De nuevo, la matriz no tiene valor propio dominante. ❑

■ **Método de las potencias** Supongamos que la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene un valor propio dominante λ_1. La técnica iterativa para aproximar un vector propio dominante correspondiente se debe al matemático alemán Richard Von Mises (1883-1953) y se llama **método de las potencias**. La idea básica de este procedimiento es calcular, en primera instancia, una aproximación a un vector propio dominante empleando la secuencia

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}\mathbf{X}_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

donde $\mathbf{X}_0$ representa un vector de $n \times 1$ diferente de cero que es un primer intento o aproximación del vector propio buscado. Iterando (1) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{X}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{X}_m &= \mathbf{A}\mathbf{X}_{m-1} = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Bajo ciertas circunstancias, para valores grandes de m el vector definido como $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación de un vector propio dominante. Para conceptualizar mejor lo anterior, formulemos algunos supuestos adicionales acerca de la matriz $\mathbf{A}$. Supongamos que los valores propios de $\mathbf{A}$ son tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

y que los n vectores propios correspondientes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ son linealmente independientes. Debido a este último supuesto, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ puede servir como base para R^n

(consulte la sección 1.6). Por lo tanto, para cualquier vector $\mathbf{X}_0$ de $n \times 1$ diferente de cero, se pueden calcular constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{X}_0 = c_1\mathbf{K}_1 + c_2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\mathbf{K}_n. \tag{3}$$

También supondremos que $\mathbf{X}_0$ se selecciona de tal forma que $c_1 \neq 0$. Multiplicando (3) por $\mathbf{A}$ obtenemos

$$\mathbf{AX}_0 = c_1\mathbf{AK}_1 + c_2\mathbf{AK}_2 + \cdots + c_n\mathbf{AK}_n.$$

Puesto que $\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1$, $\mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{AK}_n = \lambda_n\mathbf{K}_n$, la última línea puede expresarse como

$$\mathbf{AX}_0 = c_1\lambda_1\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{AK}_n. \tag{4}$$

Multiplicamos (4) por $\mathbf{A}$ y resulta

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2\mathbf{X}_0 &= c_1\lambda_1\mathbf{AK}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{AK}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{AK}_n \\ &= c_1\lambda_1^2\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2^2\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2\mathbf{K}_n.\end{aligned}$$

Continuamos de esta forma y encontramos que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{X}_0 = c_1\lambda_1^m\mathbf{K}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^m\mathbf{K}_n \tag{5}$$

$$= \lambda_1^m\left(c_1\mathbf{K}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m\mathbf{K}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m\mathbf{K}_n\right). \tag{6}$$

Puesto que $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ para $i = 2, 3, \ldots, n$, tenemos $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$ y, como consecuencia, $\lim_{m\to\infty}(\lambda_i/\lambda_1)^m = 0$. Por lo tanto, conforme $m \to \infty$, podemos observar a partir de (6) que

$$\mathbf{A}^m\mathbf{X}_0 \approx \lambda_1^m c_1\mathbf{K}_1. \tag{7}$$

Puesto que un múltiplo constante diferente de cero de un vector propio es otro vector propio, podemos deducir a partir de (7) que para valores grandes de m, y tomando en cuenta todas las suposiciones formuladas, la matriz de $n \times 1$ $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación a un vector propio dominante asociado con el valor propio dominante λ_1. La rapidez con la que este método converge depende del cociente λ_2/λ_1: si $|\lambda_2/\lambda_1|$ es muy pequeño, entonces la convergencia es rápida, mientras que si $|\lambda_2/\lambda_1|$ tiene un valor cercano a la unidad, la convergencia es lenta. Desde luego, esta información no es tan útil como parece debido a que, en general, no conocemos con antelación los valores propios.

Falta, entonces, aproximar el valor propio dominante en sí mismo. Lo anterior se puede llevar a cabo mediante el producto interno. Si $\mathbf{K}$ es un vector propio de una matriz $\mathbf{A}$ correspondiente al valor propio λ, tenemos $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$, y así tenemos que $\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K} = \lambda\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$. Como $\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K}$ y $\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}$ son escalares, podemos despejar λ en esta última ecuación:

$$\lambda = \frac{\mathbf{AK} \cdot \mathbf{K}}{\mathbf{K} \cdot \mathbf{K}}.$$

De aquí que, si $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$ es una aproximación de un vector propio dominante obtenido por iteración de (1), entonces el valor propio λ_1 dominante puede aproximarse por medio del cociente

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{AX}_m \cdot \mathbf{X}_m}{\mathbf{X}_m \cdot \mathbf{X}_m}. \tag{8}$$

El cociente presentado en (8) es conocido como **cociente de Rayleigh**.

Ejemplo 2 Utilización del método de las potencias

Utilice el método de las potencias para aproximar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio dominante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución Puesto que no conocemos los valores propios y los vectores propios, podemos emplear $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Los primeros dos términos de la secuencia de vectores definida por (1) son

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Los cinco vectores restantes obtenidos de esta forma se proporcionan en la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 144 \\ 68 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 712 \\ 364 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3\,576 \\ 1\,772 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17\,848 \\ 8\,956 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 89\,304 \\ 44\,588 \end{pmatrix}$

A estas alturas, aparentemente no hemos llegado a ningún lado, ya que los elementos de los vectores de la tabla parecen estar aumentando sin límites. Sin embargo, tenga en cuenta que (7) indica que estamos obteniendo una constante múltiple de un vector. Si el método de las potencias converge entonces, por factorización del elemento con valor absoluto más grande de $\mathbf{X}_m$ (para un valor de m grande), obtendremos una aproximación razonable de un vector propio dominante. A partir de la tabla,

$$\mathbf{X}_7 = 89\,304\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4933 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Parece que los vectores se aproximan a los múltiplos escalares de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$.

Ahora utilizamos (8) para aproximar el valor propio dominante λ_1. Primero tenemos

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.9986 \\ 2.5007 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 4.9986 \\ 2.5007 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = 6.2472$$

$$\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix} = 1.2493.$$

Por último, tenemos

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{A}\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7}{\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7} = \frac{6.2472}{1.2493} = 5.0006.$$

El lector deberá utilizar el procedimiento de la sección 2.7 para verificar que los valores propios y los correspondientes vectores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -2, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. ❑

■ **Escalamiento** Tal como acabamos de ver, la iteración de (1) a menudo resulta en vectores cuyos elementos se vuelven muy grandes en valor absoluto. Desde luego, los números grandes pueden causar problemas si se utiliza una computadora para realizar un gran número de iteraciones. El resultado en (9) sugiere que una forma de evitar esta dificultad es mediante el uso de un vector de **escalamiento** en cada etapa de la iteración. Para efectuar el escalamiento, simplemente multiplicamos el vector $\mathbf{A}\mathbf{X}_0$ por el recíproco del elemento que tenga el valor absoluto más grande. Es decir, multiplicamos

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{por} \quad \frac{1}{\max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}}.$$

A esta matriz resultante, cuyos elementos son ahora menores o iguales a la unidad, la llamamos $\mathbf{X}_1$. Repetimos el proceso con el vector $\mathbf{AX}_1$ para obtener el vector escalado $\mathbf{X}_2$, y así sucesivamente.

Ejemplo 3 Vuelta al ejemplo 2

Repita las iteraciones del ejemplo 2 utilizando los vectores escalados.

Solución A partir de $\mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ definimos

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3333 \end{pmatrix}.$$

A partir de $\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0.3333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.6666 \\ 2.6667 \end{pmatrix}$, definimos

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{4.6666}\begin{pmatrix} 4.6666 \\ 2.6667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5714 \end{pmatrix}.$$

Proseguimos de esta manera hasta construir la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4722 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5112 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4955 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5018 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.4993 \end{pmatrix}$

En contraste con la tabla del ejemplo 3, a partir de esta tabla resulta evidente que los vectores se aproximan a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. ❑

■ **Método de la deflación** Después de que hemos encontrado el valor propio dominante λ_1 de una matriz $\mathbf{A}$, podría aún ser necesario calcular los valores propios no dominantes. El procedimiento que se analizará a continuación es una modificación del método de potencias y se denomina **método de deflación**. Limitaremos el análisis al caso donde $\mathbf{A}$ es una matriz *simétrica*.

Suponga que λ_1 y $\mathbf{K}_1$ son, respectivamente, el valor propio dominante y un vector propio *normalizado* correspondiente* (es decir, $\|\mathbf{K}_1\| = 1$) de una matriz simétrica $\mathbf{A}$. Además, suponga que los valores propios de $\mathbf{A}$ son tales que

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Puede demostrarse que la matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_1^T \tag{10}$$

tiene valores propios $0, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ y que los vectores propios de $\mathbf{B}$ son también los vectores propios de $\mathbf{A}$. Observe que λ_2 es ahora el valor propio dominante de $\mathbf{B}$. Aplicamos el método de las potencias a $\mathbf{B}$ para aproximar λ_2 y un vector propio correspondiente.

Ejemplo 4 Empleo del método de deflación

Utilice el método de deflación para aproximar los valores propios de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

*Consulte el ejemplo 3 de la sección 2.10.

Solución Comenzamos utilizando el método de las potencias con escalamiento a fin de encontrar el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de $\mathbf{A}$.

Seleccionando $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, podemos observar que

$$\mathbf{AX}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{X}_1 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{2.5}\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Los vectores escalados $\mathbf{X}_3$ a $\mathbf{X}_{10}$ aparecen en la tabla siguiente:

i	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \\ -0.0667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.8837 \\ 0.0698 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9134 \\ 1 \\ -0.0394 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9440 \\ 0.0293 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9614 \\ 1 \\ -0.0188 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9744 \\ 0.0129 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9828 \\ 1 \\ -0.0086 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0.9885 \\ 0.0058 \end{pmatrix}$

Utilizamos $\mathbf{X}_{10}$ y (8) para encontrar que

$$\lambda_1 \approx \frac{\mathbf{AX}_{10} \cdot \mathbf{X}_{10}}{\mathbf{X}_{10} \cdot \mathbf{X}_{10}} = 2.9997.$$

Al parecer el valor propio dominante y un vector propio correspondiente son $\lambda_1 = 3$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ respectivamente.

Nuestra siguiente tarea es construir la matriz $\mathbf{B}$ definida por (10). Con $\|\mathbf{K}\| = \sqrt{2}$, el vector propio normalizado es $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}(1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizaremos el método de las potencias con escalamiento para calcular el valor propio dominante de $\mathbf{B}$. Con $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de nuevo, los resultados se despliegan en la tabla siguiente:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{X}_i$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.6667 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.8333 \\ -0.8333 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.9091 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.9545 \\ -0.9545 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -0.9767 \end{pmatrix}$

Utilizamos $\mathbf{X}_7$ y (8), y encontramos

$$\lambda_2 \approx \frac{\mathbf{AX}_7 \cdot \mathbf{X}_7}{\mathbf{X}_7 \cdot \mathbf{X}_7} = -1.9996.$$

A partir de estos cálculos, parece evidente que el valor propio dominante **B** y un vector propio correspondiente son $\lambda_2 = -2$ y $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular el último valor propio de **A**, repetimos el proceso de deflación para encontrar el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de la matriz

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \lambda_2 \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_2^T = \begin{pmatrix} 0.1667 & -0.1667 & -0.3333 \\ -0.1667 & 0.1667 & 0.3333 \\ -0.3333 & 0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

donde hemos utilizado $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Se invita al estudiante a comprobar que $\lambda_3 = 1$. ❑

De alguna forma, el ejemplo 5 es artificial puesto que los valores propios de una matriz no necesitan ser números "agradables" como 3, −2 y 1. Además, utilizamos los valores exactos de los valores propios dominantes λ_1 y λ_2 en la formación de las matrices **B** y **C**. Desde luego, en la práctica, debemos conformarnos con trabajar con aproximaciones del valor propio dominante λ_1 y un vector propio correspondiente $\mathbf{K}_1$ dominante normalizado de **A**. Si estas aproximaciones se utilizan en (10), se genera un error en el cálculo de la matriz **B**, por lo que más errores pueden generarse en el cálculo de su valor propio dominante λ_2 y el vector propio dominante $\mathbf{K}_2$. Si λ_2 y $\mathbf{K}_2$ se utilizan para construir la matriz **C**, parece razonable concluir que los errores se están agravando. En otras palabras, el método de deflación puede volverse demasiado impreciso a medida que se calculen más valores propios.

■ **Método de la potencia inversa** En algunos problemas sobre aplicaciones, estamos más interesados en aproximar el valor propio de una matriz **A** con un valor absoluto más pequeño que el valor propio dominante. Si **A** es no singular, entonces los valores propios de **A** son diferentes de cero (demuestre esto), y si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de **A**, entonces $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n$ son los valores propios de $\mathbf{A}^{-1}$. Esto último puede observarse multiplicando la ecuación $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$, $\lambda \neq 0$, por $\mathbf{A}^{-1}$ y $1/\lambda$ para obtener $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{K} = (1/\lambda)\mathbf{K}$. Ahora, si los valores propios de **A** pudieran agruparse en el orden

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|,$$

entonces podemos observar que $1/\lambda_n$ es el valor propio dominante de $\mathbf{A}^{-1}$. Aplicando el método de las potencias a $\mathbf{A}^{-1}$, aproximamos el valor propio de magnitud más grande y, tomando su recíproco, calculamos el valor propio de **A** de menor magnitud. A esto se le conoce como el **método de la potencia inversa**. Consulte los problemas 11 a 13 dados en la sección de ejercicios 2.11.

EJERCICIOS 2.11

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-6.

Para el profesor y el estudiante: En la resolución de los problemas siguientes sería de utilidad emplear una calculadora con capacidad para trabajar con matrices o un sistema asistido por computadora.

Cada matriz de los problemas 1 a 10 tiene un valor propio dominante.

En los problemas 1 y 2, utilice el método de las potencias ilustrado en el ejemplo 3 para encontrar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio o eigenvector dominante de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

En los problemas 3 a 6, utilice el método de las potencias con escalamiento para encontrar el valor propio dominante y el correspondiente vector propio de la matriz dada.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 7 a 10, utilice el método de deflación para calcular los valores propios de la matriz dada.

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

En los problemas 11 y 12, aplique el método de la potencia inversa para calcular el valor propio de menor magnitud de la matriz dada.

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.4 & -0.1 \end{pmatrix}$

13. La curva de deflexión de una columna delgada que se encuentra bajo una carga aplicada P está definida por el problema de valor en la frontera

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = 0, y(0) = 0, y(L) = 0.$$

En este problema demostramos cómo aplicar las técnicas matriciales para calcular la carga crítica más pequeña.

Dividamos el intervalo $[0, L]$ en n subintervalos de longitud $h = L/n$, y sea $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Para valores pequeños de h, se puede deducir que

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

donde $y_i = y(x_i)$.

a) Demuestre que la ecuación diferencial puede reemplazarse por la ecuación en diferencias

$$EI(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + Ph^2y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

b) Demuestre que para $n = 4$ la ecuación en diferencias de la parte *a*) da como resultado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{16EI}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Observe que este sistema tiene la forma del problema del valor propio $\mathbf{AY} = \lambda\mathbf{Y}$, donde $\lambda = PL^2/16EI$.

c) Calcule $\mathbf{A}^{-1}$.

d) Utilice el método de la potencia inversa para calcular, aproximado a dos decimales, el valor propio de $\mathbf{A}$ de menor magnitud.

e) Con el resultado de la parte *d*), encuentre la carga crítica menor aproximada.

14. Suponga que la columna del problema 13 se hace más estrecha por lo que el momento de inercia de una sección transversal I varía linealmente desde $I(0) = I_0 = 0.002$ hasta $I(L) = I_L = 0.001$.

a) Utilice la ecuación en diferencias de la parte *a*) del problema 13 con $n = 4$ para establecer un sistema de ecuaciones análogo al que se propuso en la parte *b*).

b) Proceda igual que en el problema 13 para calcular una aproximación a la carga crítica más pequeña.

Tareas para el laboratorio de cómputo

15. En la sección 2.9 estudiamos cómo calcular una potencia $\mathbf{A}^m$ de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Consulte la documentación del sistema asistido por computadora que tenga a la mano para encontrar el comando que calcula la potencia $\mathbf{A}^m$. (En *Mathematica*, el comando es **MatrixPower[A, m]**.) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene un valor propio dominante.

a) Utilice un sistema asistido por computadora para calcular $\mathbf{A}^{10}$.

b) Ahora utilice (2), $\mathbf{X}_m = \mathbf{A}^m\mathbf{X}_0$, con $m = 10$ y $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, para calcular $\mathbf{X}_{10}$. Calcule igual para $\mathbf{x}_{12}$. Después proceda igual que en (9) para calcular el vector propio dominante aproximado $\mathbf{K}$.

c) Si $\mathbf{K}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$. Utilice esta definición junto con el resultado de la parte *b*) para encontrar el valor propio dominante.

2.12 Diagonalización

Introducción Los valores propios, vectores propios, matrices ortogonales y el tema de esta sección, diagonalización, representan herramientas importantes para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La pregunta fundamental que consideraremos en esta sección es:

Para una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$, ¿podemos calcular una matriz no singular $\mathbf{P}$ de $n \times n$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ sea una matriz diagonal?

Una notación especial Comenzamos con una notación abreviada para representar el producto de dos matrices de $n \times n$. Esta notación será de gran utilidad para demostrar

el teorema principal de esta sección. Para efectos ilustrativos, suponga que **A** y **B** son matrices de 2×2. Por lo tanto,

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

columna 1 columna 2

Si escribimos las columnas de la matriz **B** como los vectores $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$, entonces las columnas 1 y 2 del producto (1) pueden expresarse mediante los productos $\mathbf{AX}_1$ y $\mathbf{AX}_2$.

Esto es,

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AX}_1 \quad \mathbf{AX}_2).$$

columna 1 columna 2

En general, para dos matrices de $n \times n$

$$\mathbf{AB} = \mathbf{A}(\mathbf{X}_1\ \mathbf{X}_2 \ldots\ \mathbf{X}_n) = (\mathbf{AX}_1\ \mathbf{AX}_2 \ldots\ \mathbf{AX}_n), \quad (2)$$

donde $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$, son las columnas de **B**.

■ **Matriz diagonalizable** Si pudiera encontrarse una matriz **P** no singular de $n \times n$ de tal forma que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ fuese una matriz diagonal, entonces podríamos decir que la matriz **A** de $n \times n$ puede ser **diagonalizada**, o que es **diagonalizable**, y que **P diagonaliza a A**.

Para descubrir cómo diagonalizar una matriz supongamos, con propósitos de estudio, que **A** es una matriz diagonalizable de 3×3. Entonces existe una matriz **P** no singular de 3×3 tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ o $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, donde **D** es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$ expresan las columnas de **P**, entonces puede deducirse que a partir de (2) la ecuación $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ es la misma que

$$(\mathbf{AP}_1 \quad \mathbf{AP}_2 \quad \mathbf{AP}_3) = (d_{11}\mathbf{P}_1 \quad d_{22}\mathbf{P}_2 \quad d_{33}\mathbf{P}_3)$$

o $$\mathbf{AP}_1 = d_{11}\mathbf{P}_1, \quad \mathbf{AP}_2 = d_{22}\mathbf{P}_2, \quad \mathbf{AP}_3 = d_{33}\mathbf{P}_3.$$

Sin embargo, en la definición 2.13 observamos que d_{11}, d_{22} y d_{33} son valores propios de **A** asociados con los vectores propios $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Estos vectores propios son linealmente independientes, puesto que supusimos una **P** no singular.

Ya hemos descubierto, en un caso particular, que si **A** es diagonalizable, entonces las columnas de la matriz **P** diagonalizadora constan de vectores propios linealmente independientes de **A**. Puesto que queremos diagonalizar una matriz, realmente nos interesa lo que respecta a la validez de la conversión del último enunciado. En otras palabras, si pudiéramos encontrar n vectores propios linealmente independientes de una matriz **A** de $n \times n$ y formar una matriz **P** de $n \times n$ cuyas columnas consistieran en estos vectores propios, entonces ¿**P** diagonalizaría a **A**? La respuesta es sí, y se demostrará con ayuda del teorema siguiente.

TEOREMA 2.30 Condición suficiente para la diagonalización

Si una matriz **A** de $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$, entonces **A** es diagonalizable.

Demostración Demostraremos el teorema para el caso en que **A** es una matriz de 3×3. Sean $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ vectores propios linealmente independientes correspondientes a los valores propios λ_1, λ_2 y λ_3; esto es,

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1, \quad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{AK}_3 = \lambda_3\mathbf{K}_3. \quad (3)$$

Enseguida construya la matriz $\mathbf{P}$ de 3×3 con los vectores columna $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$: $\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3)$. $\mathbf{P}$ es no singular ya que, por hipótesis, los vectores propios son linealmente independientes. A continuación, utilizando (2) y (3), podemos escribir el producto $\mathbf{AP}$ como

$$\mathbf{AP} = (\mathbf{AK}_1\ \mathbf{AK}_2\ \mathbf{AK}_3) = (\lambda_1\mathbf{K}_1\ \lambda_2\mathbf{K}_2\ \lambda_3\mathbf{K}_3)$$
$$= (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{PD}.$$

Al multiplicar la última ecuación del lado izquierdo por $\mathbf{P}^{-1}$ nos da $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$. ❑

En la demostración del teorema 2.30, observe con mucho cuidado que los elementos de la matriz diagonalizada son los valores propios de $\mathbf{A}$, y que el orden en que aparecen estos números en la diagonal de $\mathbf{D}$ corresponde al orden en que los vectores propios se utilizan como columnas de la matriz $\mathbf{P}$.

En vista de la motivante discusión que precedió al teorema 2.30, podemos enunciar el resultado general:

TEOREMA 2.31 Criterio para la diagonalización

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es diagonalizable si, y sólo si, $\mathbf{A}$ tiene n vectores propios linealmente independientes.

En la sección 2.8 pudimos observar que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tendrá n vectores propios linealmente independientes siempre que contenga n valores propios distintos.

TEOREMA 2.32 Condición suficiente para la diagonalización

Si una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, es diagonalizable.

Ejemplo 1 Diagonalización de una matriz

Si es posible, diagonalice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.

Solución Antes que nada, calculamos los valores propios de $\mathbf{A}$. La ecuación característica es $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 9 \\ -6 & 10 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$. Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$. Puesto que los valores propios son diferentes, sabemos a partir del teorema 2.32 que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Luego los vectores propios de $\mathbf{A}$ correspondientes a $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ son, respectivamente,

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si utilizamos estos vectores como columnas, encontramos que la matriz no singular $\mathbf{P}$ que diagonaliza a $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora
$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

por lo que llevando a cabo las multiplicaciones obtenemos

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{D}.$$ ❑

En el ejemplo 1, si hubiéramos invertido las columnas de $\mathbf{P}$, es decir, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces la matriz diagonal hubiera sido $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2 Diagonalización de una matriz

Considere la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Observamos en el ejemplo 2 de la sección 2.8 que los valores propios y los correspondientes vectores propios son

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Debido a que los valores propios son diferentes, $\mathbf{A}$ es diagonalizable. Construimos la matriz

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_1\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{K}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Al igualar los valores propios con el orden en que aparecen los vectores propios en $\mathbf{P}$, sabemos que la matriz diagonal será

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A partir de cualquiera de los métodos de la sección 2.6 encontramos que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{12} \\ -\frac{9}{28} & \frac{2}{7} & \frac{3}{28} \\ \frac{8}{21} & \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \\ -13 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \qquad \square$$

La condición de que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tenga n valores propios distintos es suficiente —esto es, una garantía— para que $\mathbf{A}$ sea diagonalizable. La condición de que haya n valores propios distintos no es una condición necesaria para la diagonalización de $\mathbf{A}$. En otras palabras, si la matriz $\mathbf{A}$ no tiene n valores propios distintos, entonces podrá o no ser diagonalizable.

Una matriz con valores propios repetidos podría ser diagonalizable.

Ejemplo 3 Una matriz que no es diagonalizable

En el ejemplo 3 de la sección 2.8 observamos que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ tiene un valor propio repetido $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Asimismo, pudimos calcular un *solo* vector propio $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Concluimos a partir del teorema 2.31 que $\mathbf{A}$ no es diagonalizable. $\square$

Ejemplo 4 Valores propios repetidos pero diagonalizables

Los valores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Para $\lambda_1 = -1$ obtenemos $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para el valor propio repetido $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, el método de eliminación de Gauss-Jordan nos da

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}|\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la última matriz podemos observar que $k_1 - k_2 = 0$. Puesto que k_3 no se puede determinar a partir de la última matriz, podemos seleccionar un valor arbitrario. La alternativa $k_2 = 1$ nos da $k_1 = 1$. Si después seleccionamos $k_3 = 0$, obtenemos el vector propio

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La elección alternativa $k_2 = 0$ nos da $k_1 = 0$. Si $k_3 = 1$, obtenemos otro vector propio correspondiente a $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$:

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puesto que los vectores propios $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ son linealmente independientes, una matriz que diagonaliza a $\mathbf{A}$ es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igualar los valores propios con los vectores propios en $\mathbf{P}$, tenemos que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ ❑

■ **Matrices simétricas** Una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de $n \times n$ con elementos reales siempre se puede diagonalizar. Lo anterior es una consecuencia del hecho de que siempre podremos calcular n vectores propios linealmente independientes de dicha matriz. Además, puesto que podemos calcular n vectores propios mutuamente ortogonales, es posible usar una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ para diagonalizar $\mathbf{A}$. Se dice que una matriz simétrica es **diagonalizable ortogonalmente**.

TEOREMA 2.32 Criterio para la diagonalización ortogonal

Una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ puede ser diagonalizada ortogonalmente si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es simétrica.

Demostración parcial Se demostrará la parte necesaria (es decir, la parte "sólo si") del teorema. Supongamos que una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente. Entonces existe una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ o $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Puesto que $\mathbf{P}$

es ortogonal, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ y, en consecuencia, $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^T$. Sin embargo, a partir de *i*) y *iii*) del teorema 2.2 y de que la matriz diagonal es simétrica, tenemos

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{PDP}^T)^T = (\mathbf{P}^T)^T\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T = \mathbf{PDP}^T = \mathbf{A}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{A}$ es simétrica. ❑

Ejemplo 5 Diagonalización de una matriz simétrica

Considere la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. En el ejemplo 4 de la sección 2.8 estudiamos que los valores propios y los correspondientes vectores propios son

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 8, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores propios $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$ son linealmente independientes, sin embargo, observe que no son mutuamente ortogonales ya que $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$, los vectores propios correspondientes al valor propio repetido $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$, no son ortogonales. Para $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$, podemos calcular los vectores propios a partir del método de eliminación de Gauss-Jordan como

$$(\mathbf{A} - 8\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el cual implica que $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Debido a que las variables son arbitrarias, seleccionamos $k_2 = 1$, $k_3 = 0$ para obtener $\mathbf{K}_2$ y $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ para obtener $\mathbf{K}_3$. De haber seleccionado $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ y, después, $k_2 = 1$, $k_3 = -1$, obtendríamos, respectivamente, dos vectores propios ortogonales totalmente diferentes.

Consulte los comentarios de esta sección

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, un nuevo conjunto de vectores propios mutuamente ortogonales es

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos estos vectores, a su vez, por el recíproco de las normales $\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{K}_3\| = \sqrt{2}$, y obtenemos el conjunto ortonormal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Enseguida utilizamos estos vectores como columnas para construir una matriz ortogonal que diagonalice a **A**:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios de **A** correspondientes al orden en que aparecen los vectores propios en **P** es entonces

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior se demuestra a partir de

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{P}^T\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \qquad \square$$

Formas cuadráticas Se dice que una expresión algebraica de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 \tag{4}$$

está en **forma cuadrática**. Si permitimos que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces (4) puede escribirse como la matriz producto

$$\mathbf{X}^T\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Observe que la matriz $\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix}$ es simétrica.

Es probable que en la materia de cálculo usted haya estudiado que una adecuada rotación de ejes nos permite eliminar el término xy de la ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Como lo ilustra el ejemplo siguiente, podemos eliminar el término xy mediante una matriz ortogonal y la diagonalización más que a través del uso de la trigonometría.

Ejemplo 6 Identificación de una sección cónica

Identificar la sección cónica cuya ecuación es $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$.

Solución A partir de (5) podemos escribir la ecuación dada como

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{o} \quad \mathbf{X}^T\mathbf{AX} = 1, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Se demuestra que los valores propios y los correspondientes vectores propios de $\mathbf{A}$ son

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{K}_1$ y $\mathbf{K}_2$ son ortogonales. Además, $\|\mathbf{K}_1\| = \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{5}$, por lo que los vectores

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

son ortonormales. De aquí que la matriz,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. Si definimos el cambio de variables $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ donde $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ entonces la forma cuadrática $2x^2 + 4xy - y^2$ puede escribirse como

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{X}' = (\mathbf{X}')^T(\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{X}'.$$

Puesto que $\mathbf{P}$ diagonaliza ortogonalmente a la matriz simétrica $\mathbf{A}$, la última ecuación es igual a

$$\mathbf{X}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{X}')^T\mathbf{D}\mathbf{X}'. \tag{7}$$

Utilizamos (7) para observar que (6) se convierte en

$$(X \quad Y)\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 1 \quad \text{o} \quad -2X^2 + 3Y^2 = 1.$$

Esta última ecuación se conoce como la forma estándar de una hipérbola. Las coordenadas xy de los vectores propios son $(1, -2)$ y $(2, 1)$. Utilizando la sustitución $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{X}'$ en la forma $\mathbf{X}' = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{P}^T\mathbf{X}$, encontramos que las coordenadas XY de estos dos puntos son $(\sqrt{5}, 0)$ y $(0, \sqrt{5})$, respectivamente. A partir de lo anterior, concluimos que los ejes X y Y son como se muestra en la figura 2.11. Los vectores propios, en color negro en la figura, se muestran a lo largo de los nuevos ejes. Los ejes X y Y se llaman **ejes principales** de la cónica. ❑

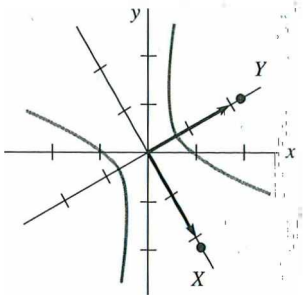


Figura 2.11 Ejes X y Y del ejemplo 6

Comentarios

La matriz $\mathbf{A}$ del ejemplo 5 es simétrica y, como tal, los vectores propios correspondientes a los distintos valores propios son ortogonales. En la tercera línea del ejemplo, observe que $\mathbf{K}_1$, un vector propio para $\lambda_1 = 11$, es ortogonal a $\mathbf{K}_2$ y $\mathbf{K}_3$. Los vectores propios $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondientes a $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$ no son ortogonales. Como alternativa en la búsqueda de vectores propios ortogonales para este valor propio repetido mediante la aplicación, por segunda vez, del método de eliminación de Gauss-Jordan, podemos simplemente aplicar el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt y transformar el conjunto $\{\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3\}$ en un conjunto ortogonal. Consulte la sección 1.7 y el ejemplo 4 de la sección 2.10.

EJERCICIOS 2.12 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19

En los problemas 1 a 20, determine si la matriz **A** dada es diagonalizable. Si es así, encuentre la matriz **P** que diagonaliza a **A** y la matriz diagonal **D** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} -8 & -10 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En los problemas 21 a 30, la matriz dada **A** es simétrica. Encuentre una matriz ortogonal **P** que diagonalice a **A** y la matriz diagonal **D** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{T}\mathbf{AP}$.

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 5 & \sqrt{10} \\ \sqrt{10} & 8 \end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
26. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
27. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$
28. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
30. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 31 a 34, utilice el procedimiento que se ilustra en el ejemplo 6 para identificar la sección cónica dada. Grafique.

31. $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 24$
32. $13x^2 - 10xy + 13y^2 = 288$
33. $-3x^2 + 8xy + 3y^2 = 20$
34. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 3x + 4y = 0$
35. Encuentre una matriz **A** de 2×2 que tenga valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ y vectores propios correspondientes $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
36. Encuentre una matriz simétrica de 3×3 que tenga los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$, y vectores propios correspondientes
$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
37. Si **A** es una matriz diagonalizable de $n \times n$, entonces $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, donde **D** es una matriz diagonal. Demuestre que si m es un entero positivo, entonces $\mathbf{A}^m = \mathbf{PD}^m\mathbf{P}^{-1}$.
38. La m-ésima potencia de una matriz diagonal
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
es
$$\mathbf{D}^m = \begin{pmatrix} a_{11}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^m \end{pmatrix}.$$
Utilice este resultado para calcular
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^4.$$

En los problemas 39 y 40, utilice los resultados de los problemas 37 y 38 para calcular la potencia indicada de la matriz que se proporciona.

39. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^5$
40. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -10 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{10}$

2.13 Criptografía

Introducción La palabra *criptografía* es una combinación de dos palabras griegas: *crypto*, que significa "oculto" o "secreto", y *grapho*, "escritura". La criptografía es entonces el estudio de la elaboración de "escritos secretos" o **códigos**.

En esta sección se considerará un sistema de codificación y descifrado de mensajes el cual requiere que tanto el emisor como el receptor del mensaje sepan:

- una regla de correspondencia específica entre un conjunto de símbolos (tales como letras del alfabeto y signos de puntuación a partir de los cuales se forman los mensajes) y un conjunto de enteros; y
- una matriz **A** *no singular* específica.

Codificación y descifrado Una correspondencia natural entre los primeros veintisiete números enteros no negativos y las letras del alfabeto y un espacio (para separar las palabras) está dada por

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
espacio	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

(1)

A partir de (1), el equivalente numérico del mensaje

SEND THE DOCUMENT TODAY

es

$$19\ 5\ 14\ 4\ 0\ 20\ 8\ 5\ 0\ 4\ 15\ 3\ 21\ 13\ 5\ 14\ 20\ 0\ 20\ 15\ 4\ 1\ 25. \qquad (2)$$

El emisor **codificará** el mensaje mediante la matriz no singular **A** y, como veremos más adelante, el receptor del mensaje codificado **descifrará** el mensaje por medio de la matriz (única) $\mathbf{A}^{-1}$. El mensaje numérico (2) está escrito ahora como una matriz. Puesto que hay 23 símbolos en el mensaje, necesitamos una matriz que pueda aceptar al menos 24 elementos (una matriz de $m \times n$ tiene mn elementos). Optamos por escribir (2) como la matriz de 3×8

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Observe que el último elemento (a_{38}) presente en la matriz **M** del mensaje simplemente se ha llenado con un espacio representado por el número 0. Desde luego, pudimos haber escrito (2) como una matriz de 6×4 o de 4×6; sin embargo, esto requeriría una gran matriz de codificación. Una matriz de 3×8 nos permite codificar el mensaje mediante una matriz de 3×3. El tamaño de las matrices utilizadas interesa cuando la codificación y el descifrado se efectúan a mano en lugar de hacerse por computadora.

Se selecciona la matriz de codificación **A**, o más bien se construye, de tal forma que

- **A** es no singular,
- **A** tiene solamente elementos enteros y
- $\mathbf{A}^{-1}$ tiene solamente elementos enteros.

El último criterio no es particularmente difícil de cumplir. Solamente necesitamos seleccionar los elementos enteros de **A** en tal forma que $\det \mathbf{A} = \pm 1$. Para una matriz de 2×2 o de 3×3 podemos calcular entonces $\mathbf{A}^{-1}$ mediante las fórmulas (4) y (5) de la sección 2.6. Si **A** tiene elementos enteros, entonces todos los cofactores C_{11}, C_{12}, etc., son también enteros. A partir de este análisis seleccionamos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Usted deberá comprobar que $\det \mathbf{A} = -1$.

El mensaje original se codifica premultiplicando la matriz $\mathbf{M}$ del mensaje por $\mathbf{A}$; es decir, el mensaje se envía como la matriz:

$$\mathbf{B} = \mathbf{AM} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

El lector se podrá imaginar la dificultad que implica descifrar (5) sin conocer $\mathbf{A}$. Sin embargo, el receptor del mensaje codificado $\mathbf{B}$ conoce $\mathbf{A}$ y a su inversa, por lo que el descifrado es el cálculo directo de la premultiplicación de $\mathbf{B}$ por $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{AM} = \mathbf{B} \quad \text{implica} \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.$$

Para la matriz (4), calculamos a partir de la expresión (5) dada en la sección 2.5 que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el mensaje descifrado es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -39 & -5 & -34 & -19 & -4 & -21 & -33 & -5 \\ 118 & 22 & 153 & 77 & 79 & 83 & 131 & 52 \\ 138 & 26 & 188 & 95 & 104 & 97 & 161 & 66 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 \\ 0 & 4 & 15 & 3 & 21 & 13 & 5 & 14 \\ 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

o

$$19\ 5\ 14\ 4\ 0\ 20\ 8\ 5\ 0\ 4\ 15\ 3\ 21\ 13\ 5\ 14\ 20\ 0\ 20\ 15\ 4\ 1\ 25\ 0.$$

Sin embargo, también mediante el conocimiento de la correspondencia original (1), el receptor traduce los números en

SEND_THE_DOCUMENT_TODAY_

donde hemos indicado los espacios en blanco mediante líneas.

Vale la pena hacer algunas observaciones. La correspondencia o mapeo (1) es una de las muchas correspondencias que pueden establecerse entre las letras del alfabeto (incluso podríamos incluir los símbolos de puntuación como el punto y la coma) y los números enteros. Mediante la utilización de las 26 letras del alfabeto y el espacio en blanco, podemos establecer 27! de estas correspondencias. (¿Por qué?) Además, pudimos haber usado una matriz de 2×2 para codificar (2). El tamaño de la matriz $\mathbf{M}$ del mensaje habría sido entonces de al menos 2×12 con la finalidad de poder contener los 23 elementos del mensaje. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{B} = \mathbf{AM} = \begin{pmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al utilizar $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenemos como antes

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 61 & 31 & 24 & 32 & 40 & 20 & 48 & 35 & 8 & 6 & 65 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 5 & 14 & 4 & 0 & 20 & 8 & 5 & 0 & 4 & 15 & 3 \\ 21 & 13 & 5 & 14 & 20 & 0 & 20 & 15 & 4 & 1 & 25 & 0 \end{pmatrix}.$$

No existe una razón en particular por la que el mensaje numérico (2) tenga que fragmentarse en renglones (1×8 vectores) como en la matriz (3). De manera alterna, (2) podría haberse fragmentado en columnas (vectores de 3×1) como se muestra en la matriz

$$\begin{pmatrix} 19 & 4 & 8 & 4 & 21 & 14 & 20 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & 15 & 13 & 20 & 15 & 25 \\ 14 & 20 & 0 & 3 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último, sería recomendable enviar el mensaje codificado en forma de letras del alfabeto más que como números. En el problema 13 de los ejercicios 2.13 estudiaremos la forma de transmitir el mensaje SEND THE DOCUMENT TODAY codificado como

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL.

EJERCICIOS 2.13

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6, utilice la matriz $\mathbf{A}$ y la correspondencia (1) para codificar el mensaje dado. Verifique su trabajo descifrando el mensaje codificado.

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; SEND HELP

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; THE MONEY IS HERE

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; PHONE HOME

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; MADAME X HAS THE PLANS

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; GO NORTH ON MAIN ST

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; DR JOHN IS THE SPY

En los problemas 7 a 10, utilice la matriz $\mathbf{A}$ y la correspondencia (1) para descifrar el mensaje dado.

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 152 & 184 & 171 & 86 & 212 \\ 95 & 116 & 107 & 56 & 133 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 46 & -7 & -13 & 22 & -18 & 1 & 10 \\ 23 & -15 & -14 & 2 & -18 & -12 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 31 & 21 & 21 & 22 & 20 & 9 \\ 19 & 0 & 9 & 13 & 16 & 15 \\ 13 & 1 & 20 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 36 & 32 & 28 & 61 & 26 & 56 & 10 & 12 \\ -9 & -2 & -18 & -1 & -18 & -25 & 0 & 0 \\ 23 & 27 & 23 & 41 & 26 & 43 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

11. Utilicemos la correspondencia (1) para codificar el mensaje siguiente empleando una matriz de 2×2:

$$\begin{pmatrix} 17 & 16 & 18 & 5 & 34 & 0 & 34 & 20 & 9 & 5 & 25 \\ -30 & -31 & -32 & -10 & -59 & 0 & -54 & -35 & -13 & -6 & -50 \end{pmatrix}$$

Descifre el mensaje si las dos primeras letras son DA y las dos últimas son AY.

12. *a*) Utilizando la correspondencia

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
j	k	l	n	m	s	t	u	w	x	g	h	i	o	p	q	r	v	y	z	a	b	c	d	e	f	espacio

encuentre el valor numérico del mensaje

BUY ALL AVAILABLE STOCK AT MARKET

b) Codifique el mensaje *posmultiplicando* la matriz **M** del mensaje por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Verifique su trabajo descifrando el mensaje codificado en la parte *b*).

13. Con relación a las matrices **A** y **B** que se definieron en (4) y (5), respectivamente.

a) Rescriba **B** como **B**′ utilizando enteros módulo 27.*

b) Compruebe que el mensaje codificado que se vaya a enviar como letras sea

OVTHWFUVJVRWYBWYCZZNWPZL

c) Descifre el mensaje codificado calculando $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}'$ y rescribiendo el resultado mediante el uso de enteros módulo 27.

2.14 Código corrector de errores

Introducción En contraste con la sección anterior, no existe ninguna connotación de hermetismo en la palabra "código" tal como se utiliza en esta sección. Vamos a estudiar brevemente el concepto de comunicaciones digitales, esto es, las comunicaciones que hay entre un satélite y una computadora. Como consecuencia, solamente trataremos con matrices cuyos elementos sean dígitos binarios, es decir, ceros y unos. Al sumar o multiplicar dichas matrices, utilizaremos **aritmética módulo 2**. Esta aritmética está definida mediante las tablas de suma y multiplicación

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Propiedades fundamentales como la conmutativa y la asociativa son válidas para este sistema. La única excepción significativa en este caso es que $1 + 1 = 0$.

Secuencias binarias En las comunicaciones digitales, los **mensajes** o **palabras** están compuestos por n tuplas binarias, es decir, n tuplas constituidas únicamente por ceros y unos, o **bits**. Se dice que una palabra de n bits es una **secuencia** binaria de **longitud** n.

Ejemplo 1 Secuencias binarias

a) Las 4 tuplas ordenadas (0, 1, 0, 1) constituyen una palabra de 4 bits, o una secuencia de longitud cuatro.

b) La representación binaria (es decir, en base 2) del número 39 es 1 0 0 1 1 1, o como 6 tuplas (1, 0, 0, 1, 1, 1).

c) La palabra ASCII† correspondiente a la letra Z es la secuencia de longitud 8: (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0). ❑

Por conveniencia, una palabra de longitud n se escribirá como una matriz de $1 \times n$, esto es, como un vector renglón. Por ejemplo, la palabra de 4 bits del ejemplo 1 se escribiría como la matriz de 1×4, $\mathbf{W} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 1)$.

*Para los enteros a y b, escribimos $a = b \pmod{27}$ si b es el residuo ($0 \leq b < 27$) cuando a se divide entre 27. Por ejemplo, $33 = 6 \pmod{27}$, $28 = 1 \pmod{27}$, y así por el estilo. Los enteros negativos se manejan de la manera siguiente. Si $27 = 0 \pmod{27}$, entonces, por ejemplo, $25 + 2 = 0 \pmod{27}$ de tal forma que $-25 = 2 \pmod{27}$ y $-2 = 25 \pmod{27}$. Asimismo, $-30 = 24 \pmod{27}$, puesto que $30 + 24 (= 54) = 0 \pmod{27}$.

†Siglas de American Standard Code for Information Interchange (Código Estadounidense Estándar para Intercambio de Información).

■ **Códigos** Con la frase **codificar** un mensaje queremos explicitar el proceso mediante el cual transformamos una palabra **W** de longitud n en otra palabra **C** de longitud $n + m$ agregando m bits a **W**, llamados **bits de verificación de paridad**. Se dice que una palabra codificada es una **palabra código**. Mediante el **descifrado** de un mensaje recibido queremos explicitar otro proceso que proporciona ya sea otro mensaje descifrado o una indicación de que ha ocurrido un error durante la transmisión. Se le llama **código** a un esquema de codificación y descifrado.

Uno de los códigos más sencillos que existen es el código de verificación de paridad, en el cual una palabra se codifica de acuerdo a la regla:

$$\text{Si el número de unos localizados en la palabra es} \begin{cases} \text{par: Agregue un 0 a la palabra} \\ \text{impar: Agregue un 1 a la palabra} \end{cases} \quad (1)$$

La palabra *paridad* se refiere a si el número de unos que hay en una palabra es par o impar. La regla de codificación proporcionada en (1) permite que la paridad de la palabra código sea siempre par.

Ejemplo 2 Codificación de palabras

Utilice el código de verificación de paridad para codificar las palabras *a*) **W** = (1 0 0 0 1 1) y *b*) **W** = (1 1 1 0 0 1).

Solución *a*) Puesto que en **W** el número de unos es impar, agregamos el bit extra 1 al final de la palabra **W**. La palabra código es entonces **C** = (1 0 0 0 1 1 1). *b*) En este caso, el número de unos es par, por lo que el bit extra agregado a la palabra es 0. La palabra codificada es **C** = (1 1 1 0 0 1 0). ❑

En las comunicaciones digitales la palabra codificada **C** es la que se transmite. Sin embargo, debido a la presencia de algún tipo de interferencia o ruido en el canal de transmisión, pueden modificarse uno o más bits de **C**. Por lo tanto, el mensaje transmitido no siempre es el que se recibe. Consulte la figura 2.12.

El código de verificación de paridad permite que al descifrar se detecten errores simples. Suponga que **R** es el mensaje recibido. Un error simple en **R** significa que un bit se ha modificado; ya sea que un cero se haya convertido en uno o viceversa. En cualquier caso, la paridad de la palabra **R** es impar.

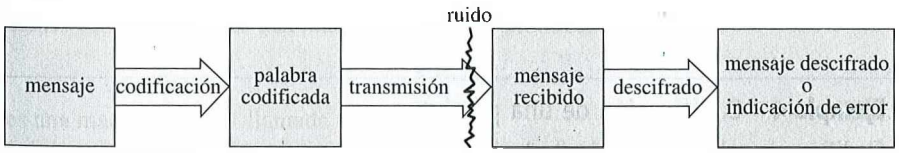


Figura 2.12 Los bits de una palabra codificada pueden sufrir modificaciones debido a interferencias

---

Ejemplo 3 Descifrado de palabras

Utilice el código de verificación de paridad para descifrar las palabras

a) **R** = (1 1 0 0 1 0 1) y
b) **R** = (1 0 1 1 0 0 0).

Solución *a*) La paridad de **R** es par. Eliminamos el último bit y hacemos que el mensaje descifrado sea (1 1 0 0 1 0). *b*) La paridad de **R** es impar. El descifrado es simple: un error de paridad. ❑

Para algunos tipos de comunicación digital, como la comunicación interna con una computadora, se recomienda el código de verificación de paridad. Sin embargo, el ejemplo 2 indica claramente una desventaja importante de este código: si se presenta un error, no sabremos cómo corregirlo ya que no sabemos cuál es el bit incorrecto. Además, se pueden presentar múltiples errores en la transmisión. Si, digamos, dos unos fueron cambiados por ceros durante la transmisión, el mensaje recibido mantendría paridad par y el descifrado se efectuaría eliminando el último bit. En este caso, al menos uno de los bits del mensaje descifrado es erróneo.

Códigos Hamming El código de verificación de paridad es un ejemplo de un código de *detección de errores*, pero no de *corrección de errores*. En lo que resta de este estudio se considerará un código detector y corrector de errores que se llama **código Hamming (7, 4)**. Este código, uno de los más ampliamente utilizados, fue inventado por el matemático Richard W. Hamming, de los Laboratorios Bell, en los años de 1950 y es un esquema de codificación y descifrado capaz de detectar la presencia de un solo error en un mensaje recibido, además puede proporcionar información acerca de qué bit debe corregirse. En el código (7, 4) el proceso de codificación consiste en transformar una palabra de 4 bits $\mathbf{W} = (w_1 \ \ w_2 \ \ w_3 \ \ w_4)$ en una palabra codificada de 7 bits

$$\mathbf{C} = (c_1 \ \ c_2 \ \ w_1 \ \ c_3 \ \ w_2 \ \ w_3 \ \ w_4),$$

donde c_1, c_2 y c_3 denotan los bits de paridad. (Las palabras mayores a cuatro bits pueden fragmentarse en secuencias de palabras de cuatro bits.)

Codificación En el código Hamming (7, 4) los bits de verificación de paridad c_1, c_2 y c_3 están definidos en términos de los bits de información w_1, w_2, w_3 y w_4:

$$\begin{aligned} c_1 &= w_1 + w_2 + w_4 \\ c_2 &= w_1 + w_3 + w_4 \\ c_3 &= w_2 + w_3 + w_4, \end{aligned} \tag{2}$$

donde la aritmética se lleva a cabo en módulo 2. Utilizando matrices, podemos escribir (2) como el producto

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Ejemplo 4 Codificación de una palabra

Codifique la palabra $\mathbf{W} = (1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1)$.

Solución A partir de (3) tenemos, con $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$ y $w_4 = 1$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto es, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, por lo que la palabra codificada correspondiente es $\mathbf{C} = (0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1)$. ❑

Antes de entrar en los detalles acerca de cómo descifrar un mensaje, necesitamos presentar una matriz especial. Primero observamos que en la aritmética módulo 2 no existen

números negativos; el inverso aditivo de 1 es 1 no -1. Teniendo esto presente, podemos escribir el sistema (2) en la forma equivalente

$$\begin{aligned} c_3 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_2 + w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_1 + w_1 + w_2 + w_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

A estas expresiones se les llama **ecuaciones para la verificación de paridad**. Esto significa que cada c_i es una verificación de paridad de tres de los dígitos de la palabra original. Por ejemplo, si el número de unos ubicados en los tres dígitos w_2, w_3 y w_4 es impar, entonces, de la misma forma que con el código de verificación de paridad estudiado antes, podríamos considerar $c_1 = 1$, y así sucesivamente. Como una matriz producto, (4) puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ w_1 \\ c_3 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La matriz de 3×7 en (5),

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se denomina **matriz de verificación de paridad**. Hemos demostrado en (5) que los dígitos binarios de una palabra código $\mathbf{C} = (c_1 \;\; c_2 \;\; w_1 \;\; c_3 \;\; w_2 \;\; w_3 \;\; w_4)$ satisfacen la ecuación matricial

$$\mathbf{HC}^T = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Una inspección más detallada de $\mathbf{H}$ muestra algo sorprendente: las columnas de $\mathbf{H}$, de izquierda a derecha, son los números 1 a 7 escritos en binario. Por ejemplo, escribiendo la columna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1 1 0, como 1 1 0, podemos reconocer la representación binaria del número 6.

Sea $\mathbf{R}$ una matriz de 1×7 que representa el mensaje recibido. Puesto que $\mathbf{H}$ es una matriz de 3×7 y $\mathbf{R}^T$ es una matriz de 7×1, el producto

$$\mathbf{S} = \mathbf{HR}^T \tag{7}$$

es una matriz de 3×1 llamada **síndrome** de $\mathbf{R}$.

Descifrado Si el síndrome del mensaje recibido $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{S} = \mathbf{HR}^T = \mathbf{0},$$

entonces, en vista del resultado en (6), podemos concluir que $\mathbf{R}$ es una palabra código, y se supone que la transmisión es correcta con $\mathbf{R}$ igual al mensaje original codificado $\mathbf{C}$. El descifrado del mensaje se logra eliminando simplemente los tres bits de verificación en $\mathbf{R}$.

Ejemplo 5 Síndromes

Calcule el síndrome de

a) $\mathbf{R} = (1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1)$ y

b) $\mathbf{R} = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0)$.

Solución *a*) A partir de (7) tenemos,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Concluimos que **R** es la palabra código. Eliminando los bits de verificación en color de (1 1 0 1 0 0 1), obtenemos el mensaje descifrado (0 0 0 1).

b) A partir de (7), $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Puesto que $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, el mensaje recibido **R** no es la palabra código. ❑

Como se mencionó antes, el código Hamming (7, 4) nos permite detectar y también corregir un solo error en el mensaje **R**. Sea **C** una palabra código y let $\mathbf{E} = [e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7]$ una palabra de ruido con un solo error que se suma a **C** durante su transmisión. Los elementos de **E** están definidos como

$$e_i = \begin{cases} 1, & \text{si el ruido cambia el } i\text{-ésimo bit} \\ 0, & \text{si el ruido no cambia el } i\text{-esimo bit.} \end{cases}$$

El mensaje recibido es entonces $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{E}$. A partir de la propiedad $\mathbf{R}^T = \mathbf{C}^T + \mathbf{E}^T$ y de la ley distributiva, observamos que el síndrome de **R** es el mismo que el de **E**:

$$\mathbf{HR}^T = \mathbf{H}(\mathbf{C}^T + \mathbf{E}^T) = \mathbf{HC}^T + \mathbf{HE}^T = \mathbf{0} + \mathbf{HE}^T = \mathbf{HE}^T.$$

A partir de la definición de matriz suma, la expresión anterior representa un procedimiento directo para comprobar que el síndrome de **E**

$$\mathbf{HE}^T = \begin{pmatrix} e_4 + e_5 + e_6 + e_7 \\ e_2 + e_3 + e_6 + e_7 \\ e_1 + e_3 + e_5 + e_7 \end{pmatrix}$$

puede escribirse como la suma de vectores columna de **H** con los coeficientes de los símbolos que denotan los bits donde puede presentarse el error:

$$\mathbf{HE}^T = e_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e_7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ahora considere el conjunto de vectores columna de 3×1 cuyos elementos son dígitos binarios. Puesto que sólo existen dos formas de seleccionar cada uno de los tres elementos, tenemos $2^3 = 8$ de tales vectores. Los siete vectores *diferentes de cero* son las columnas de **H** o los vectores columna desplegados en (8). El síndrome **S** del mensaje recibido **R** es un vector columna de 3×1 con elementos binarios; de aquí que, si $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, entonces **S** debe ser una de las columnas de **H**. Si **R** contiene un solo error, entonces $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ y, puesto que todos los elementos de **E** son cero excepto un elemento, podemos observar a partir de (8) que, en sí mismo, el síndrome indica qué bit es el erróneo. En la

práctica no es necesario escribir (8); sólo calcule el síndrome **S** del mensaje recibido **R**. **S** es una columna de **H** y, en consecuencia, es el número binario de ese bit erróneo.

Ejemplo 6 Descifrado de una palabra

En la parte *b*) del ejemplo 5 pudimos observar que el síndrome del mensaje $\mathbf{R} = (1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$ fue $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Esto es la tercera columna de **H** (o la representación binaria del número 3) y así concluimos que el tercer bit de **R** es erróneo. Cambiando el cero por un uno obtenemos la palabra código $\mathbf{C} = (1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$. De modo que eliminando de **C** los bits primero, segundo y cuarto encontremos el mensaje descifrado $(1\ 0\ 1\ 0)$. ❑

En estas breves descripciones de criptografía y teoría de la codificación todavía ni siquiera hemos comenzado a rascar en la superficie de estos temas tan interesantes. Nuestro objetivo fue muy modesto: mostrar cómo la teoría de matrices es una herramienta de trabajo natural en varias áreas de las matemáticas y de las ciencias de la computación.

Comentarios

El código Hamming (7, 4) puede detectar sin corregir cualquier par de errores. Los alumnos interesados en saber cómo se lleva a cabo esto o en detalles adicionales de la teoría de la codificación deberán consultar su biblioteca para poder acceder a textos más especializados.

EJERCICIOS 2.14 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6, codifique la palabra dada utilizando el código de verificación de paridad.

1. $(0\ 1\ 1)$
2. $(1\ 1\ 1)$
3. $(0\ 0\ 0\ 1)$
4. $(1\ 0\ 1\ 0)$
5. $(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$
6. $(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$

En los problemas 7 a 12, descifre el mensaje dado utilizando el código de verificación de paridad.

7. $(1\ 0\ 0\ 1)$
8. $(0\ 0\ 1\ 1)$
9. $(1\ 1\ 1\ 0\ 0)$
10. $(1\ 0\ 1\ 0\ 0)$
11. $(1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)$
12. $(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$

En los problemas 13 a 18, codifique la palabra dada utilizando el código Hamming (7, 4).

13. $(1\ 1\ 1\ 0)$
14. $(0\ 0\ 1\ 1)$
15. $(0\ 1\ 0\ 1)$
16. $(0\ 0\ 0\ 1)$
17. $(0\ 1\ 1\ 0)$
18. $(1\ 1\ 0\ 0)$

En los problemas 19 a 28, determine si el mensaje dado es una palabra código cifrada en código Hamming (7, 4). Si es así, descífrelo; de lo contrario, corrija el único error y descifre el mensaje corregido.

19. $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$
20. $(1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$
21. $(1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)$
22. $(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$
23. $(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$
24. $(1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)$
25. $(0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)$
26. $(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$
27. $(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$
28. $(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$
29. *a*) Determine el número total de 7 tuplas con elementos binarios.
    b) ¿Cuántas palabras código de 7 tuplas hay en el código Hamming (7, 4)?
    c) Elabore una lista de todas las palabras código incluidas en el código Hamming (7, 4).
30. *a*) En el código Hamming (8, 4) una palabra
$$\mathbf{W} = (w_1\ w_2\ w_3\ w_4)$$
de longitud 4 se transforma en una palabra código de longitud 8:
$$\mathbf{C} = (c_1\ c_2\ c_3\ w_1\ c_4\ w_2\ w_3\ w_4),$$
donde las ecuaciones de verificación de paridad son
$$\begin{aligned} c_4 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_3 + w_1 + w_3 + w_4 &= 0 \\ c_2 + w_1 + w_2 + w_4 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 + w_1 + c_4 + w_2 + w_3 + w_4 &= 0. \end{aligned}$$
Codifique la palabra $(0\ 1\ 1\ 0)$.
    b) A partir del sistema dado en la parte *a*), determine la matriz de verificación de paridad **H**.
    c) Utilizando la matriz **H** de la parte *b*), calcule el síndrome **S** del mensaje recibido
$$\mathbf{R} = (0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0).$$

2.15 Método de los mínimos cuadrados

Introducción En la realización de experimentos, a menudo tabulamos datos en la forma de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde cada x_i es diferente. Dados los datos, frecuentemente deseamos poder extrapolar o predecir y a partir de x calculando un modelo matemático, es decir, una función que se aproxime o "ajuste" a los datos. En otras palabras, queremos encontrar una función $f(x)$ tal que,

$$f(x_1) \approx y_1, \quad f(x_2) \approx y_2, \quad \ldots, \quad f(x_n) \approx y_n.$$

Sin embargo, es natural que no solamente deseemos *cualquier* función, sino una función que se ajuste a los datos tanto como sea posible.

En el análisis presentado enseguida, concentraremos nuestra atención sobre el problema de encontrar un polinomio lineal $f(x) = ax + b$ o línea recta que "se ajuste de la mejor manera" a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. El procedimiento para calcular esta función lineal se conoce como el **método de los mínimos cuadrados**.

Comencemos con un ejemplo.

Ejemplo 1 Línea de mejor ajuste

Considere los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la figura 2.13*a*). De manera visual, y por el hecho de que la línea $y = x + 1$, mostrada en la figura 2.13*b*), pasa a través de dos de los puntos de datos, podemos considerar esta línea como la que mejor se ajusta a los datos. ❑

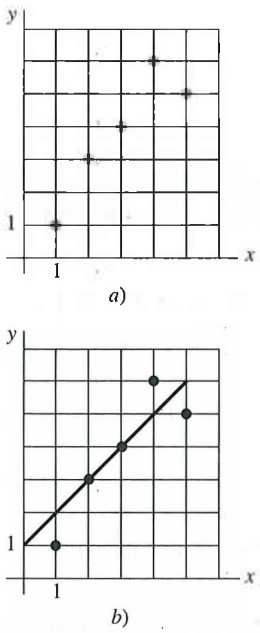


Figura 2.13 Puntos de datos en *a*); una línea que se ajusta a los datos en *b*)

Es evidente que necesitamos algo mejor que la estimación visual para determinar la función lineal $y = f(x)$, como se hizo en el último ejemplo. Necesitamos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como a menudo se conoce, "la bondad del ajuste".

Si tratamos de comparar los puntos de datos con la función $f(x) = ax + b$, entonces queremos encontrar los valores de a y b que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= ax_n + b \end{aligned} \tag{1}$$

o $$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} \quad \text{donde} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Por desgracia, (1) es un sistema sobredeterminado y, al menos que los puntos de datos estén en la misma línea, no tiene solución. Por lo tanto, debemos conformarnos con encontrar un vector $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de tal manera que el lado derecho $\mathbf{AX}$ se encuentre en la proximidad del lado izquierdo $\mathbf{Y}$.

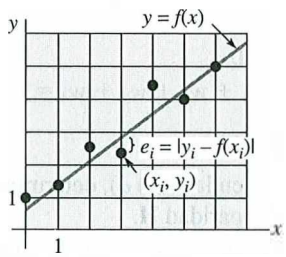


Figura 2.14 e_i es el error producido al aproximar y_i a $f(x_i)$

Línea de los mínimos cuadrados Si los puntos de datos son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, entonces una manera de determinar qué tan bien se ajusta la función lineal $f(x) = ax + b$ a los datos es medir las distancias verticales que hay entre los puntos y las gráficas de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos pensar de cada e_i como el error producido al aproximar el valor del dato y_i mediante el valor funcional $f(x_i)$. Observe la figura 2.14. De manera intuitiva, sabemos que la función f se ajustará bien a los datos si la suma de todos los valores e_i es mínima. En realidad, un método más adecuado para resolver el problema es encontrar una función lineal f de tal forma que la suma de los *cuadrados* de todos los valores e_i sea mínima.

Definamos que la solución del sistema (1) sean aquellos coeficientes a y b que minimicen la expresión $E = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$, es decir,

$$\begin{aligned} E &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (ax_1 + b)]^2 + [y_2 - (ax_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (ax_n + b)]^2 \end{aligned}$$

o

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b]^2. \tag{3}$$

La expresión E se llama **suma de los errores cuadrados**. La línea $y = ax + b$ que minimiza la suma de los errores cuadrados (3) es, por definición, la **línea de mejor ajuste** y se denomina **línea de los mínimos cuadrados** de los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

El problema aún prevalece: ¿cómo encontramos los valores de a y b de tal forma que el valor de (3) sea mínimo? La respuesta puede encontrarse en el cálculo. Si pensamos en (3) como una función de dos variables a y b, entonces para encontrar el valor mínimo de E establecemos la primera derivada parcial como igual a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

A su vez, las últimas dos condiciones nos dan,

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^{n} x_i [y_i - ax_i - b] &= 0 \\ -2 \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b] &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Expandimos las sumas y utilizamos $\sum_{i=1}^{n} b = nb$, para encontrar que el sistema (4) es igual a

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a + \qquad nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{5}$$

Aunque no se darán los detalles, los valores de a y b que satisfacen el sistema (5) nos dan el valor mínimo de E.

En términos de matrices, es posible demostrar que (5) es equivalente a

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^T\mathbf{Y}, \tag{6}$$

donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{X}$ se encuentran definidos en (2). Puesto que $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times 2$ y $\mathbf{A}^T$ es una matriz de $2 \times n$, la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es de 2×2. Además, a menos que todos los puntos de datos se encuentren sobre la misma línea vertical, la matriz $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ es no singular. Por lo tanto, (6) tiene la solución única

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}. \tag{7}$$

Decimos que $\mathbf{X}$ es la solución por mínimos cuadrados del sistema sobredeterminado (1).

Ejemplo 2 Línea de mínimos cuadrados

Encuentre la línea de mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 1. Determine la suma de los errores cuadrados E para esta línea y para la expresada por medio de $y = x + 1$.

Solución Para la función $f(x) = ax + b$, los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) nos llevan al sistema sobredeterminado,

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 3 \\ 3a + b &= 4 \\ 4a + b &= 6 \\ 5a + b &= 5. \end{aligned} \tag{8}$$

Por otro lado, identificando

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo que (7) nos da

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 55 & 15 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 68 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

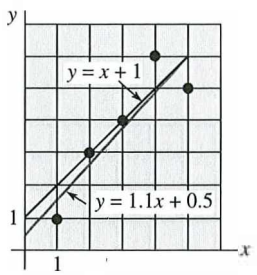


Figura 2.15 Línea de los mínimos cuadrados (inferior) del ejemplo 2.

Por lo tanto, la solución por mínimos cuadrados de (8) es $a = 1.1$ y $b = 0.5$, y la línea de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para esta línea, la suma de los errores cuadrados es

$$E = [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2$$
$$= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7.$$

Para la línea $y = x + 1$ estimada y que también pasa por dos de los puntos de datos, encontramos que $E = 3.0$.

Mediante comparación, la figura 2.15 muestra los puntos de datos, la línea $y = x + 1$, y la línea de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$. ❑

EJERCICIOS 2.15 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 6, encuentre la línea de mínimos cuadrados para los datos que se proporcionan.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)
7. En un experimento, se encontró la correspondencia siguiente entre la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática v (en centistokes) de un aceite con cierto aditivo:

T	20	40	60	80	100	120
v	220	200	180	170	150	135

Encuentre la línea de mínimos cuadrados $v = aT + b$. Utilice esta línea para calcular la viscosidad del aceite a $T = 140$ y $T = 160$.

8. En un experimento, se encontró la correspondencia siguiente entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en MΩ):

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

Encuentre la línea de mínimos cuadrados $R = aT + b$. Utilice esta línea para calcular la resistencia a $T = 700$.

2.16 Modelos discretos de compartimiento

Introducción La construcción de un modelo matemático que describe el número de libras de sal que hay en dos tanques conectados donde fluye salmuera hacia dentro y fuera de los tanques es un ejemplo de **análisis compartimental**. Es posible comprobar mediante el análisis, que el modelo compartimental es un sistema de ecuaciones diferenciales. En esta sección presentamos la noción de un modelo matemático discreto.

El modelo general de dos compartimientos Suponga que fluye material entre dos tanques con volúmenes V_1 y V_2. En el diagrama que se muestra en la figura 2.16, F_{01}, F_{12}, F_{21}, F_{10} y F_{20} representan velocidades de flujo. Observe que el símbolo con doble subíndice F_{ij} representa la velocidad de flujo desde el tanque i al tanque j. Después, suponga que una segunda sustancia, llamada **rastreador**, se inyecta al compartimiento 1 a una velocidad $I(t)$ conocida. Supondremos que el rastreador está perfectamente mezclado en ambos compartimientos en todo momento t. Si $x(t)$ expresa la cantidad de rastreador que hay en el compartimiento 1 y $y(t)$ es la cantidad correspondiente en el compartimiento 2, entonces las concentraciones son $c_1(t) = x(t)/V_1$ y $c_2(t) = y(t)/V_2$, respectivamente. Se puede concluir que el modelo general de dos compartimientos es,

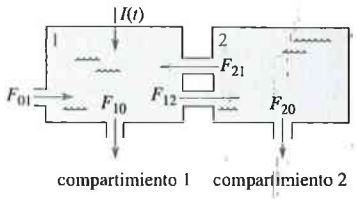


Figura 2.16 Material fluyendo entre dos compartimientos a velocidades específicas

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -(F_{12} + F_{10})c_1(t) + F_{21}c_2(t) + I(t) \\ \frac{dy}{dt} &= F_{21}c_1(t) - (F_{21} + F_{20})c_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

El modelo presentado en (1) mantiene un registro de la cantidad de rastreador que fluye entre los compartimientos. El material consiste en, digamos, un fluido y un rastreador que se *intercambian de manera continua*. Presentamos a continuación un modelo que mantiene un registro del contenido de los compartimientos cada Δt unidades de tiempo y supone que el sistema cambia solamente en los tiempos $\Delta t, 2\Delta t, \ldots, n\Delta t, \ldots$ Desde luego, seleccionando un valor para Δt muy pequeño, podemos aproximar el caso continuo.

Modelos discretos compartimentales En la construcción de un modelo compartimental de un sistema físico, conceptualmente separamos el sistema en un número diferente de pequeños componentes entre los cuales se transporta material. No es necesario que los compartimientos sean diferentes espacialmente, sino que se puedan distinguir con respecto a algún criterio. A continuación se muestran algunos ejemplos:

- Lluvia ácida (conteniendo estroncio 90, por ejemplo) está depositada sobre pastizales. Los compartimientos pueden ser pastos, suelo, corrientes y basura.
- Al estudiar el flujo de energía que fluye a través de un ecosistema acuático, podemos separar el sistema en fitoplancton, zooplancton, depredadores de plancton, algas marinas, pequeños carnívoros, grandes carnívoros y organismos en decadencia.
- Un rastreador se inyecta en el torrente sanguíneo y se pierde en el cuerpo gracias al metabolismo de un órgano en particular y por excreción. Los compartimientos apropiados podrían ser sangre arterial, sangre venosa, el órgano en cuestión y la orina.

Suponga que un sistema está dividido en n compartimientos y que, después de cada Δt unidades de tiempo, se intercambia el material entre los compartimientos. Se supondrá que una fracción fija τ_{ij} del contenido del compartimiento j se transfiere al compartimiento i cada Δt unidades de tiempo, como se muestra en la figura 2.17. Este supuesto se conoce como **hipótesis lineal controlada por donores**.

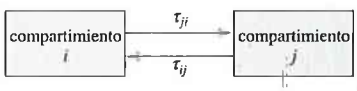


Figura 2.17 Intercambio de material entre compartimientos

Dejemos que los elementos x_i de la matriz $\mathbf{X}$ de $n \times 1$,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

representen las cantidades de rastreador que hay en el compartimiento i. Decimos que $\mathbf{X}$ especifica el **estado del sistema**. La matriz $\mathbf{Y}$ de $n \times 1$ es el estado del sistema Δt unidades de tiempo después. Demostraremos que $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ están relacionados por la ecuación matricial $\mathbf{Y} = \mathbf{TX}$, donde $\mathbf{T}$ es una matriz de $n \times n$ determinada mediante los **coeficientes de transferencia** τ_{ij}. Para encontrar $\mathbf{T}$ observe, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + (\text{cantidad de rastreador ingresando a 1}) - (\text{cantidad de rastreador abandonando 1}) \\ &= x_1 + (\tau_{12}x_2 + \tau_{13}x_3 + \cdots + \tau_{1n}x_n) - (\tau_{21} + \tau_{31} + \cdots + \tau_{n1})x_1 \\ &= (1 - \tau_{21} - \tau_{31} - \cdots - \tau_{n1})x_1 + \tau_{12}x_2 + \cdots + \tau_{1n}x_n. \end{aligned}$$

Si permitimos que $\tau_{11} = 1 - \tau_{21} - \tau_{31} - \cdots - \tau_{n1}$, entonces τ_{11} es justamente la fracción del contenido del compartimiento 1 que permanece en 1.

Al permitir que $\tau_{ii} = 1 - \Sigma_{j \neq i}\tau_{ji}$ tenemos, en general,

$$\begin{aligned} y_1 &= \tau_{11}x_1 + \tau_{12}x_2 + \cdots + \tau_{1n}x_n \\ y_2 &= \tau_{21}x_1 + \tau_{22}x_2 + \cdots + \tau_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_n &= \tau_{n1}x_1 + \tau_{n2}x_2 + \cdots + \tau_{nn}x_n \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

La ecuación matricial (3) es la ecuación deseada $\mathbf{Y} = \mathbf{TX}$. La matriz $\mathbf{T} = (\tau_{ij})_{n \times n}$ se denomina **matriz de transferencia**. Observe que la suma de los elementos de cualquier columna, coeficientes de transferencia, es igual a 1.

Modelos discretos compartimentales se muestran en los dos ejemplos siguientes.

Nota: Una matriz de transferencia es un ejemplo de matriz estocástica. Consulte el problema 27 de los ejercicios 2.8.

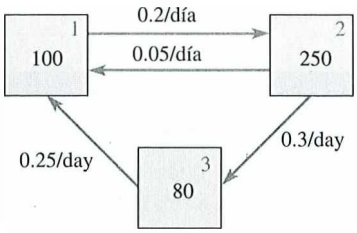


Figura 2.18 Compartimientos y coeficientes de transferencia del ejemplo 1

Ejemplo 1 Matriz de transferencia

Las tres cajas de la figura 2.18 representan tres compartimientos. El contenido de cada compartimiento en el tiempo t se indica en cada caja. Los coeficientes de transferencia se muestran al lado de las flechas que conectan los compartimientos.

a) Encuentre la matriz de transferencia $\mathbf{T}$.

b) Suponga que $\Delta t = 1$ día. Encuentre el estado del sistema $\mathbf{Y}$ un día después.

Solución *a*) El estado del sistema en el tiempo $t = 0$ es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Recuerde que τ_{ij} especifica la velocidad de transferencia del compartimiento j al i. De aquí tenemos que $\tau_{21} = 0.2$, $\tau_{12} = 0.05$, $\tau_{32} = 0.3$, $\tau_{23} = 0$, $\tau_{13} = 0.25$ y $\tau_{31} = 0$. A partir de estas cantidades podemos observar que la matriz $\mathbf{T}$ es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} — & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & — & 0 \\ 0 & 0.3 & — \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Sin embargo, puesto que los elementos de las columnas deben sumar 1, podemos llenar los espacios en (4):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

b) El estado del sistema un día después es, por lo tanto,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{TX} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.25 \\ 0.2 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 182.5 \\ 135 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Si $\mathbf{X}_0$ expresa el estado inicial del sistema y $\mathbf{X}_n$ es el estado después de $n(\Delta t)$ unidades de tiempo, entonces

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}\mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{T}\mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{T}\mathbf{X}_2, \ldots, \quad \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}_n.$$

Ya que $$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T}(\mathbf{T}\mathbf{X}_0) = \mathbf{T}^2\mathbf{X}_0, \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{T}(\mathbf{T}^2\mathbf{X}_0) = \mathbf{T}^3\mathbf{X}_0, \ldots,$$

tenemos en general que $$\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Por supuesto, pudimos haber utilizado el método que se mostró en la sección 2.9 para calcular $\mathbf{T}^n$; sin embargo, con ayuda de una calculadora o un sistema asistido por computadora resulta muy sencillo utilizar la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}_n$ permitiendo que $n = 0, 1, \ldots$

Ejemplo 2 Estados de un ecosistema

Se deposita estroncio 90 sobre los pastizales debido a la lluvia. Para estudiar cómo se transporta este material a través del ecosistema, fragmentamos el sistema en los compartimientos que se muestran en la figura 2.19. Suponga que $\Delta t = 1$ mes y los coeficientes de transferencia (estimados de manera experimental) que se muestran en la figura se miden en fracción/mes. (Ignoraremos que se pierde parte del estroncio 90 debido a la disminución de la radiactividad.) Suponga que la lluvia deposita el estroncio 90 en los compartimientos por lo cual $\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$. (Las unidades deben ser gramos por hectárea.) Determine los estados del ecosistema para los siguientes 12 meses.

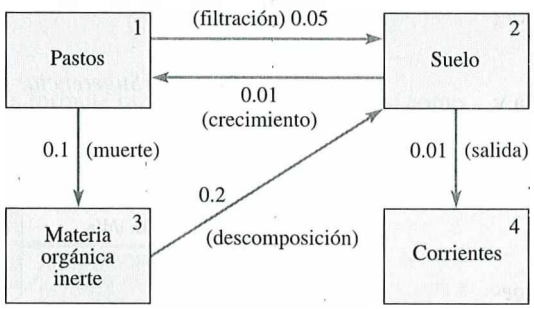


Figura 2.19 Ecosistema del ejemplo 2

Solución A partir de los datos de la figura 2.19 podemos observar que la matriz de transferencia $\mathbf{T}$ es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.98 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Debemos calcular $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_{12}$. El estado del ecosistema después del primer mes es

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{T}\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.05 & 0.98 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 60 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.6 \\ 62.8 \\ 14.0 \\ 20.6 \end{pmatrix}$$

Los estados restantes se calcularon con ayuda de un sistema asistido por computadora y la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}_n$ donde $n = 1, 2, \ldots, 11$, y se proporcionan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

Mes	Pastos	Suelo	Materia orgánica inerte	Corrientes
0	20.00	60.00	15.00	20.00
1	17.60	62.80	14.00	20.60
2	15.59	65.22	12.96	21.23
3	13.90	67.29	11.93	21.88
4	12.49	69.03	10.93	22.55
5	11.31	70.46	9.99	23.24
6	10.32	71.61	9.13	23.95
7	9.48	72.52	8.33	24.66
8	8.79	73.21	7.61	25.39
9	8.20	73.71	6.97	26.12
10	7.71	74.04	6.40	26.86
11	7.29	74.22	5.89	27.60
12	6.94	74.28	5.44	28.34 ❑

EJERCICIOS 2.16

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

1. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimientos de la figura 2.20 para determinar la matriz de transferencia **T** apropiada y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

   b) Encuentre el estado del sistema después de un día y de dos días.

   c) De un momento a otro el sistema alcanzará el estado de equilibrio

   $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$. Calcule $\hat{\mathbf{X}}$. [*Sugerencia:* $x_1 + x_2 = 150$.]

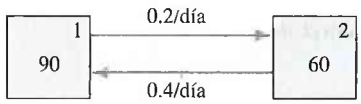


Figura 2.20 Compartimientos del problema 1

2. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimientos de la figura 2.21 para determinar la matriz de transferencia apropiada **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

   b) Calcule el estado del sistema después de un día y de dos días.

   c) Encuentre el estado de equilibrio $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$. [*Sugerencia:* ¿Cuál es el análogo de la sugerencia de la parte *c*) del problema 1?]

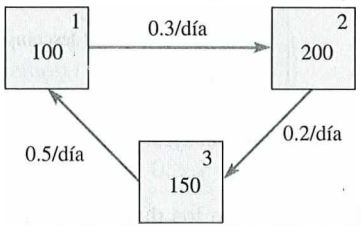


Figura 2.21 Compartimientos del problema 2

3. *a*) Utilice los datos del diagrama de compartimientos de la figura 2.22 para determinar la matriz de transferencia apropiada **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

   b) Calcule el estado del sistema después de un día y de dos días.

c) Encuentre el estado de equilibrio $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ que satisface $\mathbf{T}\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}$.

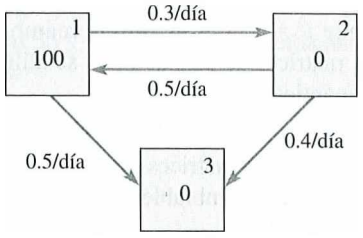


Figura 2.22 Compartimientos del problema 3

4. Un campo ha quedado totalmente destrozado por efecto del fuego. Comenzarán a crecer primero dos tipos de vegetación, pastos y pequeños arbustos; sin embargo, los arbustos pequeños pueden ocupar solamente cierta área si están precedidos por pastos. En la figura 2.23, el coeficiente de transferencia de 0.3 indica que, al final del verano, 30% de lo que antes era terreno desocupado en el campo será ocupado por pastos.

   a) Encuentre la matriz de transferencia **T**.

   b) Suponga que $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y que el área se mide en acres.

   Utilice la fórmula recursiva $\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{T}\mathbf{X}_n$, así como una calculadora o un sistema asistido por computadora para determinar el terreno que estará cubierto en cada uno de los siguientes seis años.

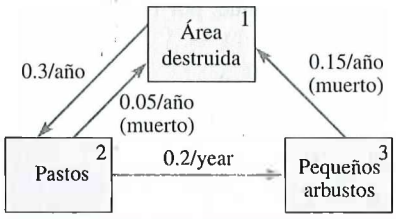


Figura 2.23 Compartimientos del problema 4

Problema de análisis

5. Caracterice el vector $\hat{\mathbf{X}}$ de la parte c) de los problemas 1 a 3 en términos de uno de los conceptos principales de la sección 2.8.

Tareas para el laboratorio de cómputo

6. Se utilizan radioisótopos (como el fósforo 32 y el carbono 14) para estudiar la transferencia de nutrientes en las cadenas alimenticias. La figura 2.24 es una representación compartimental de una cadena alimenticia marina simple. Cien unidades (de microcuries, por ejemplo) de rastreador se disuelven en agua de un acuario que contiene una especie de fitoplancton y otra de zooplancton.

   a) Encuentre la matriz de transferencia **T** y el estado inicial $\mathbf{X}_0$ del sistema.

   b) En lugar de la fórmula recursiva, utilice $\mathbf{X}_n = \mathbf{T}^n\mathbf{X}_0$, $n = 1, 2, \ldots, 12$, para predecir el estado del sistema en las 12 horas siguientes. Use un sistema asistido por computadora y el comando para calcular potencias de matrices (en *Mathematica* es el comando **MatrixPower[T, n]**) para encontrar $\mathbf{T}^2, \mathbf{T}^3, \ldots, \mathbf{T}^{12}$.

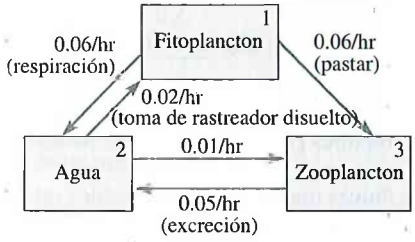


Figura 2.24 Cadena alimenticia marina del problema 6

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

Las respuestas para los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-7.

En los problemas 1 a 20, llene los espacios en blanco o responda verdadero o falso.

1. Una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{4\times 3}$ tal que $a_{ij} = i + j$ está dada por _____.

2. Si **A** es una matriz de 4×7 y **B** es de 7×3, entonces el tamaño de **AB** es _____.

3. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = (3 \quad 4)$, entonces **AB** = _____ y **BA** = _____.

4. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ = _____.

5. Si **A** y **B** son matrices no singulares de $n \times n$, entonces $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es necesariamente no singular. _____

6. Si **A** es una matriz no singular para la que **AB** = **AC**, entonces **B** = **C**. _____

7. Si **A** es una matriz de 3×3 tal que $|\mathbf{A}| = 5$, entonces $\det(\frac{1}{2}\mathbf{A})$ = _____ y $\det(-\mathbf{A}^T)$ = _____.

8. Si $\det \mathbf{A} = 6$ y $\det \mathbf{B} = 2$, entonces $\det \mathbf{AB}^{-1} =$ _____.

9. Si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ cuyos elementos correspondientes a la tercera columna son iguales, entonces $\det(\mathbf{A} - \mathbf{B}) =$ _____.

10. Suponga que **A** es una matriz de 3×3 tal que $\det \mathbf{A} = 2$. Si $\mathbf{B} = 10\mathbf{A}$ y $\mathbf{C} = -\mathbf{B}^{-1}$, entonces $\det \mathbf{C} =$ _____.

11. Sea **A** una matriz de $n \times n$. Los valores propios de **A** son las soluciones diferentes de cero de $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. _____

12. Un múltiplo escalar diferente de cero de un vector propio es también un vector propio correspondiente al mismo valor propio. _____

13. Un vector columna **K** de $n \times 1$ con todos sus elementos iguales a cero nunca es un vector propio de una matriz **A** de $n \times n$. _____

14. Sea **A** una matriz de $n \times n$ con elementos reales. Si λ es un valor propio complejo, entonces $\bar{\lambda}$ es también un valor propio de **A**. _____

15. Una matriz **A** de $n \times n$ siempre tiene n vectores propios lineales independientes.

16. La matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ está en forma escalonada reducida. _____

17. Si una matriz **A** de 3×3 es diagonalizable, entonces tiene tres vectores propios lineales independientes. _____

18. Las únicas matrices diagonalizables ortogonalmente son las matrices simétricas. _____

19. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal puesto que sus columnas son vectores ortogonales. _____

20. Los valores propios de una matriz simétrica con elementos reales son siempre números reales. _____

21. Una matriz **B** de $n \times n$ es simétrica si $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$, y una matriz **C** de $n \times n$ es oblicua-simétrica si $\mathbf{C}^T = -\mathbf{C}$. Observando la identidad $2\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T + \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$, demuestre que cualquier matriz **A** de $n \times n$ puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y una matriz oblicua-simétrica.

22. Demuestre que no existe una matriz de 2×2 con elementos reales tales que $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23. Se dice que una matriz **A** de $n \times n$ es **nilpotente** si, para un entero positivo n, $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$.
   a) Determine una matriz nilpotente de 2×2, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.
   b) Demuestre que una matriz nilpotente es necesariamente singular.

24. *a*) Se dice que dos matrices **A** y **B** de $n \times n$ son **antiintercambiables** si $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$. Demuestre que cada una de las **matrices de giro de Pauli**

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde $i^2 = -1$, son antiintercambiables entre sí. Las matrices de giro de Pauli se utilizan en mecánica cuántica.

   b) Se dice que la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ es la **intercambiadora** de las matrices **A** y **B** de $n \times n$. Encuentre las matrices intercambiables de σ_x y σ_y, σ_y y σ_z y σ_z y σ_x.

En los problemas 25 y 26, resuelva el sistema dado mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

25. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -9 \\ 27 \\ 9 \end{pmatrix}$

26. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 \qquad - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$

27. Sin expandir, demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 0.$

28. Demuestre que $\begin{vmatrix} y & x^2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ es la ecuación de una parábola que pasa por los tres puntos (1, 2), (2, 3) y (3, 5).

En los problemas 29 y 30, evalúe, por inspección, el determinante de la matriz dada.

29. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

En los problemas 31 y 32, sin resolverlos, defina si los sistemas homogéneos dados tienen solamente la solución trivial o si tienen un número infinito de soluciones.

31. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

En los problemas 33 y 34, realice el balanceo de la ecuación química dada.

33. $I_2 + HNO_3 \rightarrow HIO_3 + NO_2 + H_2O$

34. $Ca + H_3PO_4 \rightarrow Ca_3P_2O_8 + H_2$

En los problemas 35 y 36, resuelva el sistema dado mediante la regla de Cramer.

35. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

37. Utilice la regla de Cramer para despejar x y y en el sistema

$$X = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$

$$Y = -x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta$$

para x y y.

38. *a*) Establezca el sistema de ecuaciones para encontrar las corrientes que circulan en las ramas de la red que se muestra en la figura 2.25.

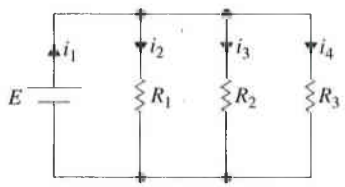


Figura 2.25 Red del problema 38

b) Use la regla de Cramer para demostrar que

$$i_1 = E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right).$$

39. Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 &= -3 \\ -2x_1 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

escribiéndolo como una ecuación matricial y calculando la inversa de la matriz de coeficientes.

40. Utilice la inversa de la matriz **A** para resolver el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y el vector **B** está dado por *a*) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y *b*) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En los problemas 41 a 46, determine los valores propios y los vectores propios correspondientes de la matriz dada.

41. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

47. Determine los valores de la primera columna de tal manera que la matriz resulte ortogonal:

$$\begin{pmatrix} \square & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \square & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \square & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

48. Considere la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Determine las matrices **P** y $\mathbf{P}^{-1}$ que diagonalicen ortogonalmente a la matriz **A**.

b) Determine la matriz diagonal **D** realizando la multiplicación $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

49. Identifique la sección cónica $x^2 + 3xy + y^2 = 1$.

50. Considere los datos de población siguientes:

Año	**1890**	**1900**	**1910**	**1920**	**1930**
Población (en millones)	63	76	92	106	123

La población real en 1940 era de 132 millones de personas. Compare dicha cantidad con la población pronosticada a partir de la línea de los mínimos cuadrados de los datos proporcionados.

En los problemas 51 y 52, utilice la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ para codificar el mensaje dado. Use la correspondencia de (1) de la sección 2.13.

51. SATELLITE LAUNCHED ON FRI

52. SEC AGNT ARRVS TUES AM

En los problemas 53 y 54, utilice la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ para determinar el mensaje dado. Use la correspondencia (1) de la sección 2.13.

53. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 15 & 14 & 0 & 20 \\ 35 & 10 & 27 & 53 & 1 & 54 \\ 5 & 15 & -3 & 48 & 2 & 39 \end{pmatrix}$

54. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 21 \\ 27 & 17 & 40 \\ 21 & 13 & -2 \end{pmatrix}$

55. Descifre los mensajes siguientes utilizando el código de verificación de paridad.

    a) (1 1 0 0 1 1)

    b) (0 1 1 0 1 1 1 0)

56. Descifre la palabra (1 0 0 1) utilizando el código de Hamming (7, 4).

Por Dayet

CAPÍTULO

3

Cálculo vectorial

Estructura del capítulo

3.1 Funciones vectoriales
3.2 Movimiento sobre una curva
3.3 Curvatura y componentes de la aceleración
3.4 Derivadas parciales
3.5 Derivada direccional
3.6 Planos tangentes y líneas normales
3.7 Divergencia y rotacional
3.8 Integrales de línea
3.9 Independencia de la trayectoria
3.10 Integrales dobles
3.11 Integrales dobles en coordenadas polares
3.12 Teorema de Green
3.13 Integrales de superficie
3.14 Teorema de Stokes
3.15 Integrales triples
3.16 Teorema de la divergencia
3.17 Cambio de variables en integrales múltiples
Ejercicios de repaso del capítulo 3

En el capítulo 1 se estudiaron las propiedades de los vectores en los espacios bidimensional y tridimensional. En este capítulo se combinan conceptos vectoriales con cálculo diferencial e integral.

3.1 Funciones vectoriales

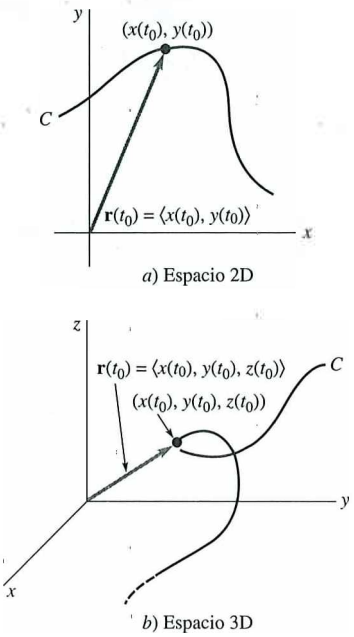


Figura 3.1 Curvas definidas mediante funciones vectoriales

Introducción Recuérdese que una **curva** C en el plano xy es simple y sencillamente un conjunto de pares ordenados (x, y). Se dice que C es una **curva paramétrica** si las coordenadas x y y de un punto de la curva se definen por medio de un par de funciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, continuas en el intervalo $a \leq t \leq b$. El concepto de curva paramétrica se extiende también al espacio 3D. Una **curva paramétrica en el espacio**, o **curva espacial**, es un conjunto de tripletas ordenadas (x, y, z), donde

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \tag{1}$$

son continuas en un intervalo $a \leq t \leq b$. En esta sección se combinan los conceptos de curvas paramétricas y vectores.

Funciones con valores vectoriales En ciencias e ingeniería a menudo es conveniente introducir un vector $\mathbf{r}$ cuyas componentes sean funciones de un parámetro t. Se dice que

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k},$$

son **funciones con valores vectoriales** o bien **funciones vectoriales**. Como se muestra en la figura 3.1, para un determinado valor paramétrico, digamos t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el vector de posición de un punto P sobre una curva C. En otras palabras, al variar el parámetro t, se puede imaginar la curva C como si se hubiera trazado con el movimiento de la punta de la flecha de $\mathbf{r}(t)$.

En la sección 1.5 se presenta un ejemplo de ecuaciones paramétricas, así como la función vectorial de una curva espacial, cuando se estudia la línea en el espacio tridimensional.

Ejemplo 1 Hélice circular

Grafique la curva trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = t$. Eliminando el parámetro t de las dos primeras ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\operatorname{sen} t)^2 = 2^2$$

se observa que un punto de la curva se halla sobre el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Tal como se ve en la figura 3.2 y en la tabla adjunta, al incrementarse el valor de t, la curva se enrolla de manera ascendente para formar una espiral o *hélice circular*.

t	x	y	z
0	2	0	0
$\pi/2$	0	2	$\pi/2$
π	-2	0	π
$3\pi/2$	0	-2	$3\pi/2$
2π	2	0	2π
$5\pi/2$	0	2	$5\pi/2$
3π	-2	0	3π
$7\pi/2$	0	-2	$7\pi/2$
4π	2	0	4π
$9\pi/2$	0	2	$9\pi/2$

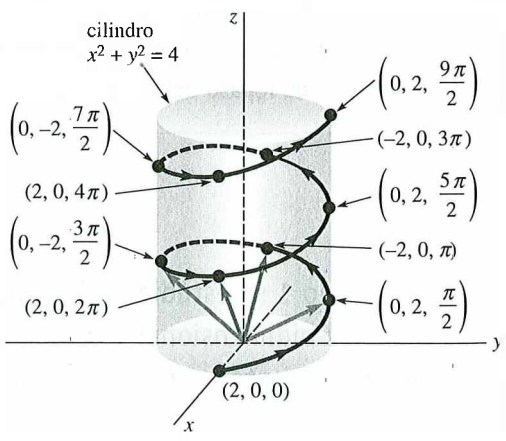


Figura 3.2 Hélice circular del ejemplo 1 ❑

La curva del ejemplo 1 es un caso especial de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0,$$

que describe a una *hélice elíptica*. Cuando $a = b$, la hélice es circular. La *inclinación* de una hélice se define como el número $2\pi c$. Los problemas 9 y 10 de los ejercicios 3.1 ilustran otros dos tipos de hélices.

Ejemplo 2 Círculo en un plano

Grafique la curva trazada mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de esta curva son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 3$. Al igual que en el ejemplo 1, se observa que cualquier punto de la curva debe hallarse también en el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que cualquier punto tiene como coordenada z el valor constante $z = 3$, resulta que la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza un círculo 3 unidades por encima del plano xy. Véase la figura 3.3. ❑

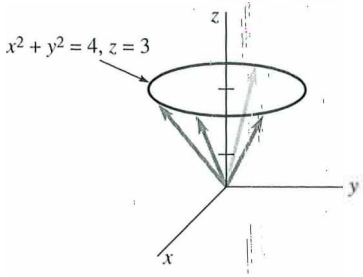


Figura 3.3 Curva del ejemplo 2

Ejemplo 3 Curva de intersección

Encuentre la función vectorial que describe a la curva C resultante de la intersección del plano $y = 2x$ con el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución En primer lugar, se parametriza la curva C de intersección haciendo $x = t$. Entonces se tiene que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. A partir de estas ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 2t$, $z = 9 - 5t^2$, se observa que $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}$ es una función vectorial que describe la traza en el plano $y = 2x$ del paraboloide. Véase la figura 3.4. ❑

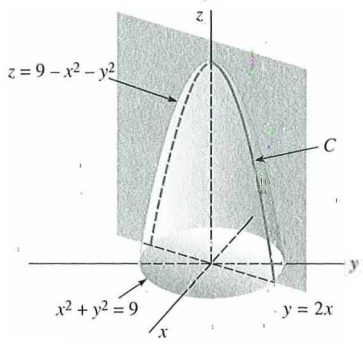


Figura 3.4 Curva del ejemplo 3

■ **Límites, continuidad y derivadas** El concepto fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones que la componen.

DEFINICIÓN 3.1 Límite de una función vectorial

Si existen los $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$, entonces

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t) \right\rangle.$$

Desde luego, la notación $t \to a$ de la definición 3.1 puede reemplazarse por $t \to a^+$, $t \to a^-$, $t \to \infty$ o $t \to -\infty$.

Como consecuencia inmediata de la definición 3.1, se obtiene el siguiente resultado.

TEOREMA 3.1 Propiedades de los límites

Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

i) $\lim_{t\to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, c es un escalar

ii) $\lim_{t\to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

iii) $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$

DEFINICIÓN 3.2 Continuidad

Se dice que una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en $t = a$ si

i) $\mathbf{r}(a)$ está definida, *ii)* existe $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ y *iii)* $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

En forma equivalente, $\mathbf{r}(t)$ es continua en $t = a$ si y sólo si las funciones f, g y h que la componen son continuas en dicho punto.

DEFINICIÓN 3.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)] \tag{2}$$

para todos los t en los que exista el límite.

La derivada de $\mathbf{r}$ también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra en forma práctica que la derivada de una función vectorial se obtiene derivando las funciones que la componen.

TEOREMA 3.2 Derivación de las componentes

Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, donde f, g y h son derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle.$$

Demostración De (2) se tiene

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\langle f(t + \Delta t), g(t + \Delta t), h(t + \Delta t) \rangle - \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\langle \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right\rangle.$$

Calculando el límite de cada componente se obtiene el resultado deseado. ❑

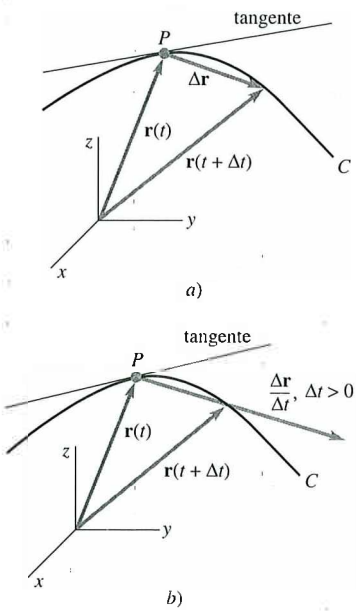


Figura 3.5 El vector $\mathbf{r}'(t)$ es tangente a la curva C en P

Curvas suaves Cuando las componentes de una función vectorial $\mathbf{r}$ tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para cualquier t en el intervalo abierto (a, b), entonces se dice que $\mathbf{r}$ es una **función suave**, y a la curva C trazada por $\mathbf{r}$ se le denomina **curva suave**.

Interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ no es $\mathbf{0}$ en el punto P, puede dibujarse entonces de manera *tangencial a la curva* en P. Como se observa en la figura 3.5, los vectores

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \text{y} \quad \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} [\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]$$

son paralelos. Si se considera que existe el $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \mathbf{r}/\Delta t$ parece razonable concluir que cuando $\Delta t \to 0$, $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ son cercanos y, por ende, la posición límite del vector $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ es la línea tangente en P. Desde luego, la línea tangente en P se *define* como la línea que pasa por P y es paralela a $\mathbf{r}'(t)$.

Ejemplo 4 Vectores tangentes

Grafique la curva C trazada por un punto P cuya posición viene dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j}$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$. Grafique también $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución Eliminando el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$ y $y = \operatorname{sen} t$, donde $0 \leq t \leq 2\pi$, se encuentra que C es la parábola $x = 1 - 2y^2$, donde $-1 \leq x \leq 1$. De $\mathbf{r}'(t) = -2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ se encuentra que

$$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

Estos vectores se dibujan en la figura 3.6, tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente. ❑

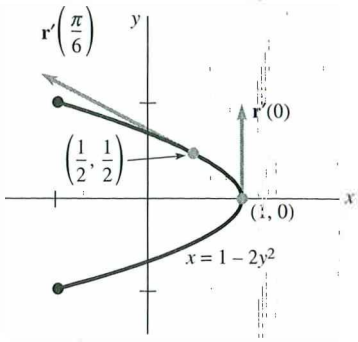


Figura 3.6 Vectores tangentes del ejemplo 4

Ejemplo 5 Línea tangente

Encuentre ecuaciones paramétricas de la línea tangente en $t = 3$ a la gráfica de la curva C, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$.

Solución La función vectorial que proporciona la posición de un punto P de la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\,\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\,\mathbf{k} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} - 7\,\mathbf{k},$$

que es tangente a C en el punto cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} - 21\,\mathbf{k},$$

esto es, $P(9, 6, -21)$. Utilizando las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, se observa que las ecuaciones paramétricas de la línea tangente son $x = 9 + 6t$, $y = 6 + 5t$, $z = -21 - 7t$. ❑

Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también derivando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, se tiene

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\,\mathbf{i} + g''(t)\,\mathbf{j} + h''(t)\,\mathbf{k}.$$

Ejemplo 6 Derivada de una función de vectorial

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\,\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}. \quad ❑$$

TEOREMA 3.3 Regla de la cadena

Si $\mathbf{r}$ es una función vectorial derivable y $s = u(t)$ es una función escalar derivable, entonces la derivada de $\mathbf{r}(s)$ respecto a t es

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{r}'(s)u'(t).$$

Ejemplo 7 Regla de la cadena

Si $\mathbf{r}(s) = \cos 2s\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 2s\,\mathbf{j} + e^{-3s}\mathbf{k}$, donde $s = t^4$, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [-2 \operatorname{sen} 2s\,\mathbf{i} + 2\cos 2s\,\mathbf{j} - 3e^{-3s}\mathbf{k}]4t^3$$

$$= -8t^3 \operatorname{sen}(2t^4)\,\mathbf{i} + 8t^3 \cos(2t^4)\,\mathbf{j} - 12t^3 e^{-3t^4}\mathbf{k}. \quad ❑$$

Se dejan como ejercicio los detalles de la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 3.4 Reglas de derivación

Sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ funciones vectoriales derivables y $u(t)$ una función escalar derivable.

i) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

ii) $\dfrac{d}{dt}[u(t)\mathbf{r}_1(t)] = u(t)\mathbf{r}_1'(t) + u'(t)\mathbf{r}_1(t)$

iii) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$

iv) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t).$

¡Precaución!

Puesto que el producto cruz de dos vectores no es conmutativo, se debe cumplir estrictamente el orden con que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aparecen en el inciso *iv)* del teorema 3.4.

■ **Integrales de funciones vectoriales** Si f, g y h son integrables, entonces las integrales indefinida y definida de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ se puntualizan, respectivamente, por medio de

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int_a^b f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otra función vectorial $\mathbf{R} + \mathbf{c}$ tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

Ejemplo 8 Integral de una función vectorial

Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\,\mathbf{k}$

entonces
$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left[\int 6t^2\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k}$$

$$= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\,\mathbf{j} + [2\,\text{sen}\,4t + c_3]\,\mathbf{k}$$

$$= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,4t\,\mathbf{k} + \mathbf{c},$$

donde $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. ❑

■ **Longitud de una curva espacial** Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$ es una función suave, entonces se puede demostrar que la **longitud** de la curva suave trazada por $\mathbf{r}$ está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt. \tag{3}$$

■ **Longitud de arco como parámetro** Una curva en el plano o en el espacio se parametriza en términos de la longitud de arco s.

Ejemplo 9 Revisión del ejemplo 1

Considérese la hélice del ejemplo 1. Como $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5}$, a partir de (3) se tiene que la longitud de la curva desde $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}t,$$

donde u se utiliza como una variable temporal para la integración. Empleando $t = s/\sqrt{5}$, se obtiene una ecuación vectorial de la hélice, que es función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,\frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\,\mathbf{k}. \tag{4}$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$f(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad g(s) = 2\,\text{sen}\,\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad h(s) = \frac{s}{\sqrt{5}}. \qquad \square$$

La derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ respecto al parámetro t es un vector tangente a la curva trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si dicha curva se parametriza en términos de la longitud de arco s, entonces $\mathbf{r}'(s)$ *es un vector tangente unitario*. Para ver esto, considere una curva descrita por $\mathbf{r}(s)$, donde s es la longitud de arco. Con base en (3), la longitud de la curva desde $\mathbf{r}(0)$ hasta $\mathbf{r}(s)$ es $s = \int_0^s \|\mathbf{r}'(u)\|\,du$. La derivada de esta última ecuación respecto a s lleva a $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

EJERCICIOS 3.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-8.

En los problemas del 1 al 10, grafique la curva trazada por la función vectorial proporcionada.

1. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 4\cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k};\ t \geq 0$
2. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \text{sen}\,t\,\mathbf{k};\ t \geq 0$
3. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k};\ t \geq 0$
4. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$
5. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}\rangle$
6. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + 3\,\text{senh}\,t\,\mathbf{j}$
7. $\mathbf{r}(t) = \langle\sqrt{2}\,\text{sen}\,t, \sqrt{2}\,\text{sen}\,t, 2\cos t\rangle;\ 0 \leq t \leq \pi/2$
8. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + e^t\,\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\,\text{sen}\,t, t^2\rangle$

En los problemas del 11 al 14, encuentre la función vectorial que describe a la curva C resultante de la intersección entre las superficies proporcionadas. Bosqueje la curva C. Utilice el parámetro indicado.

11. $z = x^2 + y^2,\ y = x;\ x = t$
12. $x^2 + y^2 - z^2 = 1,\ y = 2x;\ x = t$
13. $x^2 + y^2 = 9,\ z = 9 - x^2;\ x = 3\cos t$
14. $z = x^2 + y^2,\ z = 1;\ x = \text{sen}\,t$
15. Puesto que $\mathbf{r}(t) = \dfrac{\text{sen}\,2t}{t}\,\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\,\mathbf{k}$, encuentre $\lim_{t\to 0^+}\mathbf{r}(t)$.
16. Puesto que $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, encuentre:
    a) $\lim_{t\to a}[-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
    b) $\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

En los problemas del 17 al 20, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial proporcionada.

17. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \mathbf{j},\ t > 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \text{sen}\,t, t + \cos t\rangle$
19. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
20. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1}t\,\mathbf{k}$

En los problemas del 21 al 24, grafique la curva C descrita por $\mathbf{r}$ y dibuje $\mathbf{r}'$ en el valor indicado de t.

21. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 6\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j};\ t = \pi/6$
22. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j};\ t = -1$
23. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \dfrac{4}{1+t^2}\,\mathbf{k};\ t = 1$
24. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k};\ t = \pi/4$

En los problemas 25 y 26, encuentre ecuaciones paramétricas de la línea tangente a la curva proporcionada en el valor indicado de t.

25. $x = t,\ y = \frac{1}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3;\ t = 2$
26. $x = t^3 - t,\ y = \dfrac{6t}{t+1},\ z = (2t+1)^2;\ t = 1$

En los problemas del 27 al 32, encuentre la derivada indicada. Considere que todas las funciones vectoriales son derivables.

27. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)]$
28. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(t\mathbf{r}(t))]$
29. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\cdot(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))]$
30. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times(\mathbf{r}_2(t)\times\mathbf{r}_3(t))]$
31. $\dfrac{d}{dt}\left[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2\left(\dfrac{1}{t}\right)\right]$
32. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas del 33 al 36, calcule la integral proporcionada.

33. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(t\,\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$
34. $\displaystyle\int_0^4(\sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} - \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k})\,dt$
35. $\displaystyle\int(te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$

36. $\int \frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los problemas del 37 al 40, halle una función vectorial $\mathbf{r}$ que satisfaga las condiciones indicadas.

37. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}'(t) = t \operatorname{sen} t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{i}$

39. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{j}$, $\mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas del 41 al 44, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial proporcionada sobre el intervalo indicado.

41. $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$; $0 \le t \le 2\pi$

42. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t \operatorname{sen} t\mathbf{k}$; $0 \le t \le \pi$

43. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos 2t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$; $0 \le t \le 3\pi$

44. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$; $0 \le t \le 1$

45. Exprese la ecuación vectorial de un círculo $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j}$ en función de la longitud de arco s. Verifíquese que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

46. Si $\mathbf{r}(s)$ es la función vectorial dada en (4), verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

47. Suponiendo que $\mathbf{r}$ es una función vectorial derivable en la que $\|\mathbf{r}(t)\| = c$ para cualquier t, demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para cualquier t.

48. En el problema 47, describa geométricamente el tipo de curva C para el que $\|\mathbf{r}(t)\| = c$.

Problemas misceláneos

49. Demuestre el teorema 3.4*ii*).

50. Demuestre el teorema 3.4*iii*).

51. Demuestre el teorema 3.4*iv*).

52. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{v}\cdot\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$.

3.2 Movimiento sobre una curva

Introducción En la sección anterior se explicó que tanto la primera como la segunda derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ se obtienen derivando sus funciones componentes f, g y h. En esta sección, se da una interpretación física de los vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$.

Velocidad y aceleración Supóngase que un cuerpo o una partícula se mueven a lo largo de una curva C de forma que su posición en el tiempo t está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$. Si sus funciones componentes f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar $\|\mathbf{v}(t)\|$ es la **rapidez** de la partícula. Como

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \left\|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

la rapidez se relaciona con la longitud de arco s *por medio de* $s'(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$. En otras palabras, la longitud de arco viene dada por $s = \int_{t_0}^{t}\|\mathbf{v}(t)\|\,dt$. También se deduce, a partir de las argumentaciones de la sección 3.1, que si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula en C en el tiempo t_1, entonces se puede dibujar $\mathbf{v}(t_1)$ *tangente a* C *en* P. Observaciones similares son válidas para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

Ejemplo 1 Vectores de velocidad y aceleración

La posición de una partícula en movimiento viene dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}$. Grafique la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ y dibuje los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Como $x = t^2$ y $y = t$, la trayectoria de la partícula se encuentra por encima de la parábola $x = y^2$. Para $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula se encuentra en el punto $P(4, 2, 5)$. Entonces,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{i}$$

de forma que $\mathbf{v}(2) = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}(2) = 2\,\mathbf{i}$. Estos vectores se muestran en la figura 3.7. ❑

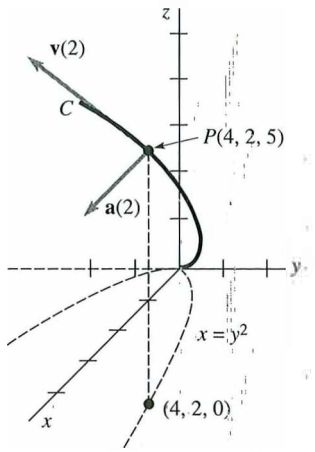


Figura 3.7 Vectores de velocidad y de aceleración del ejemplo 1

Si una partícula se mueve con rapidez constante c, entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad $\mathbf{v}$. Para ilustrar esto, nótese que $\|\mathbf{v}\|^2 = c^2$ o también $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2$. Derivando ambos lados respecto a t se obtiene, con la ayuda del teorema 3.4*iii*):

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Así, $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = 0$ o también $\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$ para cualquier t.

Ejemplo 2 Vectores de velocidad y aceleración

Supóngase que la función vectorial del ejemplo 2 de la sección 3.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique el vector de velocidad y el de aceleración en $t = \pi/4$.

Solución Recuerde que $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula se encuentra en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. Entonces,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

Puesto que la rapidez es $\|\mathbf{v}(t)\| = 2$ para cualquier instante t, se concluye a partir de la argumentación previa a este ejemplo que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique esto último.) Como muestra la figura 3.8, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\,\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\,\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\,\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se dibujan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular y $\mathbf{a}(\pi/4)$ se dirige hacia el centro del círculo a lo largo de un radio. ❑

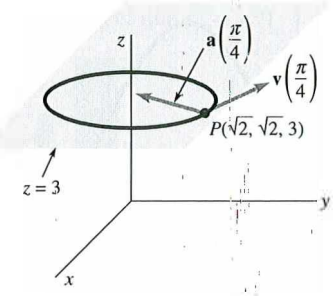


Figura 3.8 Vectores de velocidad y de aceleración del ejemplo 2

■ **Aceleración centrípeta** Para un movimiento circular en el plano, descrito por $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\,\mathbf{i} + r_0\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$, donde r_0 y ω son constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Se dice entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Véase la figura 3.9. Se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$ cuando $v = \|\mathbf{v}(t)\|$ y $a = \|\mathbf{a}(t)\|$.

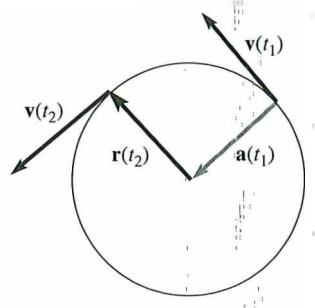


Figura 3.9 Movimiento circular

■ **Movimiento curvilíneo sobre un plano** Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales se relacionan con el movimiento curvilíneo sobre un plano. Por ejemplo, el movimiento planetario y el de los proyectiles se verifica sobre un plano.

El análisis del movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance* inicia con la aceleración gravitacional escrita en forma vectorial: $\mathbf{a}(t) = -g\,\mathbf{j}$.

---

*El proyectil se dispara o se arroja sin tener impulso propio. Cuando se analizan movimientos balísticos de *largo alcance*, debe considerarse la curvatura de la Tierra.

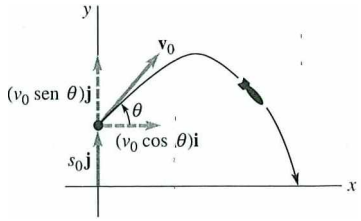
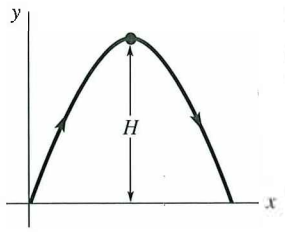
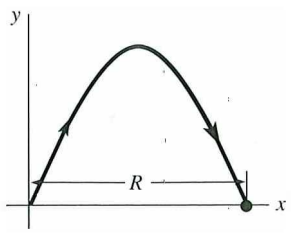


Figura 3.10 Trayectoria de un proyectil



a) **Altura máxima *H*:**
Encuentre t_1 para el cual $y'(t_1) = 0$;
$H = y_{\text{máx}} = y(t_1)$



b) **Alcance *R*:**
Encuentre $t_1 > 0$ para el cual $y(t_1) = 0$;
$R = x_{\text{máx}} = x(t_1)$

Figura 3.11 Altura máxima y alcance de un proyectil

Si se lanza un proyectil como se muestra en la figura 3.10, con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\theta\,\mathbf{i} + v_0 \text{ sen } \theta\mathbf{j}$ desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int (-g\,\mathbf{j})\,dt = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{c}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos\theta)\,\mathbf{i} + (-gt + v_0 \text{ sen } \theta)\,\mathbf{j}.$$

Integrando de nuevo y utilizando $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\theta)t\,\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \text{ sen } \theta)t + s_0\right]\mathbf{j}.$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas que definen la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t, \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \text{ sen } \theta)t + s_0. \tag{1}$$

Desde luego, es interesante encontrar la altura máxima H y el alcance R del proyectil. Como se muestra en la figura 3.11, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y de $x(t)$, respectivamente.

Ejemplo 3 Trayectoria de una granada

Desde el nivel del terreno, se dispara una granada con una rapidez inicial de 768 pies/s y un ángulo de elevación de 30°. Encuentre: *a*) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la granada, *b*) la altitud máxima conseguida, *c*) el alcance de la granada y *d*) la rapidez en el impacto.

Solución

a) Inicialmente, se tiene que $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y que

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30°)\,\mathbf{i} + (768 \text{ sen } 30°)\,\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 384\,\mathbf{j}. \tag{2}$$

Integrando $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizando (2) se tiene

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\,\mathbf{i} + (-32t + 384)\,\mathbf{j}. \tag{3}$$

Integrando de nuevo se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\,\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\,\mathbf{j}.$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la granada son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \qquad y(t) = -16t^2 + 384t. \tag{4}$$

b) De (4) se observa que $dy/dt = 0$ cuando $-32t + 384 = 0$; esto es, $t = 12$. Así, la altura máxima H alcanzada por la granada es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ ft}.$$

c) De (4) se observa que $y(t) = 0$ cuando $-16t(t - 24) = 0$; esto es, $t = 0$ o $t = 24$. El alcance R es entonces

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ ft}.$$

d) De (3) se obtiene la rapidez con que se impacta la granada:

$$\|\mathbf{v}(24)\| = \sqrt{(-384)^2 + (384\sqrt{3})^2} = 768 \text{ ft/s}. \qquad \square$$

Comentarios

Se ha visto que la razón con la que cambia la longitud del arco ds/dt es la misma que la rapidez $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Sin embargo, como se observará en la siguiente sección, esto *no* implica que la *aceleración escalar* d^2s/dt^2 sea igual que $\|\mathbf{a}(t)\| = \|\mathbf{r}''(t)\|$. Véase el problema 20 de los ejercicios 3.2.

EJERCICIOS 3.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas del 1 al 8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración para el instante de tiempo indicado. Encuentre la rapidez para dicho instante

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j}$; $t = 1$
2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}$; $t = 1$
3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\,\mathbf{j}$; $t = 0$
4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$; $t = \pi/3$
5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t-1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = 2$
6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t = 2$
7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$; $t = 1$
8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = 1$
9. Suponiendo que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, ¿en qué puntos la partícula toca al plano xy? ¿Cuál es su aceleración y su velocidad en dichos puntos?
10. Suponiendo que una partícula se mueve en el espacio de forma que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para cualquier instante t, describa su trayectoria.
11. Una granada se dispara desde el nivel del terreno con una rapidez inicial de 480 pies/s y un ángulo de elevación de 30°. Encuentre:
    a) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas que definen la trayectoria de la granada,
    b) la altitud máxima conseguida,
    c) el alcance de la granada y
    d) la rapidez en el impacto.
12. Resuelva de nuevo el problema 11 si la granada se dispara con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación, pero desde una loma de 1 600 pies de altura.
13. Un automóvil usado se empuja con una rapidez de 4 pies/s por un acantilado de 81 pies de altura y cae al mar. Encuentre la rapidez con la que el coche golpea el agua.
14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del terreno con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los posibles ángulos de elevación que permiten un alcance de 490 m.
15. Un jugador de futbol americano lanza una "bomba" de 100 yardas con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto en que se suelta?
16. Un jugador lanza un balón con un ángulo de 60° con respecto a la horizontal y después con un ángulo de 30° con respecto a la horizontal; ambos lanzamientos tienen la misma rapidez inicial. Demuestre que el alcance del balón es el mismo en los dos casos. Generalice este resultado para cualquier ángulo $0 < \theta < \pi/2$ con el que se suelte.
17. Al mismo tiempo que el proyectil de un cañón se dispara hacia un objetivo, éste se deja caer desde el estado de reposo. Demuestre que el proyectil atinará al objetivo a la mitad de su caída. Véase la figura 3.12. [*Sugerencia:* Considere que el origen se encuentra en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y del objetivo, respectivamente, ¿existe un instante para el que $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

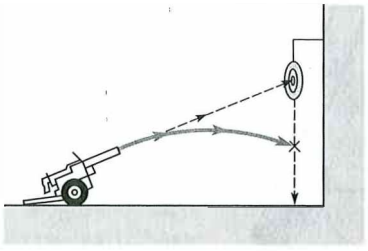


Figura 3.12 Cañón del problema 17

18. En las maniobras de campo del ejército, los paquetes de abastecimiento y el equipo resistente se dejan caer simplemente desde aviones que vuelan horizontalmente con una rapidez y una altitud bajas. Un avión de abastecimiento vuela horizontalmente a una altura de 1 024 pies sobre un objetivo que tiene velocidad constante de 180 mph. Utilice (1) para determinar la distancia horizontal que un paquete de abastecimiento viaja en relación con el punto desde el cual fue soltado. ¿A qué ángulo α respecto a la horizontal debería soltarse el paquete de abastecimiento, de forma que alcance el objetivo indicado en la figura 3.13?

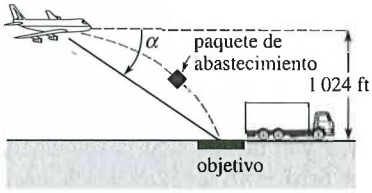


Figura 3.13 Avión de abastecimiento del problema 18

19. Supóngase que $\mathbf{r}(t) = r_0\cos\omega t\,\mathbf{i} + r_0\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se mueve en un círculo de radio r_0 sobre el plano xy. Si $\|\mathbf{v}(t)\| = v$, demuestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = \|\mathbf{a}(t)\| = v^2/r_0$.
20. El movimiento de una partícula en el espacio se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = b\cos t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $\|\mathbf{v}(t)\|$.

b) Calcule $s = \int_0^t \|\mathbf{v}(t)\|\, dt$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso *a*).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq \|\mathbf{a}(t)\|$.

21. El **peso efectivo** w_e de una masa m en el ecuador terrestre se define como $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 19. Determine el peso efectivo de una persona de 192 libras si el radio de la Tierra es de 4 000 millas, $g = 32$ pies/s^2 y $v = 1\,530$ pies/s.

22. Considérese a una ciclista que se desplaza por una pista circular plana de radio r_0. Si m es la masa combinada de la ciclista y la bicicleta, llene los espacios en blanco de la figura 3.14. [*Sugerencia:* Utilice el problema 19 y fuerza = masa × aceleración; suponga que las direcciones son hacia arriba y hacia la izquierda.] El vector **U** resultante indica la dirección en que la ciclista debe inclinarse para evitar la caída. Encuentre el ángulo ϕ de la vertical con el que la ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

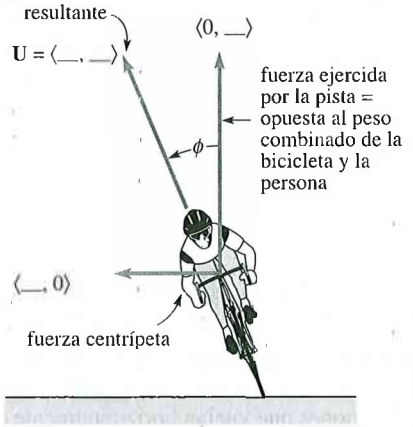


Figura 3.14 Ciclista del problema 22

23. Utilice los resultados obtenidos en (1) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

24. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial v_0 desde el nivel del terreno, con un ángulo de elevación θ. Utilice (1) para demostrar que la altura máxima y el alcance del proyectil son, respectivamente,

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}.$$

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio del **campo de velocidad** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, donde las componentes v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z+1)\mathbf{k}$, encuentre $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia:* Utilice separación de variables.]

26. Supóngase que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley de Newton del movimiento se escribe vectorialmente como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina **momento lineal**. El momento angular de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\mathbf{r}$ es su vector de posición. Si el torque de la partícula respecto al origen es $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que τ es la rapidez con la que cambia el momento angular.

27. Supóngase que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ que el Sol, de masa M, ejerce sobre un planeta de masa m es igual a

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}.$$

$\mathbf{F}$ es una **fuerza central**, o sea, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición $\mathbf{r}$ del planeta. Aquí, k es la constante gravitacional, $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, y el signo menos indica que $\mathbf{F}$ es una fuerza de atracción, es decir, una fuerza dirigida hacia el Sol. Véase la figura 3.15.

a) Utilice el problema 26 para demostrar que el torque que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es $\mathbf{0}$.

b) Explique por qué el momento angular $\mathbf{L}$ de un planeta es constante.

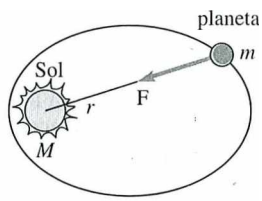


Figura 3.15 Fuerza $\mathbf{F}$ del problema 27

28. *(Este problema podría representar un reto.)* En este problema el estudiante debe utilizar las propiedades de las secciones 1.4 y 3.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**: la órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco. Se supone que el Sol tiene una masa M y se localiza en el origen, $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve por la atracción gravitacional del Sol, y $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

a) Utilice el problema 27 y la segunda ley de Newton del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -kM\frac{\mathbf{u}}{r^2}.$$

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

d) Del inciso *c*) se deduce que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.

e) Demuestre que $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y, en consecuencia, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

f) Utilice los incisos *a*), *e*) y *d*) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

g) Integrando el resultado del inciso *f*) respecto a *t*, se obtiene $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde $\mathbf{d}$ es otro vector constante. Efectúe el producto punto en ambos lados de esta última expresión por el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 1.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM)\cos\theta},$$

donde $c = \|\mathbf{c}\|$, $d = \|\mathbf{d}\|$ y θ es el ángulo entre $\mathbf{d}$ y $\mathbf{r}$.

h) Explique por qué el resultado del inciso *g*) demuestra la primera ley de Kepler.

i) En el perihelio* los vectores $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares entre sí y tienen magnitudes r_0 y v_0, respectivamente. Utilice esta información y los incisos *d*) y *g*) para demostrar que $c = r_0 v_0$ y que $d = r_0 v_0^2 - kM$.

*Éste es el punto de la órbita donde el cuerpo se encuentra más cercano al Sol.

3.3 Curvatura y componentes de la aceleración

Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional generada por la traza de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$. En esta sección se considera con mayor detalle el vector de aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ introducido en la sección anterior. Pero antes de hacer esto, es preciso revisar una cantidad escalar denominada la **curvatura** de una curva.

Una definición Se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva C y, en consecuencia,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \tag{1}$$

es un vector **unitario tangente**. Pero, recordando la parte final de la sección 3.1, si C se parametriza con la longitud de arco s, entonces $d\mathbf{r}/ds$ también proporciona un vector unitario tangente a la curva. La cantidad $\|\mathbf{r}'(t)\|$ de (1) se relaciona con la longitud de arco s por medio de $ds/dt = \|\mathbf{r}'(t)\|$. Como la curva C es suave, se sabe de la página 162 que $ds/dt > 0$. Así, por la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y así} \quad \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \mathbf{T}. \tag{2}$$

Ahora supóngase que C tiene la forma mostrada en la figura 3.16. Al incrementarse s, $\mathbf{T}$ se mueve a lo largo de C, cambiando de dirección pero no de magnitud (es siempre de magnitud unitaria). A lo largo del tramo de la curva comprendido entre P_1 y P_2, el vector $\mathbf{T}$ varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3, donde C se dobla más notoriamente, el cambio en la dirección de la tangente $\mathbf{T}$ es más pronunciado. Se utiliza la *razón* con la cual el vector unitario $\mathbf{T}$ cambia su dirección respecto a la longitud del arco como un indicador de la curvatura de una curva suave C.

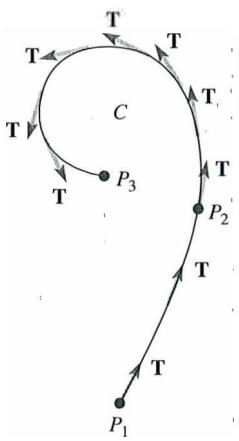


Figura 3.16 Vectores unitarios tangentes

DEFINICIÓN 3.4 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C. Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector unitario tangente, entonces la **curvatura** de C en un punto es

$$\kappa = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|. \tag{3}$$

El símbolo κ de (3) es la letra griega *kappa*. Puesto que las curvas no se parametrizan generalmente por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t. Utilizando de nuevo la regla de la cadena, se escribe

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura viene dada por

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{4}$$

Ejemplo 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a.

Solución Un círculo puede describirse por medio de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j}$. Entonces, de $\mathbf{r}'(t) = -a\operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j}$ y de $\|\mathbf{r}'(t)\| = a$, se tiene

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = -\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}.$$

Entonces, de (4) la curvatura es

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}}{a} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$ ❑

El resultado de (5) muestra que la curvatura en un punto de un círculo es el recíproco del radio del círculo, e indica un hecho que está de acuerdo con nuestra intuición: un círculo con radio pequeño se curva más que otro con un radio grande. Véase la figura 3.17.

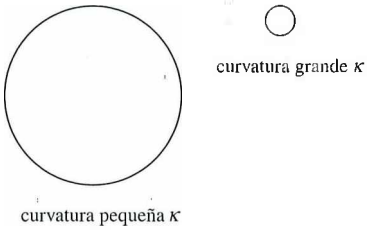


Figura 3.17 Curvatura de un círculo

■ **Componentes tangencial y normal de la aceleración** Supóngase que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o en el tridimensional a lo largo de una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces, la velocidad de la partícula en C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, mientras que su rapidez es $ds/dt = v = \|\mathbf{v}(t)\|$. Así, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}$. Derivando esta última expresión respecto a t se obtiene la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Además se deduce que, al aplicar el teorema 3.4*iii*), la derivada de $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ conduce a que $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por lo tanto, en un punto P de C los vectores $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $\|d\mathbf{T}/dt\| \neq 0$, el vector

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{\|d\mathbf{T}/dt\|} \tag{7}$$

es un vector unitario normal en P a la curva C con la dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ también se denomina vector **normal principal**. Pero como la curvatura es $\kappa = \|d\mathbf{T}/dt\|/v$, se deduce de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$. Así, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{8}$$

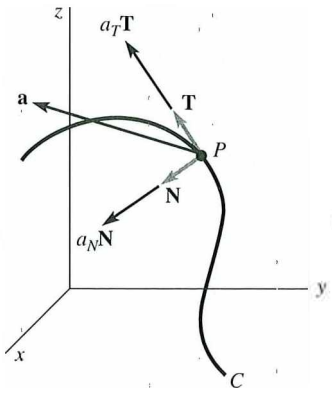


Figura 3.18 Componentes de la aceleración

Al reescribir (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T}, \tag{9}$$

se observa que el vector de aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Véase la figura 3.18. Las funciones escalares $a_T = dv/dt$ y $a_N = \kappa v^2$ se denominan **componente tangencial** y **componente normal de la aceleración**, respectivamente. Nótese que la componente tangencial de la aceleración es resultado de un cambio en la *magnitud* de la velocidad $\mathbf{v}$, mientras que la componente normal de la aceleración es consecuencia de un cambio en la *dirección* de $\mathbf{v}$.

■ **Vector binormal** Un tercer vector unitario definido por medio de

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$$

se denomina vector **binormal**. Los tres vectores unitarios $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman un conjunto de vectores ortogonales entre sí que siguen la regla de la mano derecha, y se denominan

el **triedro del movimiento**. El plano de **T** y **N** se denomina **plano osculador**;* el plano de **N** y **B**, **plano normal**; y el plano de **T** y **B**, **plano rectificador**. Véase la figura 3.19.

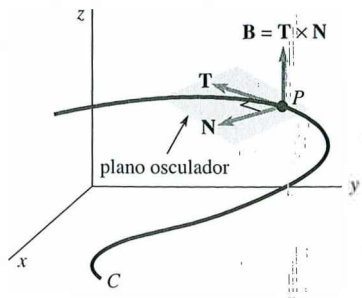


Figura 3.19 Plano osculador

Ejemplo 2 Vectores tangente, normal y binormal

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores **T**, **N** y **B** y la curvatura.

Solución Como $\mathbf{r}'(t) = -2\operatorname{sen} t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, entonces $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{13}$ y, por tanto, de (1) se ve que un vector unitario tangente es

$$\mathbf{T} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

A continuación, se tiene

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Así pues, (3) proporciona la normal principal

$$\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}.$$

Ahora, el vector binormal es

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\operatorname{sen} t\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Finalmente, mediante $\|d\mathbf{T}/dt\| = 2/\sqrt{13}$ y $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{13}$, se obtiene a partir de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$ ❑

El hecho de que la curvatura del ejemplo 2 sea constante no es sorprendente, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

■ **Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura** Realizando el producto punto o el producto cruz, el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con (9), es posible obtener fórmulas explícitas para las componentes tangencial y normal de la aceleración y para la curvatura que involucren a **r**, **r**′ y **r**″. Obsérvese que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = a_N\underbrace{(v\mathbf{T} \cdot \mathbf{N})}_{0} + a_T\underbrace{(v\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})}_{1} = a_T v$$

conduce a la componente tangencial de la aceleración

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{10}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = a_N\underbrace{(v\mathbf{T} \times \mathbf{N})}_{\mathbf{B}} + a_T\underbrace{(v\mathbf{T} \times \mathbf{T})}_{\mathbf{0}} = a_N v\mathbf{B}.$$

*Literalmente, esto significa el plano del "beso".

Como $\|\mathbf{B}\| = 1$, la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}. \tag{11}$$

Despejando de (11) la curvatura se tiene

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}. \tag{12}$$

Ejemplo 3 Curvatura de una curva 3D

Se dice que la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una "curva 3D". Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t. Encuentre también la curvatura.

Solución $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$.
Como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = t + 2t^3$ y $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$, se tiene de (10) que

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Ahora,
$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Entonces, (11) lleva a

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}} = \sqrt{\frac{t^4 + 4t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1}}.$$

De (12) se infiere que la curvatura de la curva 3D viene dada por

$$\kappa = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

❑

■ **Radio de curvatura** El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P de una curva C es el radio de un círculo que en ese punto se "ajusta" a la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina el **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene en P la misma línea tangente que la curva C, y su centro se halla del lado cóncavo de C. Por ejemplo, como se muestra en la figura 3.20, un automóvil que se mueva sobre una pista curva puede, en cualquier instante, representarse como si se moviera sobre un círculo de radio ρ. Por lo tanto, la componente normal de su aceleración $a_N = \kappa v^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Así, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, se determina la rapidez v con la que el automóvil puede recorrer una curva con peralte sin deslizarse. (Ésta es la idea esencial del problema 22 de los ejercicios 3.2.)

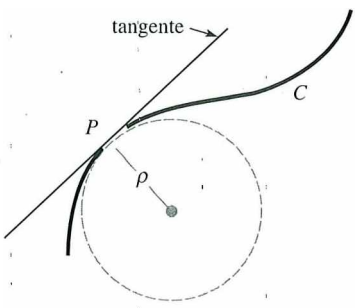


Figura 3.20 Radio de curvatura

Comentarios

Reescribiendo (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T},$$

se observa que la denominada aceleración escalar d^2s/dt^2, referida en la última observación, es la componente tangencial de la aceleración a_T

EJERCICIOS 3.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-22.

En los problemas 1 y 2, encuentre el vector unitario tangente para la función de posición proporcionada.

1. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};\ t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Utilice el procedimiento señalado en el ejemplo 2 para encontrar **T**, **N**, **B** y κ asociados al movimiento sobre una hélice circular genérica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$.
4. Utilice el procedimiento señalado en el ejemplo 2 para demostrar, en la curva 3D del ejemplo 3, que en el instante $t = 1$:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}),\quad \mathbf{N} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}),\quad \kappa = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los problemas 5 y 6, encuentre en el punto correspondiente al valor indicado de t una ecuación del plano osculador para la curva espacial proporcionada.

5. La hélice circular del ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. La curva 3D del ejemplo 3; $t = 1$

En los problemas del 7 al 16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1}t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$
15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$
17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$, donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
18. *a*) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

    b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.
19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [*Sugerencia:* Utilice (2) de la sección 1.5.]
20. Encuentre la curvatura en $t = \pi$ para el cicloide descrito por

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\ a > 0$$

21. Sea C una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segunda derivada. Demuestre que la curvatura en un punto viene dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2)^{3/2}}$$

22. Demuestre que si $y = F(x)$, la fórmula para κ del problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en qué punto la curva es "más afilada".

23. $y = x^2$; $(0, 0)$, $(1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$
25. Comente cómo es la curvatura cerca de un punto de inflexión de $y = F(x)$.
26. Demuestre que $\|\mathbf{a}(t)\|^2 = a_N^2 + a_t^2$.

3.4 Derivadas parciales

Introducción En esta sección se consideran funciones de dos o más variables y se plantea cómo encontrar la rapidez instantánea con la que cambian tales funciones, esto es, la derivada, respecto a cada variable.

Funciones de dos variables Como vio en sus cursos de cálculo, una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un subconjunto del plano xy un único número z del conjunto R de números reales. Dicho conjunto de pares ordenados (x, y) se denomina **dominio** de la función y al conjunto de valores correspondientes de z se le llama **rango**. Una función de dos variables se escribe usualmente como $z = f(x, y)$. Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función, y a z se le llama **variable dependiente**. La **gráfica** de una función $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio tridimensional; véase la figura 3.21.

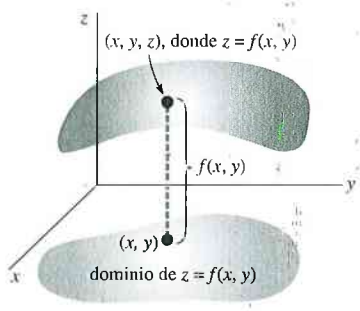
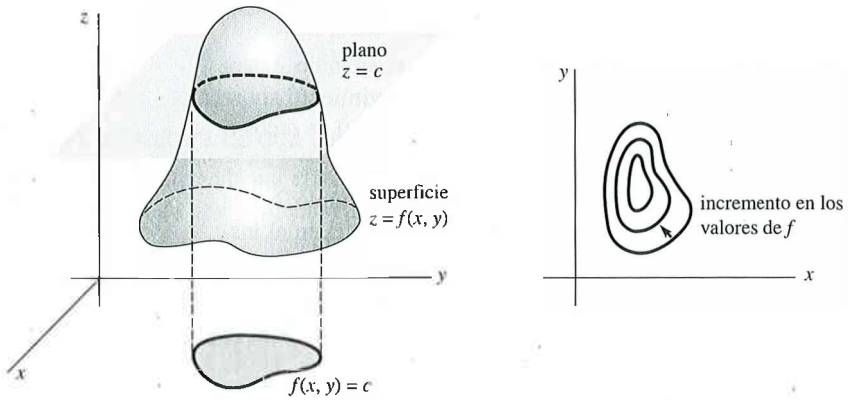


Figura 3.21 Función de dos variables

■ **Curvas de nivel** Para una función $z = f(x, y)$, las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para un c adecuado, se denominan **curvas de nivel** de f. Se utiliza la palabra *nivel* debido a que se puede interpretar la ecuación $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección, o traza, de $z = f(x, y)$ y el plano (horizontal o nivel) $z = c$; véase la figura 3.22.

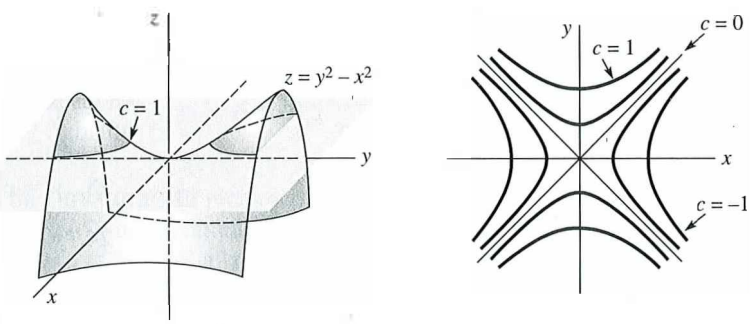


a) Superficie *b*) Curvas de nivel

Figura 3.22 Superficie y curvas de nivel

Ejemplo 1 Curvas de nivel

Las curvas de nivel de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$ se definen por $y^2 - x^2 = c$. Como se muestra en la figura 3.23, para $c > 0$ o $c < 0$, los miembros de esta familia de curvas son hipérbolas. Para $c = 0$, se obtienen las líneas $y = x$ y $y = -x$.



a) Superficie *b*) Curvas de nivel

Figura 3.23 Superficie y curvas de nivel en el ejemplo 1 ❑

■ **Funciones de tres o más variables** Las funciones de tres o más variables se definen de forma análoga a las funciones de dos variables. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada tripleta ordenada de números reales (x, y, z) de un subconjunto del espacio tridimensional un único número w del conjunto R de números reales. Se escribe $w = F(x, y, z)$.

■ **Superficies de nivel** Aunque no se puede dibujar una gráfica de una función de tres variables $w = F(x, y, z)$, sí es posible dibujar las superficies definidas por $F(x, y, z) = c$ para valores adecuados de c. Estas superficies se denominan **superficies de nivel**. Dicha expresión es un tanto desafortunada, ya que las superficies de *nivel* no están usualmente niveladas.

Ejemplo 2 Superficies de nivel

Describa las superficies de nivel para la función $F(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$.

Solución Para $c \neq 0$ las superficies de nivel vienen dadas por

$$\frac{x^2 + y^2}{z} = c \quad \text{o} \quad x^2 + y^2 = cz.$$

Algunos miembros de esta familia de paraboloides se muestran en la figura 3.24. ❑

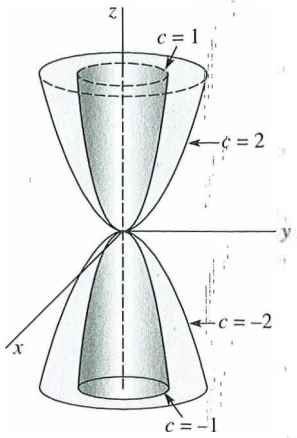


Figura 3.24 Superficies de nivel del ejemplo 2

■ **Derivadas parciales** La derivada de una función de una variable $y = f(x)$ está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Exactamente de la misma forma, se puede definir la derivada de una función de dos variables respecto a *cada* variable. Si $z = f(x, y)$, entonces la **derivada parcial respecto a x** es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{1}$$

y la **derivada parcial respecto a y** es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}, \tag{2}$$

siempre y cuando existan cada uno de los límites.

En (1), la variable y no cambia durante el proceso de obtención del límite; esto es, y se mantiene constante. En forma similar, en (2) la variable x se mantiene constante. Las dos derivadas parciales (1) y (2) representan entonces la *rapidez con la que cambia* f respecto a x y y, respectivamente. En forma práctica:

> *Para calcular $\partial z/\partial x$, se utilizan las leyes de la derivación ordinaria considerando a y constante.*
>
> *Para calcular $\partial z/\partial y$, se utilizan las leyes de la derivación ordinaria considerando a x constante.*

Ejemplo 3 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Se mantiene fija y y se manipulan las constantes en forma acostumbrada. Así,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2y^2 - 8x.$$

Considerando x constante, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y + 6y^5.$$ ❑

■ **Símbolos alternativos** Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ se representan comúnmente por medio de símbolos alternativos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

■ **Derivadas de orden superior y mixtas** Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son a su vez funciones de x y y. En consecuencia,

se pueden calcular **segundas derivadas** y **derivadas parciales** de orden superior. De hecho, es posible encontrar la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ respecto a y, y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ respecto a x. Estos últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, para $z = f(x, y)$:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Derivadas parciales mixtas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

■ **Símbolos alternativos** Las derivadas parciales de segundo y tercer orden se denotan por f_{xx}, f_{yy}, f_{xxx}, etc. La notación tipo subíndice para segundas derivadas parciales mixtas es f_{xy} o f_{yx}. Obsérvese que

$$f_{xy} = (f_x)y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad \text{y} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Aunque no se demuestra aquí, si una función f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces el orden en que éstas se realicen es irrelevante; esto es,

$$f_{xy} = f_{yx}. \tag{3}$$

■ **Funciones de tres o más variables** Las tasas con la que cambia una función de tres variables $w = F(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z son $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. Para calcular, digamos, $\partial w/\partial x$, se deriva respecto a x en forma acostumbrada manteniendo *tanto* y como z constantes. De esta manera se extiende el proceso de derivación parcial a funciones de cualquier número de variables.

Ejemplo 4 Derivadas parciales

Si $F(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y$, entonces las derivadas parciales respecto a x, y y t son, respectivamente,

$$\begin{aligned} F_x(x, y, t) &= -4e^{-3\pi t} \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6y \\ F_y(x, y, t) &= 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y \\ F_t(x, y, t) &= -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \operatorname{sen} 6y. \end{aligned}$$

❑

■ **Regla de la cadena** La regla de la cadena para funciones de una variable establece que si $y = f(u)$ es una función de u derivable, y $u = g(x)$ es una función de x derivable, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{4}$$

Para una función compuesta de dos variables $z = f(u, v)$, donde $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$, se esperaría naturalmente tener *dos* fórmulas análogas a (4), puesto que se pueden calcular tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$. La **regla de la cadena** para funciones de dos variables se sintetiza como sigue:

TEOREMA 3.5 Regla de la cadena

Si $z = f(u, v)$ es derivable y $u = g(x, y)$ y $v = h(x, y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Ejemplo 5 Regla de la cadena

Si $z = u^2 - v^3$ donde $u = e^{2x-3y}$, $v = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$, encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Como $\partial z/\partial u = 2u$ y $\partial z/\partial v = -3v^2$, se deduce a partir de (5) que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2u(2e^{2x-3y}) - 3v^2[2x\cos(x^2 - y^2)] = 4ue^{2x-3y} - 6xv^2\cos(x^2 - y^2) \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2u(-3e^{2x-3y}) - 3v^2[(-2y)\cos(x^2 - y^2)] = -6ue^{2x-3y} + 6yv^2\cos(x^2 - y^2). \tag{7}$$ ❑

Desde luego, en el ejemplo 5 se podrían haber sustituido las expresiones para u y v en la función original y entonces encontrar las derivadas parciales directamente. De la misma forma, las respuestas (6) y (7) se expresan en términos de x y y.

■ **Caso especial** Si $z = f(u, v)$ es derivable y $u = g(t)$ y $v = h(t)$ son funciones de una única variable t y derivables, entonces el teorema 3.5 implica que la derivada ordinaria dz/dt es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}. \tag{8}$$

■ **Generalizaciones** Los resultados proporcionados en (4) y (8) se generalizan inmediatamente a cualquier número de variables. Si $z = f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y cada una de las variables $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces, bajo las mismas consideraciones que las del teorema 3.5, se tiene

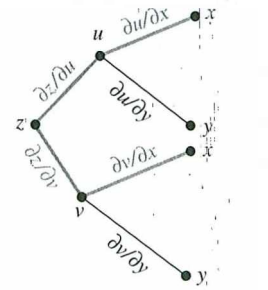
$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \tag{9}$$

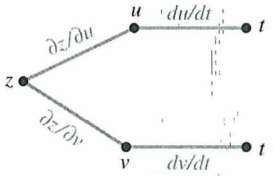
donde $i = 1, 2, \ldots, k$. En forma semejante, si las u_i, $i = 1, \ldots, n$, son funciones derivables de una única variable t, entonces

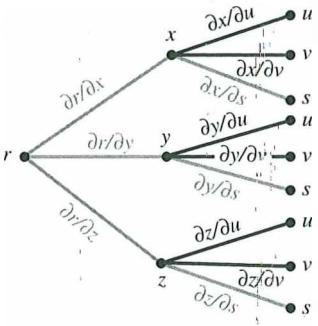
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{du_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt}. \tag{10}$$

■ **Diagramas de árbol** Los resultados de (4) pueden memorizarse con ayuda de un **diagrama de árbol**. Los puntos del primer diagrama que se muestra al margen indican el hecho de que z depende de u y v; u y v dependen, a su vez, de x y y. Para calcular $\partial z/\partial x$, por ejemplo, se lee de izquierda a derecha y se siguen las *dos* trayectorias poligonales en gris que llevan desde z hasta x, se multiplican las derivadas parciales de cada trayectoria, y entonces se suman los productos. El resultado dado en (8) viene representado por medio del segundo diagrama de árbol.

Se utilizarán diagramas de árbol en los próximos dos ejemplos para ilustrar los casos especiales de (9) y (10).





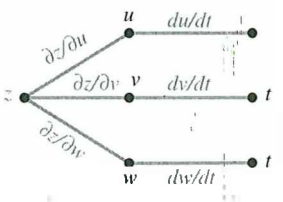


Ejemplo 6 Utilización de diagramas de árbol

Si $r = x^2 + y^5z^3$ y $x = uve^{2s}$, $y = u^2 - v^2s$, $z = \operatorname{sen}(uvs^2)$, encuentre $\partial r/\partial s$.

Solución A partir de las trayectorias en gris del diagrama de árbol adjunto, se obtiene

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= 2x(2uve^{2s}) + 5y^4z^3(-v^2) + 3y^5z^2(2uvs\cos(uvs^2)).$$ ❑



Ejemplo 7 Utilización de diagramas de árbol

Si $z = u^2v^3w^4$ donde $u = t^2$, $v = 5t - 8$ y $w = t^3 + t$, encuentre dz/dt.

Solución En este caso el diagrama de árbol indica que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$
$$= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).$$

Solución alternativa Derive $z = t^4(5t - 8)^3(t^3 + t)^4$ por medio de la regla del producto. ❑

Comentarios

Si $w = F(x, y, z)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, entonces, en forma análoga a (3), las derivadas parciales mixtas son iguales a:

$$F_{xyz} = F_{yzx} = F_{zyx}, \qquad F_{xxy} = F_{yxx} = F_{xyx}$$

y así sucesivamente.

EJERCICIOS 3.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-9.

En los problemas del 1 a 6, bosqueje algunas de las curvas de nivel asociadas con la función proporcionada.

1. $f(x, y) = x + 2y$
2. $f(x, y) = y^2 - x$
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$
4. $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$
5. $f(x, y) = e^{y-x^2}$
6. $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los problemas del 7 a 10, describa, sin graficar, las superficies de nivel.

7. $F(x, y, z) = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}$
8. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
9. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$
10. $F(x, y, z) = 4y - 2z + 1$
11. Grafique algunas de las superficies de nivel asociadas con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.
12. Puesto que

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intersecciones x, y y z de la superficie de nivel que pasa por $(-4, 2, -3)$.

En los problemas del 13 a 32, encuentre las derivadas parciales de primer orden de la función proporcionada.

13. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$
14. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$
15. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$
16. $z = \tan(x^3y^2)$
17. $z = \frac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$
18. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$
19. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$
20. $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$
21. $z = \cos^2 5x + \operatorname{sen}^2 5y$
22. $z = e^{x^2\tan^{-1}y^2}$
23. $f(x, y) = xe^{x^3y}$
24. $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen}\frac{\theta}{\phi}$
25. $f(x, y) = \frac{3x - y}{x + 2y}$
26. $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$
27. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$
28. $h(r, s) = \frac{\sqrt{r}}{s} - \frac{\sqrt{s}}{r}$
29. $w = 2\sqrt{xy} - ye^{y/z}$
30. $w = xy \ln xz$
31. $F(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw\cos(ut^2) + (2x^2t)^4$
32. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)^{r^4s^5}$

En los problemas 33 y 34, verifique que la función proporcionada satisface la **ecuación de Laplace**:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

33. $z = \ln(x^2 + y^2)$
34. $z = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$

En los problemas 35 y 36, verifique que la función proporcionada satisface la **ecuación de onda**:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

35. $u = \cos at \operatorname{sen} x$

36. $u = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

37. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2} e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la **ecuación de difusión**:

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}$$

38. La presión P generada por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, donde k es una constante, T es la temperatura y V es el volumen. Encuentre:

   a) la rapidez con la que cambia P respecto a V,

   b) la rapidez con la que cambia V respecto a T y

   c) la rapidez con la que cambia T respecto a P.

En los problemas del 39 al 48, utilice la regla de la cadena para encontrar las derivadas parciales indicadas.

39. $z = e^{uv^2}$; $u = x^3$, $v = x - y^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

40. $z = u^2 \cos 4v$; $u = x^2y^3$, $v = x^3 + y^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$

41. $z = 4x - 5y^2$; $x = u^4 - 8v^3$, $y = (2u - v)^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

42. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$; $x = \dfrac{u}{v}$, $y = \dfrac{v^2}{u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

43. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}$; $u = e^{-t} \operatorname{sen} \theta$, $v = e^{-t} \cos \theta$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

44. $w = \tan^{-1}\sqrt{uv}$; $u = r^2 - s^2$, $v = r^2s^2$; $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$

45. $R = rs^2t^4$; $r = ue^{v^2}$, $s = ve^{-u^2}$, $t = e^{u^2v^2}$; $\dfrac{\partial R}{\partial u}, \dfrac{\partial R}{\partial v}$

46. $Q = \ln(pqr)$; $p = t^2 \operatorname{sen}^{-1} x$, $q = \dfrac{x}{t^2}$, $r = \tan^{-1}\dfrac{x}{t}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial t}$

47. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \ln(rs + tu)$, $y = \dfrac{t}{u}\cosh rs$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial u}$

48. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t$; $p = \phi e^{3\theta}$, $q = \cos(\phi + \theta)$, $r = \phi\theta^2$, $t = 2\phi + 8\theta$; $\dfrac{\partial s}{\partial \phi}, \dfrac{\partial s}{\partial \theta}$

En los problemas del 49 al 52, utilice (8) para encontrar la derivada indicada.

49. $z = \ln(u^2 + v^2)$; $u = t^2$, $v = t^{22}$; $\dfrac{dz}{dt}$

50. $z = u^3v - uv^4$; $u = e^{-5t}$, $v = \sec 5t$; $\dfrac{dz}{dt}$

51. $w = \cos(3u + 4v)$; $u = 2t + \dfrac{\pi}{2}$, $v = -t - \dfrac{\pi}{4}$; $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=\pi}$

52. $w = e^{xy}$; $x = \dfrac{4}{2t + 1}$, $y = 3t + 5$; $\left.\dfrac{dw}{dt}\right|_{t=0}$

53. Si $u = f(x, y)$ donde $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$, demuestre que la **ecuación de Laplace** $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ conduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

54. La ecuación de estado de Van der Waals para el gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}$$

Si dT/dt y dV/dt representan la rapidez con la que cambian la temperatura y el volumen, respectivamente, utilice la regla de la cadena para encontrar dP/dt.

55. La ecuación de estado para un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, donde P, V y T son presión, volumen y temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como una función de P y T, y también define a T como una función de V y P, demuestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial T}}{\dfrac{\partial F}{\partial V}} = \frac{1}{\dfrac{\partial T}{\partial V}}.$$

56. El voltaje en un conductor se incrementa con una rapidez de 2 volts/min y la resistencia decrece a razón de un ohm/min. Utilice $I = E/R$ y la regla de la cadena para encontrar la rapidez con la cual la corriente que pasa por el conductor está cambiando cuando $R = 50$ ohms y $E = 60$ volts.

57. La longitud del lado x del triángulo de la figura 3.25 se incrementa a razón de 0.3 cm/s; el lado y se incrementa a razón de 0.5 cm/s, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.1 rad/s. Utilice la regla de la cadena para encontrar la rapidez con la que el área del triángulo está cambiando en el instante $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

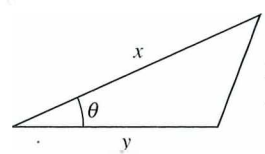


Figura 3.25 Triángulo del problema 57

58. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional, de forma que sus coordenadas en cualquier instante son $x = 4\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$ y $z = 5t$, donde $t \geq 0$. Utilice la regla de la cadena para encontrar la rapidez con que cambia en el instante $t = 5\pi/2$ segundos; su distancia al origen está dada por

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

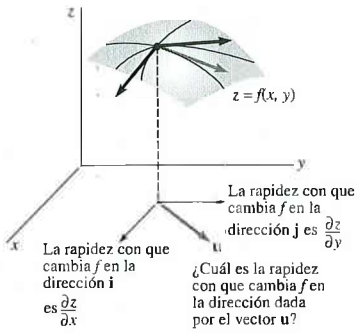


Figura 3.26 Una dirección arbitraria se denota por medio del vector **u**

3.5 Derivada direccional

Introducción En la sección anterior se planteó que para una función f de dos variables x y y, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ proporcionan la pendiente de la tangente a la traza, o curva de intersección entre la superficie definida por $z = f(x, y)$ y los planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes coordenados x y y. En forma equivalente, la derivada parcial $\partial z/\partial x$ se interpreta como la rapidez con que cambia la función f en la dirección dada por el vector $\mathbf{i}$, y $\partial z/\partial y$ como la rapidez con que cambia la función f en la dirección $\mathbf{j}$. No existe razón para centrar la atención únicamente en dos direcciones. En esta sección se plantea cómo encontrar la rapidez con la que cambia una función derivable en *cualquier* dirección; véase la figura 3.26.

El gradiente de una función En esta sección y la siguiente, resulta conveniente introducir un nuevo vector basado en la derivación parcial. Cuando se aplica el **operador diferencial vectorial**

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{o} \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

a una función derivable $z = f(x, y)$ o $w = F(x, y, z)$, se dice que los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \tag{1}$$

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k} \tag{2}$$

son los **gradientes** de las funciones respectivas. El símbolo ∇, una delta mayúscula griega invertida, se denomina "del" o "nabla". Al vector ∇f se le lee usualmente "gradiente de f".

Ejemplo 1 Gradiente

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución De (1), $\nabla f(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j}$, por lo que

$$\nabla f(x, y) = -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}.$$ ❑

Ejemplo 2 Gradiente en un punto

Si $F(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, encuentre $\nabla F(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución De (2), $\nabla F(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$ y por lo tanto

$$\nabla F(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$ ❑

Generalización de la derivación parcial Supóngase que $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector unitario en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje x en su lado positivo y es paralelo al vector $\mathbf{v}$ desde $(x, y, 0)$ hasta $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Además, supóngase que el plano perpendicular al plano xy que contiene dichos puntos corta a la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. La pregunta es: ¿cuál es la pendiente de la línea tangente a C en un punto P de coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por $\mathbf{v}$?; véase la figura 3.27.

De la figura se puede ver que $\Delta x = h \cos\theta$ y $\Delta y = h \operatorname{sen}\theta$, de forma que la pendiente de la línea secante indicada es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{3}$$

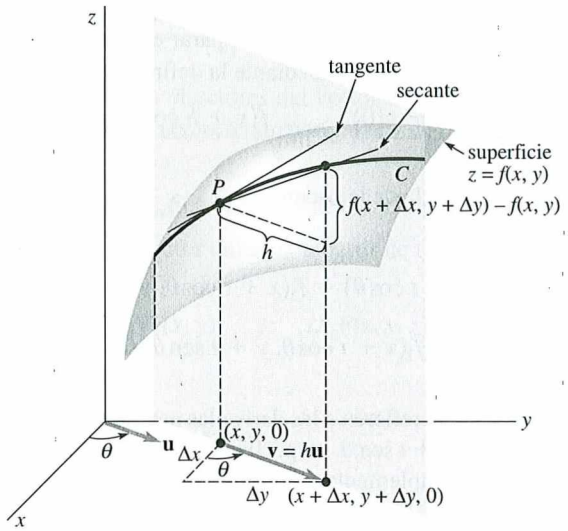


Figura 3.27 C es la curva de intersección entre la superficie y el plano determinado por el vector $\mathbf{v}$

Se espera que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (3) conforme $h \to 0$. Esta pendiente es la rapidez con la que cambia f en el punto P, en la dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}$. Esto conduce a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.5 Derivada direccional

La **derivada direccional** de $z = f(x, y)$ en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h} \tag{4}$$

siempre y cuando exista dicho límite.

Obsérvese que (4) es en realidad una generalización de la derivación parcial, ya que

$$\theta = 0 \quad \text{implica que} \quad D_{\mathbf{i}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

y

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{implica que} \quad D_{\mathbf{j}} f(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

■ **Método para el cálculo de la derivada direccional** Si bien (4) podría utilizarse para hallar $D_{\mathbf{u}} f(x, y)$ para una función determinada, como de costumbre se busca un procedimiento más eficiente. El siguiente teorema muestra de qué manera el concepto de gradiente de una función desempeña un papel fundamental en el cálculo de una derivada direccional.

TEOREMA 3.6 Cálculo de una derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función de x y y derivable, y $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$, entonces

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \tag{5}$$

Demostración Considérense x, y y θ fijos, de forma que $g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ sea una función de una variable. Se desea comparar el valor de $g'(0)$ calculado por dos métodos diferentes. En primer lugar, mediante la definición de derivada,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{6}$$

En segundo lugar, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\cos\theta) + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\operatorname{sen}\theta) \\ &= f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{7}$$

Aquí, los subíndices 1 y 2 se refieren a las derivadas parciales de $f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ respecto a $x + t\cos\theta$ y a $y + t\operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Cuando $t = 0$, se observa que $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$ son simplemente x y y, por lo que (7) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta. \tag{8}$$

Comparando (4), (6) y (8) se obtiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot (\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

❑

Ejemplo 3 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en el punto $(1, 1)$ y en la dirección de un vector unitario cuyo ángulo con el eje x en su lado positivo es $\pi/6$.

Solución Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4xy^3 + 6y$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y^2 + 6x$, se tiene que

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Ahora, para $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ se convierte en $\mathbf{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}$. Por lo tanto,

$$D_{\mathbf{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6. \qquad ❑$$

Ejemplo 4 Derivada direccional

Considérese el plano perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la línea tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en el punto $(2, 1, 17)$ y con dirección hacia Q?

Solución Se quiere obtener $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Pero como $\overrightarrow{PQ}$ no es un vector unitario, se propone $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j}$. Ahora,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por lo tanto, la pendiente requerida es

$$D_{\mathbf{u}} f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}. \qquad \square$$

■ **Funciones de tres variables** Para una función $w = f(x, y, z)$ la derivada direccional se define como

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - F(x, y, z)}{h},$$

donde α, β y γ son los ángulos directores del vector $\mathbf{u}$ medidos en relación con los ejes x, y y z en sus lados positivos, respectivamente.* Pero de la misma forma que antes, se puede demostrar que

$$D_{\mathbf{u}} F(x, y, z) = \nabla F(x, y, z) \cdot \mathbf{u}. \tag{9}$$

Obsérvese que como $\mathbf{u}$ es un vector unitario, a partir de (10) de la sección 1.3 se deduce que

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla f(x, y) \quad \text{y} \quad D_{\mathbf{u}} F(x, y, z) = \text{comp}_{\mathbf{u}} \nabla F(x, y, z).$$

Por otra parte, (9) revela que

$$D_{\mathbf{k}} F(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ejemplo 5 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en el punto $(1, -1, 2)$ en la dirección de $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Se tiene que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 8xy$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2xy - 4x^2$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z$ de forma que

$$\nabla F(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Como $\|6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\| = 7$, entonces $\mathbf{u} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$ es un vector unitario en la dirección indicada. De (9) se deduce que

$$D_{\mathbf{u}} F(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}. \qquad \square$$

■ **Valor máximo de la derivada direccional** Sea f una función de dos o de tres variables. Puesto que (5) y (9) expresan a la derivada direccional como un producto punto, se observa de la definición 1.3 que

$$D_{\mathbf{u}} f = \|\nabla f\| \, \|\mathbf{u}\| \cos\phi = \|\nabla f\| \cos\phi, \quad (\|\mathbf{u}\| = 1),$$

donde ϕ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$. Como $0 \le \phi \le \pi$, se tiene que $-1 \le \cos\phi \le 1$ y, en consecuencia, $-\|\nabla f\| \le D_{\mathbf{u}} f \le \|\nabla f\|$. En otras palabras:

El valor máximo de una derivada direccional es $\|\nabla f\|$ *y ocurre cuando* $\mathbf{u}$ *tiene la misma dirección que* ∇f *(cuando* $\cos\phi = 1$*),* (10)

y:

El valor mínimo de una derivada direccional es $-\|\nabla f\|$ *y ocurre cuando* $\mathbf{u}$ *y* ∇f *tienen direcciones opuestas (cuando* $\cos\phi = -1$*).* (11)

---

*Obsérvese que el numerador de (4) puede escribirse como

$$f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta) - f(x, y),$$

donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

Ejemplo 6 Máximo/mínimo de la derivada direccional

En el ejemplo 5, el valor máximo de la derivada direccional de F en el punto $(1, -1, 2)$ es $\|\nabla F(1, -1, 2)\| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}F(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$. ❑

■ **Puntos gradientes en la dirección del incremento más rápido de f** Expresados de otra forma, (10) y (11) exponen que:

El vector gradiente ∇f apunta en la dirección en la cual f se incrementa de forma más rápida, mientras que $-\nabla f$ apunta en la dirección del decremento más rápido de f.

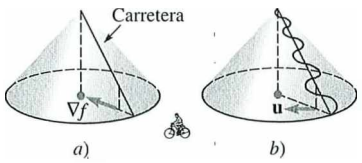


Figura 3.28 Modelo de una colina en el ejemplo 7

Ejemplo 7 Dirección de la subida más empinada

Todos los años se organiza una carrera ciclista en Los Ángeles hacia la cima de una colina, utilizando una carretera famosa por ser la más empinada de la ciudad. Para entender por qué un ciclista con un mínimo de sentido común zigzagueará en su camino ascendente, supóngase que la gráfica de $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $0 \le z \le 4$, mostrada en la figura 3.28*a*) es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{2/3}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

Así, el ascenso más empinado por la colina es una carretera recta cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Como $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$, un ciclista zigzagueará o buscará una dirección $\mathbf{u}$ diferente de ∇f, con el objetivo de reducir esta componente. ❑

Ejemplo 8 Dirección de enfriamiento más rápido

La temperatura en una caja rectangular se puede aproximar por

$$T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le z \le 3.$$

Si un mosquito se localiza en $(\frac{1}{2}, 1, 1)$, ¿en qué dirección debería volar para enfriarse lo más rápido posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto, $\nabla T(\frac{1}{2}, 1, 1) = \frac{1}{4}\mathbf{k}$. Para enfriarse más rápidamente, el mosquito debería volar en la dirección de $-\frac{1}{4}\mathbf{k}$; esto es, debería volar hacia la base de la caja, donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$. ❑

EJERCICIOS 3.5

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas del 1 al 4, calcule el gradiente para la función proporcionada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$
2. $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$
3. $F(x, y, z) = \dfrac{xy^2}{z^3}$
4. $F(x, y, z) = xy \cos yz$

En los problemas del 5 al 8, encuentre el gradiente de la función proporcionada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; $(2, 4)$
6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; $(3, 2)$
7. $F(x, y, z) = x^2z^2 \operatorname{sen} 4y$; $(-2, \pi/3, 1)$
8. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $(-4, 3, 5)$

En los problemas 9 y 10, utilice la definición 3.5 para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ si $\mathbf{u}$ forma el ángulo indicado con el eje x en su lado positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30°$
10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45°$

En los problemas del 11 al 20, encuentre la derivada direccional de la función proporcionada en el punto dado y en la dirección indicada.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; $(-1, 1)$, $\theta = \pi/6$
12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; $(3, -1)$, $\theta = \pi/4$

13. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(2, -2)$, $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$; $(2, -1)$, $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; en el punto $(3, 2)$, en la dirección de $(5, 3)$

16. $f(x, y) = x^2 \tan y$; en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, en la dirección del eje x en su lado negativo.

17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; $(1, -1, 1)$, $\langle 0, 3, 3\rangle$

18. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}$; $(2, 4, -1)$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; en el punto $(-2, 2, 1)$, en la dirección del eje z negativo.

20. $F(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; en el punto $(4, -4, 2)$, en dirección hacia el origen.

En los problemas 21 y 22, considérese el plano que pasa por los puntos P y Q, perpendicular al plano xy. Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado respecto a la curva de intersección de este plano; grafique además la función dada en la dirección de Q.

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2)$, $Q(0, 1)$; $(4, 2, 4)$

22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1)$, $Q(-1, 6)$; $(1, 1, -3)$

En los problemas del 23 al 26, encuentre un vector que proporcione la dirección en la que la función dada se incrementa más rápidamente en el punto indicado. Encuentre, también, la rapidez máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$; $(0, \pi/4)$

24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; $(5, 5)$

25. $F(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; $(1, 2, -1)$

26. $F(x, y, z) = xyz$; $(3, 1, -5)$

En los problemas del 27 al 30, encuentre un vector que proporcione la dirección en la que la función dada decrece más rápidamente en el punto indicado. Encuentre, también, la rapidez mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6})$

28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $(2, -2)$

29. $F(x, y, z) = \sqrt{xze^y}$; $(16, 0, 9)$

30. $F(x, y, z) = \ln\dfrac{xy}{z}$; $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}\right)$

31. Encuentre la derivada o las derivadas direccionales de $f(x, y) = x + y^2$ en el punto $(3, 4)$ en la dirección de un vector que sea tangente en $(2, 1)$ a la gráfica $2x^2 + y^2 = 9$.

32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es cero en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

33. Supóngase que $\nabla f(a, b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ de forma que:

   a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$,

   b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un máximo y

   c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un mínimo.

34. Supóngase que $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?

35. *a*) Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) y en la dirección de $\mathbf{u} = (1/\sqrt{10})(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

   b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ del inciso *a*), encuentre $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.

36. Considérese el potencial gravitacional

$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde G y m son constantes. Demuestre que U se incrementa o decrece de forma más rápida a lo largo de una línea que pasa por el origen.

37. Si $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y$, encuentre todos los puntos para los cuales $\|\nabla f\| = 0$.

38. Supóngase que

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7, \quad D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3$$
$$\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}.$$

Encuentre $\nabla f(a, b)$.

39. Considérese la placa rectangular mostrada en la figura 3.29. La temperatura en un punto (x, y) de la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que debería tomar un insecto, que comienza su recorrido en el punto $(4, 2)$, para enfriarse lo más rápido posible.

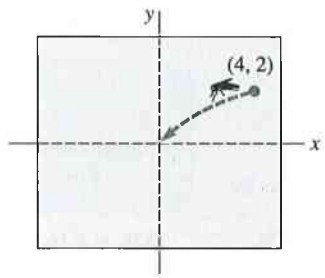


Figura 3.29 Insecto del problema 39

40. En el problema 39, obsérvese que $(0, 0)$ es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria, que comienza en el punto $(4, 2)$, del insecto que en la búsqueda de un sitio frío lo llevará al origen. Si $\langle x(t), y(t)\rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, utilice entonces el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$. ¿A qué se debe esto? [*Sugerencia:* recuerde la separación de variables.]

41. La temperatura en un punto (x, y) de una placa metálica rectangular está dada por $T(x, y) = 100 - 2x^2 - y^2$. Encuentre la trayectoria que seguirá una partícula que comienza en el punto $(3, 4)$ y busca calor moviéndose en la dirección en que la temperatura se incrementa más rápidamente.

42. La temperatura T en un punto (x, y, z) del espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen. Se sabe que $T(0, 0, 1) = 500$. Encuentre la rapidez con la que cambia T en el punto $(2, 3, 3)$ y en dirección hacia $(3, 1, 1)$. ¿En dirección a qué punto, desde $(2, 3, 3)$, se incrementa más rápidamente la temperatura T? ¿Cuál es la máxima velocidad con la que cambia T en el punto $(2, 3, 3)$?

43. Encuentre una función f tal que

$$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}$$

44. Sean f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} funciones continuas, y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores unitarios. Demuestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.

En los problemas del 45 al 48, suponga que f y g son funciones de dos variables derivables. Demuestre la identidad indicada.

45. $\nabla(cf) = c\,\nabla f$

46. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

47. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

48. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

49. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$ y

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

demuestre que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

3.6 Planos tangentes y líneas normales

Introducción El concepto de gradiente de una función de dos o más variables se introdujo en la sección anterior como ayuda para calcular derivadas direccionales. En esta sección se proporciona una interpretación geométrica del vector gradiente.

Interpretación geométrica del gradiente (funciones de dos variables) Supóngase que $f(x, y) = c$ es la curva de nivel de la función diferencial $z = f(x, y)$ que pasa por un punto específico $P(x_0, y_0)$; esto es, $f(x_0, y_0) = c$.

Si esta curva de nivel se parametriza a través de las funciones derivables

$$x = g(t),\ y = h(t) \quad \text{tales que} \quad x_0 = g(t_0),\ y_0 = h(t_0),$$

entonces la derivada de $f(g(t), h(t)) = c$ respecto a t es

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{1}$$

Cuando se introducen los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j},$$

(1) se convierte en $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Específicamente, en $t = t_0$, se tiene

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{2}$$

Así, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Esto se interpreta como que *∇f es perpendicular a la curva de nivel en P*; véase la figura 3.30.

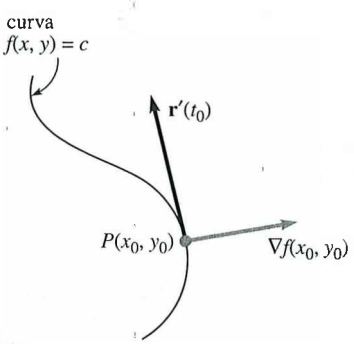


Figura 3.30 El gradiente es perpendicular al vector tangente en P

Ejemplo 1 Gradiente en un punto

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por el punto (2, 3). Grafique el gradiente en dicho punto.

Solución Como $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Por lo tanto,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La figura 3.31 muestra la curva de nivel y $\nabla f(2, 3)$. ❑

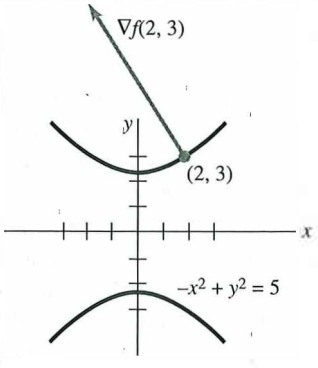


Figura 3.31 Gradiente del ejemplo 1

Interpretación geométrica del gradiente (funciones de tres variables) Procediendo de la misma forma, sea $f(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función derivable $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones derivables $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C de la superficie para la cual $x_0 = f(t_0)$, $y_0 = g(t_0)$, $z_0 = h(t_0)$, entonces la derivada de $F(f(t), g(t), h(t)) = 0$ implica que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

o
$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = 0. \tag{3}$$

En particular, en $t = t_0$, (3) es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{4}$$

Así, cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento es válido para cualquier curva derivable que pase por el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie, se concluye que ∇F *es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en* P; véase la figura 3.32.

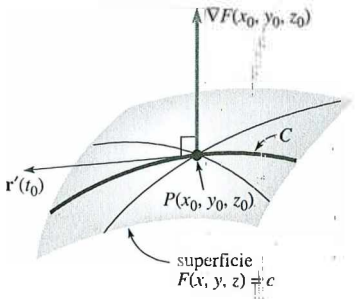


Figura 3.32 El gradiente es perpendicular a la superficie de nivel en P

Ejemplo 2 Gradiente en un punto

Encuentre la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por el punto (1, 1, 1). Grafique el gradiente en dicho punto.

Solución Como $F(1, 1, 1) = 3$, la superficie de nivel que pasa por el punto (1, 1, 1) es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. El gradiente de la función es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

Por lo que, en el punto dado, $\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. La superficie de nivel y ∇F (1, 1, 1) se ilustran en la figura 3.33. ❑

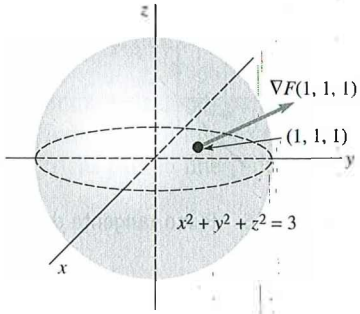


Figura 3.33 Gradiente del ejemplo 2

■ **Plano tangente** Un problema básico del cálculo diferencial consiste en encontrar la ecuación de una línea tangente a la gráfica de una función. En el espacio tridimensional, el problema análogo es encontrar la ecuación de un **plano tangente** a una superficie. Se supone, de nuevo, que $w = F(x, y, z)$ es una función derivable y que $F(x, y, z) = c$ es una superficie.

DEFINICIÓN 3.6 Plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la gráfica de $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. El plano tangente en P es aquel que pasa por P y es perpendicular a ∇F calculado en P.

Entonces, si $P(x, y, z)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ son puntos del plano tangente y $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}_0$ son sus respectivos vectores de posición, entonces la ecuación vectorial del plano tangente es $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Véase la figura 3.34. Este último resultado se sintetiza como sigue:

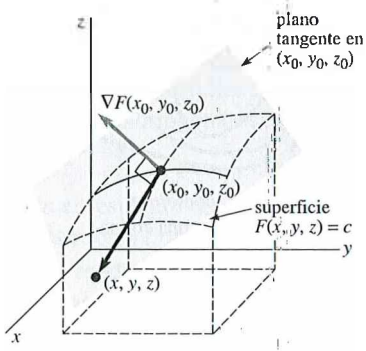


Figura 3.34 El plano tangente es perpendicular al gradiente en P

TEOREMA 3.7 Ecuación del plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es $\mathbf{0}$. Entonces, la ecuación del plano tangente en P es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \tag{5}$$

Ejemplo 3 Ecuación del plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $x^2 - 4y^2 + z^2 = 16$ en el punto (2, 1, 4).

Solución Definiendo $F(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + z^2$, la superficie proporcionada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(2, 1, 4) = 16$ que pasa por el punto (2, 1, 4). Entonces, $F_x(x, y, z) = 2x$, $F_y(x, y, z) = -8y$ y $F_z(x, y, z) = 2z$, de forma que

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} - 8y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(2, 1, 4) = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

De (5) se tiene que la ecuación del plano tangente es

$$4(x-2) - 8(y-1) + 8(z-4) = 0 \quad \text{o} \quad x - 2y + 2z = 8. \qquad \square$$

■ **Superficies dadas por $z = f(x, y)$** Para una superficie expresada explícitamente por una función derivable $z = f(x, y)$, se define $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ o $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Así, un punto (x_0, y_0, z_0) se halla sobre la gráfica $z = f(x, y)$ si, y sólo si, se halla también en la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Esto se deduce de $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$.

Ejemplo 4 Ecuación del plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$ en el punto $(1, -1, 5)$.

Solución Se define $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z + 4$ de forma que la superficie de nivel de F que pasa por el punto dado es $F(x, y, z) = F(1, -1, 5)$ o $F(x, y, z) = 0$. Entonces, $F_x = x$, $F_y = y$ y $F_z = -1$, de modo que

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Así, de (5) la ecuación deseada es

$$(x + 1) - (y - 1) - (z - 5) = 0 \quad \text{o} \quad -x + y + z = 7.$$

Véase la figura 3.35. $\square$

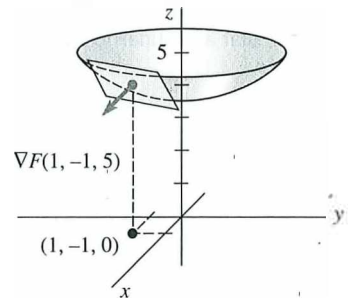


Figura 3.35 Plano tangente del ejemplo 4

■ **Línea normal** Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $f(x, y, z) = c$, donde ∇F no es $\mathbf{0}$. La línea que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se denomina la **línea normal** a la superficie en P. La línea normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en P.

Ejemplo 5 Línea normal a una superficie

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea normal a la superficie del ejemplo 4 en el punto $(1, -1, 5)$.

Solución Un vector director para la línea normal en el punto $(1, -1, 5)$ es $\nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. De aquí se deduce que $x = 1 + t$, $y = -1 - t$ y $z = 5 - t$ son las ecuaciones paramétricas para la línea normal. $\square$

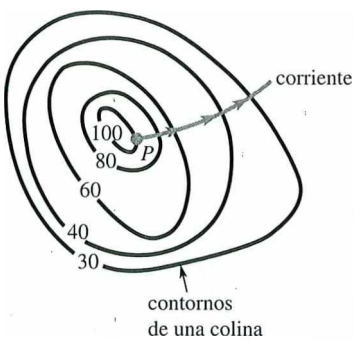


Figura 3.36 La corriente es perpendicular a los contornos

Comentarios

El flujo del agua que cae por una colina elige una trayectoria en la dirección del mayor cambio en altitud. La figura 3.36 muestra los contornos, o curvas de nivel, de una colina. Como se muestra en la figura, una corriente que comienza en el punto P seguirá una trayectoria perpendicular a los contornos. Después de leer las secciones 3.5 y 3.6, el estudiante debe ser capaz de explicar por qué secede de este modo.

EJERCICIOS 3.6 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas del 1 al 12, bosqueje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Bosqueje el gradiente en dicho punto.

1. $f(x, y) = x - 2y$; $(6, 1)$
2. $f(x, y) = \dfrac{y + 2x}{x}$; $(1, 3)$
3. $f(x, y) = y - x^2$; $(2, 5)$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $(-1, 3)$
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$; $(-2, -3)$
6. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x}$; $(2, 2)$
7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2$; $(1, 1)$
8. $f(x, y) = \dfrac{y - 1}{\operatorname{sen} x}$; $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{2}\right)$
9. $F(x, y, z) = y + z$; $(3, 1, 1)$
10. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; $(1, 1, 3)$

11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; (3, 4, 0)$
12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z;\ (0, -1, 1)$

En los problemas 13 y 14, encuentre los puntos de la superficie proporcionada en los cuales el gradiente es paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2;\ 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$
14. $x^3 + y^2 + z = 15;\ 27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas del 15 al 24, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación proporcionada en el punto indicado.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ (-2, 2, 1)$
16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8;\ (2, 4, 1)$
17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5;\ (6, 2, 3)$
18. $xy + yz + zx = 7;\ (1, -3, -5)$
19. $z = 25 - x^2 - y^2;\ (3, -4, 0)$
20. $xz = 6;\ (2, 0, 3)$
21. $z = \cos(2x + y); \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
22. $x^2y^3 + 6z = 10;\ (2, 1, 1)$
23. $z = \ln(x^2 + y^2); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$
24. $z = 8e^{-2y} \operatorname{sen} 4x; \left(\frac{\pi}{24}, 0, 4\right)$

En los problemas 25 y 26, encuentre los puntos de la superficie proporcionada en los cuales el plano tangente es paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7;\ 2x + 4y + 6z = 1$
26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33;\ 8x + 4y + 6z = 5$
27. Encuentre los puntos de la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.
28. Encuentre los puntos de la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los que el plano tangente es paralelo a: *a*) el plano xz, *b*) el plano yz y *c*) el plano xy.

En los problemas 29 y 30, demuestre que la segunda ecuación corresponde a la ecuación del plano tangente a la gráfica de la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0).

29. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$
30. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;\ \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$
31. Demuestre que todos los planos tangentes a la gráfica de $z^2 = x^2 + y^2$ pasan por el origen.
32. Demuestre que la suma de las intersecciones x, y y z de todos los planos tangentes a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, donde $a > 0$, es el número a.

En los problemas 33 y 34, encuentre ecuaciones paramétricas para la línea normal en el punto indicado. En los problemas 35 y 36, encuentre ecuaciones simétricas para la línea normal.

33. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4;\ (1, -1, 1)$
34. $z = 2x^2 - 4y^2;\ (3, -2, 2)$
35. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1;\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3)$
36. $x^2 + y^2 - z^2 = 0;\ (3, 4, 5)$
37. Demuestre que todas las líneas normales a la gráfica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasan por el origen.
38. Se dice que dos superficies son **ortogonales** en un punto P de intersección si sus líneas normales en P son ortogonales. Demuestre que las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en P si, y sólo si, $F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$.

En los problemas 39 y 40, utilice el resultado del problema 38 para demostrar que las superficies proporcionadas son ortogonales en un punto de intersección.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25;\ -x^2 + y^2 + z^2 = 0$
40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4;\ z = 1/xy^2$

3.7 Divergencia y rotacional

■ **Introducción** En la sección 3.1 se introduce el concepto de función vectorial de una variable. En esta sección se examinan funciones vectoriales de dos y tres variables.

■ **Campos vectoriales** Las funciones vectoriales de dos y tres variables,

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

también se denominan **campos vectoriales**. Por ejemplo, el movimiento del viento o de un fluido puede describirse por medio de un *campo de velocidad*, puesto que es posible asignar a cada punto un vector que representa la velocidad de una partícula en el punto;

véase las figuras 3.37*a*) y 3.37*b*). El concepto de *campo de fuerza* desempeña un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo; véase las figuras 3.37*c*) y 3.37*d*).

a) Flujo de aire alrededor del ala de un avión.

b) Flujo laminar de sangre en una arteria; las capas cilíndricas de sangre fluyen más rápido cerca del centro de la arteria.

c) Campo de fuerza cuadrático inverso; la magnitud de la fuerza de atracción es grande cerca de la partícula.

d) Líneas de fuerza alrededor de dos cargas positivas iguales.

Figura 3.37 Campos vectoriales diversos

Ejemplo 1 Campo vectorial bidimensional

Grafique el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución Una forma consiste simplemente en escoger puntos en el plano xy y graficar entonces el vector $\mathbf{F}$ en dichos puntos. Por ejemplo, en $(1, 1)$ se dibujaría el vector $\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Para el campo vectorial dado es posible dibujar sistemáticamente vectores de la misma longitud. Obsérvese que $\|\mathbf{F}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que vectores de la misma longitud k deben hallarse a lo largo de la curva definida por $\sqrt{x^2 + y^2} = k$; esto es, en cualquier punto del círculo $x^2 + y^2 = k^2$ un vector debería tener longitud k. Por simplicidad, se eligen círculos que contienen algunos puntos con coordenadas enteras. Por ejemplo, para $k = 1$, $k = \sqrt{2}$ y $k = 2$, se tiene:

$x^2 + y^2 = 1$: en los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, los vectores correspondientes $\mathbf{j}$, $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 1.

$x^2 + y^2 = 2$: en los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ los vectores correspondientes $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ tienen la misma longitud $\sqrt{2}$.

$x^2 + y^2 = 4$: en los puntos $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ los vectores correspondientes $2\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i}$, $-2\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 2.

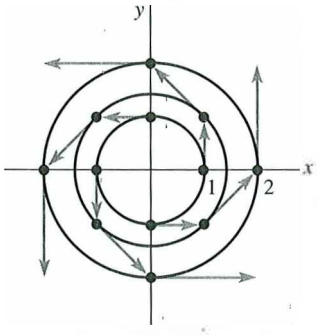


Figura 3.38 Campo vectorial del ejemplo 1

La figura 3.38 muestra los vectores en estos puntos. ❑

En la sección precedente se vio que el operador nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

combinado con una función escalar $\phi(x, y, z)$ produce un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

denominado gradiente de ϕ. El operador nabla también se combina con un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ en dos formas diferentes: en un caso, generando otro campo vectorial y en el otro produciendo una función escalar. A continuación se asumirá que P, Q y R tienen derivadas parciales continuas.

DEFINICIÓN 3.7 Rotacional

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

En la práctica, rot $\mathbf{F}$ se calcula a partir del producto cruz del operador nabla con el vector $\mathbf{F}$:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Existe otra combinación de derivadas parciales de las funciones que componen a un campo vectorial que se presenta frecuentemente en ciencias e ingeniería. Antes de plantear la siguiente definición, deben considerarse los siguientes antecedentes.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces, como se muestra en la figura 3.39, el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo (esto es, el **flujo** del campo vectorial $\mathbf{F}$ que atraviesa el área ΔS) se aproxima por

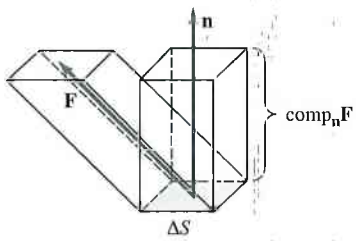


Figura 3.39 Flujo de un fluido a través del elemento de área ΔS

$$\text{(altura)(área de la base)} = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,\Delta S, \tag{2}$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie. Considérese ahora el paralelepípedo rectangular mostrado en la figura 3.40. Para calcular el flujo total que sale de $\mathbf{F}$ a través de sus seis caras se calcula primero el flujo total que sale de las caras paralelas. El área de la cara F_1 es $\Delta x\,\Delta z$ y su vector unitario normal saliente es $-\mathbf{j}$, por lo que, según (2), el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa a F_1 es aproximadamente

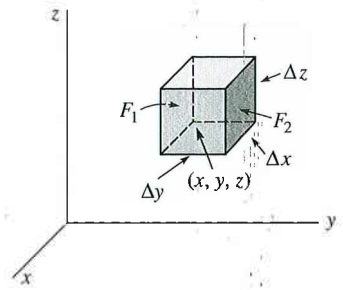


Figura 3.40 ¿Cuál es el flujo total del campo vectorial que circula a través de este elemento?

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = -Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z.$$

El flujo que sale de la cara F_2, cuyo vector normal saliente es $\mathbf{j}$, se aproxima por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{j})\,\Delta x\,\Delta z = Q(x, y + \Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z.$$

En consecuencia, el flujo total que sale de estas caras paralelas es

$$Q(x, y + \Delta y, z)\,\Delta x\,\Delta z + (-Q(x, y, z)\,\Delta x\,\Delta z) = [Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]\,\Delta x\,\Delta z.$$

Al multiplicar (3) por $\Delta y/\Delta y$ y recordando la definición de una derivada parcial, se tiene para Δy pequeñas,

$$\frac{[Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]}{\Delta y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Argumentando de igual forma, se observa que las contribuciones al flujo total que sale del paralelepípedo a través de las dos caras paralelas al plano yz, y de las dos caras paralelas al plano xy son, respectivamente,

$$\frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z \quad \text{y} \quad \frac{\partial R}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Sumando los resultados, se observa que el flujo neto de $\mathbf{F}$ que sale del paralelepípedo es aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Dividiendo la última expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta z$ se obtiene el flujo de $\mathbf{F}$ que sale por unidad de volumen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

A esta combinación de derivadas parciales se le asigna un nombre especial.

DEFINICIÓN 3.8 Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Obsérvese que div $\mathbf{F}$ se escribe también en términos del operador nabla como:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} R(x, y, z). \tag{4}$$

Ejemplo 2 Rotacional y divergencia

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\mathbf{i} + 4x^5y^2z\,\mathbf{j} - y^4z^6\mathbf{k}$, encuentre rot $\mathbf{F}$ y div $\mathbf{F}$.

Solución De (1),

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix}$$

$$= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}.$$

De (4),

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^5y^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^4z^6)$$

$$= 2xy^3 + 8x^5yz - 6y^4z^5.$$ ❑

Se propone al lector que demuestre las siguientes dos importantes propiedades. Si f es una función escalar con segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \tag{5}$$

También, si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \tag{6}$$

Véase los problemas 29 y 30 de los ejercicios 3.7.

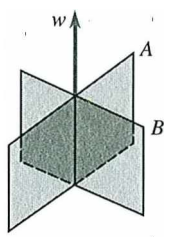
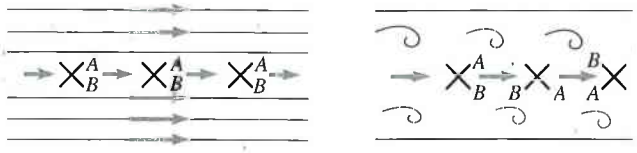


Figura 3.41 Instrumento con palas

Interpretaciones físicas Maxwell* introdujo la palabra *rotacional* en sus estudios de campos electromagnéticos. Sin embargo, el rotacional se entiende fácilmente en conexión con el flujo de fluidos. Si un instrumento con paletas, como el que se muestra en la figura 3.41, se inserta en el flujo de un fluido, entonces el rotacional del campo de velocidad $\mathbf{F}$ es una medida de la tendencia del fluido a hacer girar el dispositivo alrededor de su eje vertical w. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, se dice entonces que el flujo del fluido es **irrotacional**, y

*James Clerk Maxwell (1831-1879), físico escocés.

ello significa que se encuentra libre de vórtices o remolinos que provoquen la rotación de las paletas.* En la figura 3.42, el eje w de las paletas se dirige hacia afuera de la página.

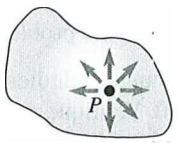


a) Flujo irrotacional. *b*) Flujo rotacional.

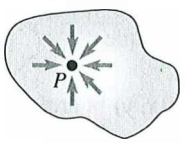
Figura 3.42 Flujo irrotacional en *a*); flujo rotacional en *b*)

En los antecedentes que conducen a la definición 3.8 se observa que la divergencia de un campo de velocidad **F** cerca de un punto $P(x, y, z)$ es el flujo por unidad de volumen. Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, se dice entonces que P es una **fuente** para **F**, ya que existe un flujo neto saliente del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) < 0$, entonces se dice que P es un **hundimiento** para **F**, puesto que existe un flujo neto entrante del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) = 0$, no existen ni fuentes ni hundimientos cerca de P; véase la figura 3.43.

La divergencia de un campo vectorial se interpreta también como una medida de la rapidez con la que cambia la densidad del fluido en un punto. En otras palabras, div **F** es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el fluido es **incompresible**. En teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se dice que el campo vectorial **F** es **solenoidal**.



a) div $\mathbf{F}(P) > 0$; P es una fuente.



b) div $\mathbf{F}(P) < 0$; P es un hundimiento.

Figura 3.43 P es una fuente en *a*); P es un pozo en *b*)

*En inglés se utiliza la palabra *curl*, empleándose el símbolo curl **F** en lugar de rot **F**.

EJERCICIOS 3.7 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-10.

En los problemas del 1 al 6, grafique algunos vectores representativos del campo vectorial proporcionado.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$

En los problemas del 7 al 16, encuentre el rotacional y la divergencia del campo vectorial proporcionado.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = 10yz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + 6x^3\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (3z^2 + y^2)\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)^3\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + xye^{2y}\mathbf{k}$
11. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
12. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + (\frac{1}{2}x^3y^2 - xy)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
13. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz\mathbf{i} + z\cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los problemas del 17 al 24, verifique la igualdad proporcionada; suponga que **a** es un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

17. $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$
18. $\operatorname{rot}\mathbf{r} = \mathbf{0}$
19. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
20. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
21. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
22. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
23. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
24. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$

En los problemas del 25 al 32, verifique la igualdad proporcionada. Considere la continuidad de todas las derivadas parciales.

25. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
26. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
27. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
28. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$
29. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$
30. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0$
31. $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{G}$
32. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$
33. Demuestre que

$$\nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Esto se conoce como **laplaciano**, y también se escribe como $\nabla^2 f$.

34. Demuestre que $\nabla \cdot (f\nabla f) = f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2$, donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano, definido en el problema 33. [*Sugerencia:* Véase el problema 27.]

35. Encuentre rot(rot $\mathbf{F}$) para el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.

36. *a*) Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, demuestre que rot(rot $\mathbf{F}$) $= -\nabla^2\mathbf{F} +$ grad (div $\mathbf{F}$), donde

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \nabla^2 P\mathbf{i} + \nabla^2 Q\mathbf{j} + \nabla^2 R\mathbf{k}$$

b) Utilice la igualdad del inciso *a*) para obtener el resultado del problema 35.

37. Se dice que cualquier función escalar f es **armónica** si $\nabla^2 f = 0$. Verifique que $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ es armónica excepto en el origen. $\nabla^2 f = 0$ se le denomina la **ecuación de Laplace**.

38. Verifique que

$$f(x, y) = \arctan\left(\frac{2}{x^2y^2 - 1}\right), \quad x^2 + y^2 \neq 1$$

satisface la ecuación de Laplace para dos variables

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

39. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de una masa m_1 y sea m_2 una masa localizada en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r}$$

Verifique que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y div $\mathbf{F} = 0$, donde $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

40. Supóngase que un cuerpo rota con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje. Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un punto P sobre el cuerpo medido desde el origen, entonces el vector velocidad lineal $\mathbf{v}$ de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; véase la figura 3.44. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}$ rot $\mathbf{v}$.

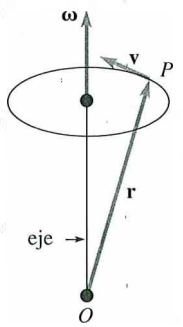


Figura 3.44 Cuerpo rotatorio del problema 40

En los problemas 41 y 42, suponga que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial proporcionado es solenoidal. [*Sugerencia:* Véase el problema 31.]

41. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$ 42. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f\nabla g)$

43. El campo vectorial de velocidad para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro viene dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}\right.$$

donde A es una constante positiva; véase la figura 3.45.

a) Demuestre que cuando el punto (x, y) se encuentra lejos del origen, $\mathbf{F}(x, y) \approx A\mathbf{i}$.

b) Demuestre que $\mathbf{F}$ es irrotacional.

c) Demuestre que $\mathbf{F}$ es incompresible.

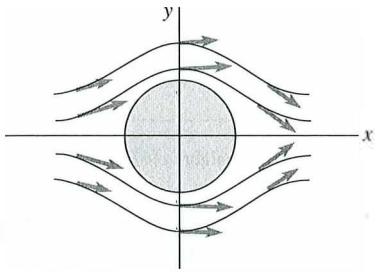


Figura 3.45 Campo vectorial del problema 43

44. Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ representan los campos eléctrico y magnético en un espacio vacío, entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Utilice la igualdad del problema 36*a*) para demostrar que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

45. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + (z + 5x)\mathbf{k}$. Explique por qué $\mathbf{F}$ no es el rotacional de otro campo vectorial $\mathbf{G}$.

3.8 Integrales de línea

Introducción El concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, la *integración de una función definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función definida a lo largo de una curva.* Con este propósito se necesita introducir cierta terminología sobre curvas.

Terminología Supóngase que C es una curva parametrizada por medio de $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde $a \le t \le b$, y A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente. Se dice que:

i) C es una **curva suave** si f' y g' son continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no nulos simultáneamente en el intervalo abierto (a, b).

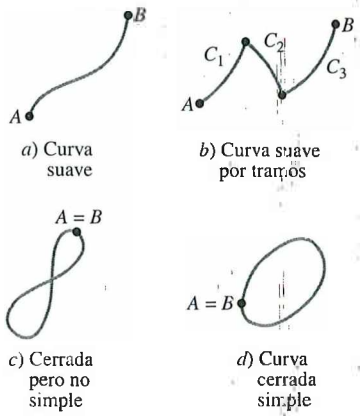
ii) C es **suave por tramos** si está formada por un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas en sus extremos, esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.

iii) C es una **curva cerrada** si $A = B$.

iv) C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza consigo misma.

v) Si C no es una curva cerrada, entonces la **dirección positiva** de C es la que corresponde a los valores crecientes de t.

La figura 3.46 ilustra cada uno de los tipos de curva definidos en *i*)-*iv*).



a) Curva suave — *b*) Curva suave por tramos — *c*) Cerrada pero no simple — *d*) Curva cerrada simple

Figura 3.46 Curvas diversas

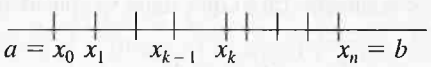
Esta misma terminología se utiliza para las curvas espaciales. Por ejemplo, una curva C definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$, donde $a \le t \le b$, es suave si f', g' y h' son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente nulas en (a, b).

Integral definida Antes de definir la integración a lo largo de una curva, se revisan los cinco pasos que conducen a la definición de la integral definida.

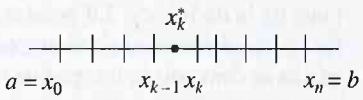
$y = f(x)$

1. Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$.
2. Se efectúa una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$ de longitud $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. La partición se denota como P

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$



3. Sea $\|P\|$ la longitud del subintervalo más largo. Al número $\|P\|$ se le denomina la **norma** de la partición P.
4. Se elige un número x_k^* en cada subintervalo.



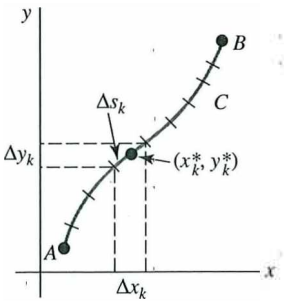
5. Se genera la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$.

La integral definida de una función de una única variable está dada por el límite de una suma:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Integrales de línea en el plano Los siguientes cinco pasos análogos llevan a la definición de tres **integrales de línea*** en el plano.

*La elección del nombre es desafortunada; uno más apropiado sería **integrales de curva**.



$z = G(x, y)$

1. Sea G una función definida en alguna región que contiene a la curva suave C definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$.
2. Divídase C en n subarcos de longitudes Δs_k de acuerdo con la partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$. Sean Δx_k y Δy_k las longitudes de las proyecciones de cada subarco sobre los ejes x y y, respectivamente.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición o la longitud del subarco más largo.
4. Escójase un punto (x_k^*, y_k^*) de cada subarco.
5. Genere las sumas.

$$\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k, \quad \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

DEFINICIÓN 3.9 Integrales de línea en el plano

Sea G una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene a una curva suave C.

i) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A a B respecto a x** es

$$\int_C G(x, y)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k.$$

ii) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A a B respecto a y** es

$$\int_C G(x, y)\,dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.$$

iii) La **integral de línea de G a lo largo de C desde A hasta B respecto a la longitud del arco** es

$$\int_C G(x, y)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

Puede demostrarse que si $G(x, y)$ es continua en C, entonces las integrales definidas en *i*), *ii*) y *iii*) existen efectivamente. En lo que sigue se considerará que existe siempre continuidad en G.

■ **Método de evaluación (curva definida paramétricamente)** Las integrales de línea de la definición 3.9 pueden calcularse de dos formas: ya sea que la curva C se defina paramétricamente o bien mediante una función explícita. En cualquier caso, la idea básica es convertir la integral de línea a una integral definida por una única variable. Si C es una curva suave parametrizada por medio de $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces simplemente en la integral se reemplazan x y y por las funciones $f(t)$ y $g(t)$, y la derivada apropiada dx, dy o ds por $f'(t)\,dt$, $g'(t)\,dt$ o $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$. La expresión $ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$ se denomina diferencial de longitud de arco. La integración se desarrolla respecto a la variable t en la forma usual:

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(f(t), g(t))\,f'(t)\,dt, \tag{1}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(f(t), g(t))\,g'(t)\,dt, \tag{2}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(f(t), g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt. \tag{3}$$

Ejemplo 1 Cálculo de integrales de línea

Calcule *a)* $\int_C xy^2\,dx$, *b)* $\int_C xy^2\,dy$ y *c)* $\int_C xy^2\,ds$ en el cuarto de círculo C definido por $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi/2$. Véase la figura 3.47.

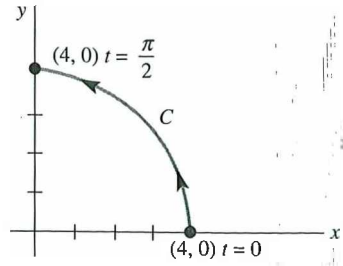


Figura 3.47 Curva C del ejemplo 1

Solución *a)* De (1),

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\operatorname{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(-4\operatorname{sen} t\,dt}^{dx}$$

$$= -256\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t\cos t\,dt$$

$$= -256\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

b) De (2),

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\operatorname{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2t\,dt \leftarrow \text{identidades trigonométricas}$$

$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 4t)\,dt$$

$$= 32\left[t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

c) De (3),

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\operatorname{sen}^2 t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\,dt}^{ds}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt$$

$$= 256\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$

❑

■ **Método de evaluación (curva definida por una función explícita)** Si la curva C se define por medio de una función explícita $y = f(x)$, $a \le x \le b$, se puede utilizar x como un parámetro. Con $dy = f'(x)\,dx$ y $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$, las anteriores integrales de línea se convierten, respectivamente, en

$$\int_C G(x, y)\,dx = \int_a^b G(x, f(x))\,dx, \tag{4}$$

$$\int_C G(x, y)\,dy = \int_a^b G(x, f(x))f'(x)\,dx, \tag{5}$$

$$\int_C G(x, y)\,ds = \int_a^b G(x, f(x))\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{6}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *suave por tramos* C se define como la *suma* de las integrales sobre las diversas curvas suaves cuya unión comprende a C. Por ejemplo, si C está formada por las curvas suaves C_1 y C_2, entonces

$$\int_C G(x, y)\, ds = \int_{C_1} G(x, y)\, ds + \int_{C_2} G(x, y)\, ds.$$

■ **Notación** En muchas aplicaciones, las integrales de línea aparecen como una suma

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy.$$

Es común escribir esta suma como una integral sin paréntesis, de la siguiente forma

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy \quad \text{o simplemente} \quad \int_C P\, dx + Q\, dy. \tag{7}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva *cerrada* C se denota frecuentemente por

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy.$$

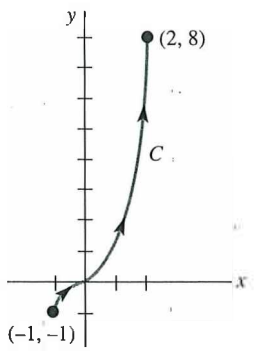


Figura 3.48 Curva C del ejemplo 2

Ejemplo 2 Curva definida por una función explícita

Calcule $\int_C xy\, dx + x^2\, dy$, donde C viene dada por $y = x^3$, $-1 \le x \le 2$.

Solución La curva C se ilustra en la figura 3.48 y está definida por la función explícita $y = x^3$. Por lo tanto, se puede utilizar x como parámetro. Utilizando $dy = 3x^2\, dx$, se tiene

$$\begin{aligned}\int_C xy\, dx + x^2\, dy &= \int_{-1}^{2} \overbrace{x}^{y}(x^3)dx + \overbrace{x^2(3x^2\, dx)}^{dy} \\ &= \int_{-1}^{2} 4x^4\, dx \\ &= \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{132}{5}.\end{aligned}$$

❑

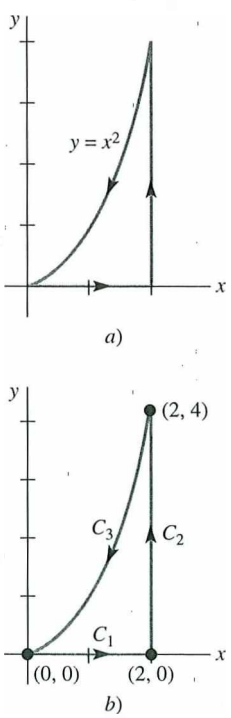


Figura 3.49 Curva C del ejemplo 4

Ejemplo 3 Curva definida paramétricamente

Calcule $\oint_C x\, dx$, donde C es el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución De (1),

$$\oint_C x\, dx = \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t\, dt) = \frac{1}{2}\cos^2 t\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0.$$

❑

Ejemplo 4 Curva cerrada

Calcule $\oint_C y^2\, dx - x^2\, dy$ en la curva cerrada C que se muestra en la figura 3.49*a*).

Solución Puesto que C es suave por tramos, la integral se expresa como una suma de integrales. Simbólicamente, se escribe

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las curvas mostradas en la figura 3.49*b*). En C_1, se utiliza x como parámetro. Como $y = 0$, $dy = 0$; entonces,

$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$

En C_2, se utiliza y como parámetro. Desde $x = 2$, $dx = 0$, y se tiene

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy \\ &= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16.\end{aligned}$$

Finalmente, en C_3 se utiliza de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$, se tiene que $dy = 2x\,dx$ y, entonces,

$$\begin{aligned}\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx) \\ &= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_2^0 = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $$\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = 0 - 16 + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$$ ❑

Es importante tener en cuenta que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C, siempre y cuando C venga dada con la misma orientación que todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen a la curva; véase el problema 37 de los ejercicios 3.8. Además, hay que recordar que $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ para integrales definidas. Las integrales de línea poseen una propiedad similar. Supóngase, como muestra la figura 3.50, que $-C$ denota a la curva que tiene la orientación opuesta a la de C. Entonces, se puede demostrar que

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy,$$

o de manera equivalente,

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{8}$$

Por ejemplo, en el inciso *a*) del ejemplo 1, $\int_{-C} xy^2\,dx = 64$.

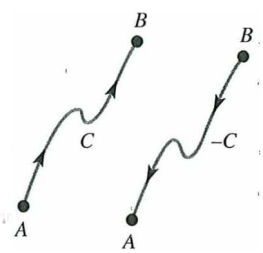


Figura 3.50 Curvas con orientación opuesta

■ **Integrales de línea en el espacio** Las integrales de línea de una función G de tres variables, $\int_C G(x, y, z)\,dx$, $\int_C G(x, y, z)\,dy$ y $\int_C G(x, y, z)\,ds$, se definen en forma análoga a la definición 3.9. Sin embargo, a esa lista se añade una cuarta **integral de línea a lo largo de una curva espacial C respecto a z**:

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta z_k. \tag{9}$$

■ **Método de cálculo** Si C es una curva suave del espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, $a \le t \le b$, entonces la integral en (9) se calcula utilizando

$$\int_C G(x, y, z)\,dz = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))h'(t)\,dt.$$

Las integrales $\int_C G(x, y, z)\, dx$ y $\int_C G(x, y, z)\, dy$ se calculan en modo semejante. La integral de línea respecto a la longitud del arco es

$$\int_C G(x, y, z)\, ds = \int_a^b G(f(t), g(t), h(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt.$$

Al igual que en (7), en el espacio tridimensional las integrales de línea se manejan a menudo como una suma:

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz.$$

Ejemplo 5 Integral de línea en una curva del espacio tridimensional

Calcule $\int_C y\, dx + x\, dy + z\, dz$, donde C es la hélice $x = 2\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Sustituyendo las expresiones para x, y y z junto con $dx = -2\operatorname{sen} t\, dt$, $dy = 2\cos t\, dt$, $dz = dt$, se tiene

$$\int_C y\, dx + x\, dy + z\, dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{(-4\operatorname{sen}^2 t + 4\cos^2 t)}_{\text{fórmula del ángulo doble}}\, dt + t\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\, dt$$

$$= \left(2\operatorname{sen} 2t + \frac{t^2}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \quad \square$$

Se puede utilizar el concepto de función vectorial de varias variables para escribir una integral general de línea en forma compacta. Por ejemplo, suponiendo que la función vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ se encuentra definida sobre una curva C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, y suponiendo que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de los puntos de C, entonces la derivada de $\mathbf{r}(t)$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j},$$

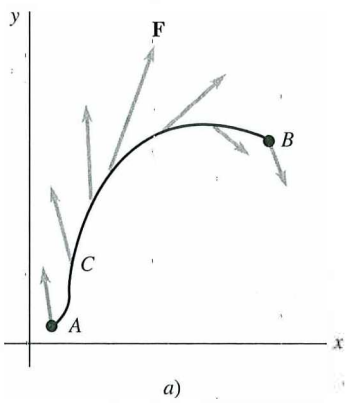
nos lleva a definir $d\mathbf{r} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j}$. Como $\mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ se escribe

$$\int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

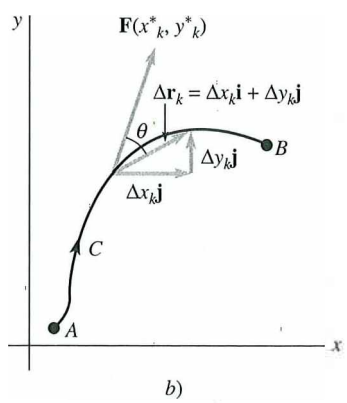
En forma similar, para una integral de línea sobre una curva espacial,

$$\int_C P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{11}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$.



a)



b)

Figura 3.51 Campo de fuerza **F** que varía a lo largo de la curva C

■ **Trabajo** En la sección 1.3 se plantea que el trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ que induce el desplazamiento $\mathbf{d}$ en línea recta de un objeto es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$. En cursos introductorios de cálculo o física, se muestra entonces que el trabajo realizado al mover un objeto desde $x = a$ hasta $x = b$ por una fuerza $F(x)$, que varía en magnitud pero no en dirección, viene dado por la integral definida $W = \int_a^b F(x)\, dx$. En general, un campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ que actúa en todos los puntos de una curva suave C: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, varía tanto en magnitud como en dirección; véase la figura 3.51*a*). Si A y B son los puntos $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente, la pregunta es: ¿cuál es el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al moverse su punto de aplicación a lo largo de C desde A hasta B? Para responder a esta pregunta, supóngase que C se divide en n subarcos de longitudes Δs_k; $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)$ es una fuerza constante en cada subarco.

Si, como se muestra en la figura 3.51*b*), la longitud del vector $\Delta\mathbf{r}_k = (x_k - x_{k-1})\mathbf{i} + (y_k - y_{k-1})\mathbf{j} = \Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j}$ es una aproximación a la longitud del subarco k-ésimo, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ sobre el subarco es, aproximadamente

$$\begin{aligned}(\|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\| \cos\theta)\|\Delta\mathbf{r}_k\| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta\mathbf{r}_k \\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

Sumando estos elementos de trabajo y pasando al límite, se define naturalmente el **trabajo realizado por F a lo largo de *C*** como la integral de línea

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{o} \quad W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{12}$$

Desde luego, (12) se puede extender a campos de fuerza que actúan en puntos de una curva espacial. En este caso, el trabajo $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se define como en (11).

Ahora, puesto que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt},$$

se sustituye $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds$, donde $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es una tangente unitaria a C. Por lo tanto,

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \int_C \text{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\,ds. \tag{13}$$

En otras palabras, *el trabajo realizado por una fuerza* $\mathbf{F}$ *a lo largo de una curva* C *se debe completamente a la componente tangencial de* $\mathbf{F}$.

Ejemplo 6 Trabajo realizado por una fuerza

Encuentre el trabajo realizado por: *a*) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y *b*) $\mathbf{F} = \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$ a lo largo de la curva C trazada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.

Solución *a*) La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ proporciona las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$, que se reconocen como un semicírculo. Como muestra la figura 3.52, el campo de fuerza $\mathbf{F}$ es perpendicular a C en todos los puntos. Puesto que las componentes tangenciales de $\mathbf{F}$ son 0, el trabajo realizado a lo largo de C es 0. Para apreciar esto, se utiliza (12):

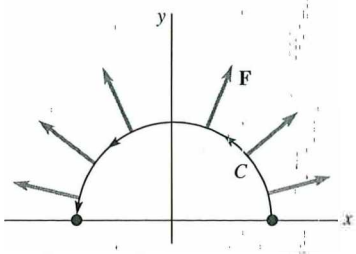


Figura 3.52 Campo de fuerzas en *a*) del ejemplo 6

$$\begin{aligned}W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j}) \cdot (-\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\cos t\,\text{sen}\,t + \text{sen}\,t\cos t)\,dt = 0.\end{aligned}$$

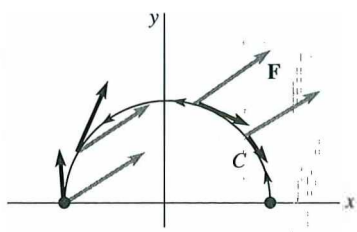


Figura 3.53 Campo de fuerzas en *b*) del ejemplo 6

b) En la figura 3.53, los vectores en negro son las proyecciones de $\mathbf{F}$ sobre los vectores tangentes unitarios. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es

$$\begin{aligned}W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) \cdot (-\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4}\,\text{sen}\,t + \frac{1}{2}\cos t\right) dt \\ &= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t\right)\Big]_0^{\pi} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

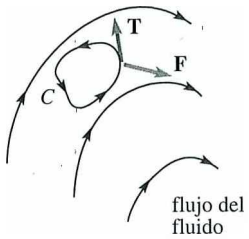
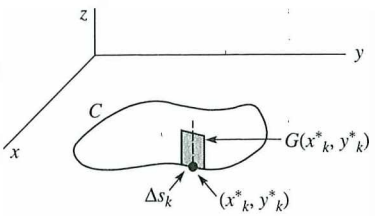
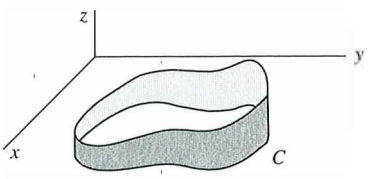


Figura 3.54 ¿Rodea el campo de velocidad a la curva C?



a) Rectángulo vertical



b) "Barda" o "cortina" de altura variable $G(x, y)$ cuya base es C

Figura 3.55 Una interpretación geométrica de una integral de línea

Las unidades del trabajo dependen de las unidades de $\|\mathbf{F}\|$ y de las unidades de distancia. ❑

■ **Circulación** Se dice que una integral de línea de un campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de una curva cerrada simple C es la **circulación** de $\mathbf{F}$ alrededor de C; esto es,

$$\text{circulación} = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

En particular, si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces la circulación es una medida de la cantidad con la que el fluido tiende a rodear a la curva C rotando, o circulando, alrededor de ella. Por ejemplo, si $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{T}$ para todo (x, y) de C, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = 0$, y la curva no se mueve. Por otro lado, $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds > 0$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds < 0$ significa que el fluido tiende a rotar a C en sentido contrario al de las manecillas del reloj y en el sentido de la manecillas del reloj, respectivamente; véase la figura 3.54.

Comentarios

En el caso de dos variables, la integral de línea respecto a la longitud de arco $\int_C G(x, y)\, ds$ se interpreta geométricamente cuando $G(x, y) \geq 0$ en C. En la definición 3.9, el símbolo Δs_k representa la longitud del subarco k-ésimo de la curva C. Pero de la figura que acompaña a esa definición, se tiene la aproximación $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Con esta interpretación de Δs_k se observa de la figura 3.55*a*) que el producto $G(x^*_k, y^*_k)\, \Delta s_k$ es el área de un rectángulo vertical de altura $G(x^*_k, y^*_k)$ y ancho Δs_k. La integral $\int_C G(x, y)\, ds$ representa entonces al área de un lado de una "barda" o "cortina" que se extiende desde la curva C en el plano xy hasta la gráfica de $G(x, y)$ correspondiente a los puntos (x, y) de C; véase la figura 3.55*b*).

EJERCICIOS 3.8 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 4, calcule $\int_C G(x, y)\, dx$, $\int_C G(x, y)\, dy$ y $\int_C G(x, y)\, ds$ en la curva C indicada.

1. $G(x, y) = 2xy$; $x = 5 \cos t$, $y = 5 \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq \pi/4$
2. $G(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leq t \leq 1$
3. $G(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$
4. $G(x, y) = x^2/y^3$; $2y = 3x^{2/3}$, $1 \leq x \leq 8$

En los problemas 5 y 6, calcule $\int_C G(x, y, z)\, dx$, $\int_C G(x, y, z)\, dy$, $\int_C G(x, y, z)\, dz$ y $\int_C G(x, y, z)\, ds$ de la curva C indicada.

5. $G(x, y, z) = z$; $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \pi/2$
6. $G(x, y, z) = 4xyz$; $x = \frac{1}{3} t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$, $0 \leq t \leq 1$

En los problemas del 7 al 10, calcule $\int_C (2x + y)\, dx + xy\, dy$ entre los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 5)$ de la curva C proporcionada.

7. $y = x + 3$
8. $y = x^2 + 1$
9.

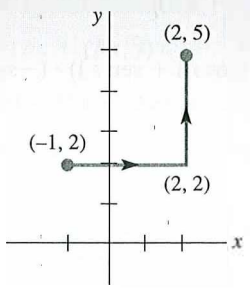


Figura 3.56 Curva C para el problema 9

10.

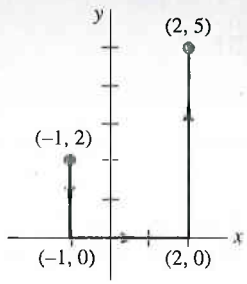


Figura 3.57 Curva C para el problema 10

En los problemas del 11 al 14, calcule $\int_C y\, dx + x\, dy$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ de la curva C proporcionada.

11. $y = x^2$
12. $y = x$
13. C está formada por segmentos de línea desde $(0, 0)$ hasta $(0, 1)$ y desde $(0, 1)$ hasta $(1, 1)$.

14. C está formada por segmentos de línea desde (0, 0) hasta (1, 0) y desde (1, 0) hasta (1, 1).

15. Calcule $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$, donde C viene dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

16. Calcule $\int_C -y^2\,dx + xy\,dy$, donde C viene dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

17. Calcule $\int_C 2x^3y\,dx + (3x + y)\,dy$, donde C viene dada por $x = y^2$ desde $(1, -1)$ hasta $(1, 1)$.

18. Calcule $\int_C 4x\,dx + 2y\,dy$, donde C viene dada por $x = y^3 + 1$ desde $(0, -1)$ hasta $(9, 2)$.

En los problemas 19 y 20, calcule $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ para la curva cerrada C que se proporciona.

19.

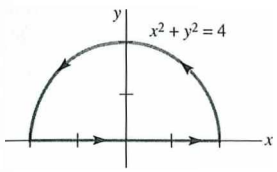


Figura 3.58 Curva cerrada C para el problema 19

20.

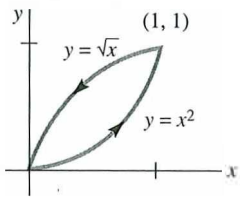


Figura 3.59 Curva cerrada C para el problema 20

En los problemas 21 y 22, calcule $\oint_C x^2y^3\,dx - xy^2\,dy$ para la curva cerrada C que se proporciona.

21.

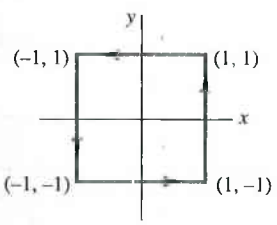


Figura 3.60 Curva cerrada C para el problema 21

22.

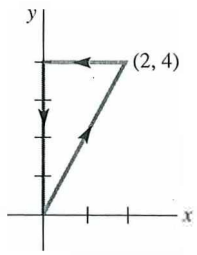


Figura 3.61 Curva cerrada C para el problema 22

23. Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)\,ds$, donde C viene dada por

$$x = 5\cos t, \quad y = 5\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

24. Calcule $\int_{-C} y\,dx - x\,dy$, donde C viene dada por

$$x = 2\cos t, \quad y = 3\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$$

En los problemas del 25 al 28, calcule $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ entre los puntos (0, 0, 0) y (6, 8, 5) para la curva C proporcionada.

25. C está formada por los segmentos de línea desde (0, 0, 0) hasta (2, 3, 4) y desde (2, 3, 4) hasta (6, 8, 5).

26. $x = 3t, \quad y = t^3, z = \frac{5}{4}t^2, \quad 0 \le t \le 2$

27.

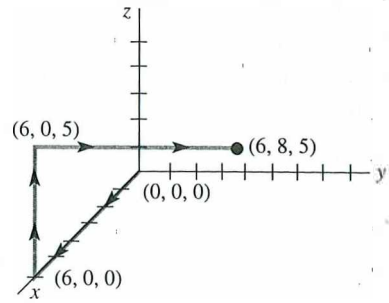


Figura 3.62 Curva cerrada C para el problema 27

28.

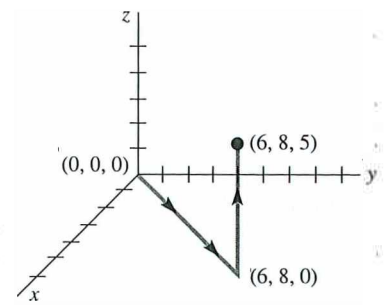


Figura 3.63 Curva cerrada C para el problema 28

En los problemas 29 y 30, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

29. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \ln 2$

30. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

31. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ desde (1, 0) hasta $(e, 1)$.

32. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva suave por tramos que consta de dos segmentos de línea, desde $(-2, 2)$ hasta (0, 0) y desde (0, 0) hasta (2, 3).

33. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (6y - 2x)\mathbf{j}$ que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj y rodea una vez al triángulo cuyos vértices son (1, 1), (3, 1) y (3, 2).

34. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ desde $t = 1$ hasta $t = 3$.

35. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ que actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo definido por $x^2 + y^2 = 9$.

36. En un campo de fuerzas cuadrado inverso $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,* encuentre el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la línea desde (1, 1, 1) hasta (3, 3, 3).

37. Verifique que la integral de línea $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tiene el mismo valor de C para cada una de las siguientes parametrizaciones:

$$C: x = 2t + 1, \quad y = 4t + 2, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C: x = t^2, \quad y = 2t^2, \quad 1 \le t \le \sqrt{3}$$
$$C: x = \ln t, \quad y = 2 \ln t, \quad e \le t \le e^3$$

38. Considere las tres curvas entre (0, 0) y (2, 4):

$$C_1: x = t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 2$$
$$C_2: x = t, \quad y = t^2, \quad 0 \le t \le 2$$
$$C_3: x = 2t - 4, \quad y = 4t - 8, \quad 2 \le t \le 3$$

Demuestre que $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$, pero que $\int_{C_1} xy\,ds \neq \int_{C_2} xy\,ds$. Explique por qué.

39. Considérese que una curva suave C viene descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$. Sean la aceleración, velocidad y rapidez dadas por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ y $v = \|\mathbf{v}\|$, respectivamente. Utilizando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, demuestre que, en ausencia de fricción, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula de masa constante m desde el punto A en $t = a$ hasta el punto B en $t = b$ es igual al cambio en energía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2$$

[*Sugerencia:* Considere $\dfrac{d}{dt}v^2 = \dfrac{d}{dt}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.]

*Obsérvese que la magnitud de $\mathbf{F}$ es inversamente proporcional a $\|\mathbf{r}\|^2$.

40. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por unidad de longitud), entonces $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$ es la masa del alambre. Encuentre la masa de un alambre que tenga la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia del eje y.

41. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable vienen dadas por $\bar{x} = M_y/m$, $\bar{y} = M_x/m$, donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\,ds, \quad M_x = \int_C y\rho(x, y)\,ds$$

y

$$M_y = \int_C x\rho(x, y)\,ds.$$

Encuentre el centro de masa del alambre del problema 40.

42. Un campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y)$ actúa en todos los puntos de la curva C, la cual es la unión de C_1, C_2 y C_3 ilustrada en la figura 3.64. $\|\mathbf{F}\|$ se mide en libras y la distancia se mide en pies, utilizando la escala mostrada en la figura. Utilice los vectores representativos mostrados para obtener un valor aproximado del trabajo realizado por $\mathbf{F}$ a lo largo de C. [*Sugerencia:* Utilice $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds$.]

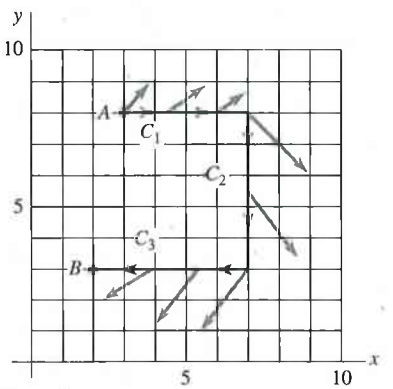


Figura 3.64 Campo de fuerzas del problema 42

3.9 Independencia de la trayectoria

Introducción El valor de una integral de línea depende generalmente de la curva o **trayectoria** entre dos puntos A y B. Sin embargo, hay excepciones; en otras palabras, existen integrales de línea que son independientes de la trayectoria entre A y B. Pero antes de proceder con la argumentación principal de esta sección, se necesitan los siguientes conceptos.

Diferencial (funciones de dos variables) El diferencial de una función de dos variables $\phi(x, y)$ es

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy.$$

Se dice que la expresión diferencial $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ es un **diferencial exacto** si existe una función $\phi(x, y)$ tal que

$$d\phi = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Por ejemplo, la expresión $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$ es un diferencial exacto, puesto que es el diferencial de $\phi(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$. Verifique esto último. Por otro lado, $(2y^2 - 2y)\,dx + (2xy - x)\,dy$ no es un diferencial exacto.

■ **Diferencial (funciones de tres variables)** El diferencial de una función de tres variables $\phi(x, y, z)$ es

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz.$$

Una expresión diferencial $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ es un diferencial exacto si existe una función $\phi(x, y, z)$ tal que

$$d\phi = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

■ **Independencia de la trayectoria** Una integral de línea cuyo valor es el mismo para *cualquier* curva o trayectoria que conecte a A con B se dice que es **independiente de la trayectoria**.

Como en la sección anterior, se comienza con una explicación relativa a las integrales de línea en el plano.

Ejemplo 1 Una integral independiente de la trayectoria

La integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ tiene el mismo valor para todas las trayectoria C entre (0, 0) y (1, 1) mostradas en la figura 3.65. De los problemas del 11 al 14 de los ejercicios 3.8 recuerde que en estas trayectorias

$$\int_C y\,dx + x\,dy = 1.$$

En el ejemplo 2 se demuestra que esta integral es independiente de la trayectoria.

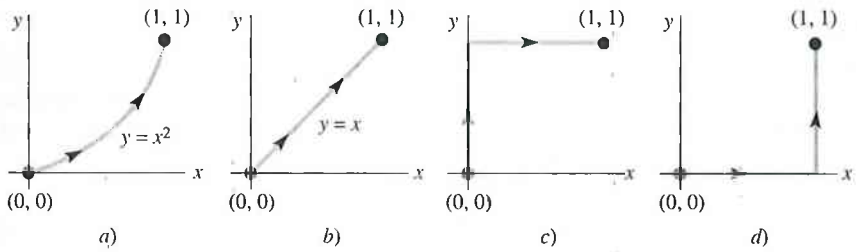


Figura 3.65 La integral de línea del ejemplo 1 tiene el mismo valor para todas las curvas C ❑

■ **Un teorema fundamental** El siguiente teorema establece una relación importante entre los conceptos aparentemente separados de independencia de la trayectoria y los diferenciales exactos. Asimismo, proporciona una manera de calcular las integrales de línea independientes de la trayectoria en forma análoga al teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$.

TEOREMA 3.8 Teorema fundamental para las integrales de línea

Supóngase que existe una función $\phi(x, y)$ tal que $d\phi = P\,dx + Q\,dy$; esto es, $P\,dx + Q\,dy$ es un diferencial exacto. Entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ depende únicamente de los puntos extremos A y B de la trayectoria C, por lo que

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \phi(B) - \phi(A).$$

Demostración Sea C una trayectoria suave paramétricamente definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, y sean las coordenadas de A y B $(f(a), g(a))$ y $(f(b), g(b))$, respectivamente. Entonces, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx + Q\,dy &= \int_a^b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\,dt = \phi(f(t), g(t))\Big]_a^b \\ &= \phi(f(b), g(b)) - \phi(f(a), g(a)) \\ &= \phi(B) - \phi(A).\end{aligned}$$

❑

Se deben hacer dos observaciones: el teorema es válido también para curvas suaves por tramos, pero la demostración anterior debería modificarse para considerar cada arco suave de la curva C. Además, el opuesto del teorema también es cierto. Así,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \text{ } \textit{es independiente de la trayectoria si, y sólo si, } P\,dx + Q\,dy \text{ } \textit{es un diferencial exacto.} \quad (1)$$

■ **Notación** Una integral de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$, que es independiente de la trayectoria entre los puntos extremos A y B, se escribe, usualmente, como

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy.$$

Ejemplo 2 Uso del teorema 3.8

Obsérvese que, en el ejemplo 1, $d(xy) = y\,dx + x\,dy$; esto es, $y\,dx + x\,dy$ es un diferencial exacto. Por lo tanto, $\int_C y\,dx + x\,dy$ es independiente de la trayectoria entre cualesquiera dos puntos A y B. Específicamente, si A y B son respectivamente (0, 0) y (1, 1), entonces, del teorema 3.8, se tiene que

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} y\,dx + x\,dy = \int_{(0,0)}^{(1,1)} d(xy) = xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)} = 1.$$

❑

Para poder plantear el siguiente resultado, se necesita considerar un tipo particular de región en el plano. Se dice que una región R del plano es **simplemente conexa** si:

- R es una región conexa; esto es, cualquier par de puntos de la región pueden unirse por medio de una curva suave por tramos que se encuentra completamente en R, y
- cualquier curva cerrada simple C comprendida enteramente dentro de R puede reducirse, o contraerse, a un punto sin salir de R.

La última afirmación significa que si C es cualquier curva cerrada simple que se encuentra completamente en R, entonces la región en el interior de C también está contenida enteramente en R. En términos llanos, una región simplemente conexa no tiene agujeros. En la figura 3.66*a*) se ilustra una región simplemente conexa. La curva cerrada simple representativa C podría encogerse hasta un punto sin salirse de la región. En la figura 3.66*b*) la región mostrada tiene tres agujeros; como la curva representativa C rodea a uno de los agujeros, no podría encogerse hasta un punto sin abandonar la región. Esta última región se dice que está **múltiplemente conexa**. Una región simplemente conexa se dice que está **abierta** si no contiene a los puntos de su frontera.

a)

b)

Figura 3.66 Región simplemente conexa *a*); región múltiple conexa *b*)

■ **Prueba para la independencia de la trayectoria en el plano** En vista de la afirmación dada en (1), los mismos criterios para determinar una diferencial exacta se convierten en los criterios, o prueba, para la independencia de la trayectoria en el plano xy.

TEOREMA 3.9 Prueba para la independencia de la trayectoria

Sean P y Q funciones con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta simplemente conexa. Entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria C si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

para todos los (x, y) de la región.

Ejemplo 3 Integral dependiente de la trayectoria

Demuestre que la integral $\int_C (x^2 - 2y^3)\,dx + (x + 5y)\,dy$ no es independiente de la trayectoria C.

Solución De $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, se tiene que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$, se deduce a partir del teorema 3.9 que la integral no es independiente de la trayectoria. En otras palabras, la expresión diferencial $(x^2 - 2y^3)\,dx + (x + 5y)\,dy$ no es un diferencial exacto. ❑

Ejemplo 4 Integral independiente de la trayectoria

Demuestre que $\int_C (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy$ es independiente de cualquier trayectoria C entre $(-1, 0)$ y $(3, 4)$. Calcúlela.

Solución Sustituyendo $P = y^2 - 6xy + 6$ y $Q = 2xy - 3x^2$ se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - 6x.$$

Como $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, la integral es independiente de la trayectoria y, por lo tanto, existe una función ϕ tal que $\partial\phi/\partial x = y^2 - 6xy + 6$ y $\partial\phi/\partial y = 2xy - 3x^2$. Para encontrar la función ϕ se integra $\partial\phi/\partial x$ o $\partial\phi/\partial y$. Integrando $\partial\phi/\partial x$ respecto a x se tiene $\phi = y^2x - 3x^2y + 6x + g(y)$, donde $g(y)$ es la "constante" de integración. Tomando la derivada parcial de esta última expresión respecto a y, e igualando el resultado a Q (esto es, $\partial\phi/\partial y$), se tiene entonces

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2yx - 3x^2 + g'(y) = 2yx - 3x^2,$$

lo que implica que $g'(y) = 0$ y por lo tanto $g(y) = C$, una constante. Pero como los diferenciales

$$d(y^2x - 3x^2y + 6x + C) \quad \text{y} \quad d(y^2x - 3x^2y + 6x)$$

producen ambos a $(y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dx$, se puede eliminar la constante C y tomar $\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x$. Del teorema fundamental para las integrales de línea se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{(-1,0)}^{(3,4)} (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy &= \int_{(-1,0)}^{(3,4)} d(xy^2 - 3x^2y + 6x) \\ &= (xy^2 - 3x^2y + 6x)\Big]_{(-1,0)}^{(3,4)} \\ &= (48 - 108 + 18) - (-6) = -36.\end{aligned}$$

■ **Solución alternativa** Puesto que la integral es independiente de la trayectoria, se integra sobre cualquier curva conveniente que conecte a los puntos dados. En particular, $y = x + 1$ puede ser esa curva. Utilizando x como parámetro se tiene entonces

$$\int_C (y^2 - 6xy + 6)\,dx + (2xy - 3x^2)\,dy$$

$$= \int_{-1}^{3} [(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6]\,dx + [2x(x+1) - 3x^2]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 2x + 7)\,dx = -36.$$ ❑

■ **Campos vectoriales conservativos** Si $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria C, se sabe que existe una función ϕ tal que

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy$$
$$= (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es un campo vectorial y $P = \partial\phi/\partial x$, $Q = \partial\phi/\partial y$. En otras palabras, el campo vectorial $\mathbf{F}$ es un gradiente de la función ϕ. Como $\mathbf{F} = \nabla\phi$, se dice que $\mathbf{F}$ es un **campo gradiente** y entonces se dice que la función ϕ es una **función potencial** para $\mathbf{F}$. En un campo de fuerza gradiente $\mathbf{F}$, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve desde la posición A hasta la posición B es el mismo para todas las trayectorias entre estos puntos. Es más, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es *cero*; véase el problema 29 de los ejercicios 3.9. Por esta razón, se dice que este campo de fuerza es **conservativo**. En un campo conservativo $\mathbf{F}$ es aplicable la *ley de conservación de la energía mecánica*: para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo,

$$\textit{energía cinética} + \textit{energía potencial} = \textit{constante}.$$

Véase el problema 31 de los ejercicios 3.9. En una región simplemente conexa, la hipótesis del teorema 3.9 implica que un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo gradiente (esto es, conservativo) si, y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ejemplo 5 Campo gradiente

Demuestre que el campo vectorial $\mathbf{F} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$ es un campo gradiente, y encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

Solución Sustituyendo $P = y^2 + 5$ y $Q = 2xy - 8$, se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Por lo tanto, $\mathbf{F}$ es un campo gradiente y, en consecuencia, existe una función potencial ϕ que satisface

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 + 5 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 8.$$

Procediendo como en el ejemplo 4, se encuentra que $\phi = xy^2 - 8y + 5x$.

Comprobación: $\nabla\phi = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = (y^2 + 5)\mathbf{i} + (2xy - 8)\mathbf{j}$. ❑

■ **Prueba para la independencia de la trayectoria en el espacio** Si C es una curva en el espacio, entonces una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria cuando la expresión diferencial $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ es un diferencial exacto. La analogía tridimensional del teorema 3.9 se plantea a continuación.

TEOREMA 3.10 Prueba para la independencia de la trayectoria

Sean P, Q y R funciones con primeras derivadas parciales continuas en una región abierta simplemente conexa del espacio. Entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es independiente de la trayectoria C si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Ejemplo 6 Integral independiente de la trayectoria

Demuestre que $\int_C (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$ es independiente de cualquier trayectoria C entre (1, 1, 1) y (2, 1, 4). Calcúlela.

Solución Con las siguientes sustituciones

$$P = y + yz, \quad Q = x + 3z^3 + xz, \quad R = 9yz^2 + xy - 1,$$

se observa que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Del teorema 3.10 se concluye que la integral es independiente de la trayectoria. Es más, $(y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$ es un diferencial exacto y, por lo tanto, existe una función $\phi(x, y, z)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R.$$

Integrando la primera de estas tres ecuaciones respecto a x se obtiene

$$\phi = xy + xyz + g(y, z).$$

La derivada de esta última expresión respecto a y debe ser entonces igual a Q:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz.$$

Así, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 3z^3$ y de esta forma $g = 3yz^3 + h(z)$.

En consecuencia, $\phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z)$. La derivada parcial de esta última expresión respecto a z debe ser igual a R:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1.$$

De aquí se tiene que $h'(z) = -1$ y $h(z) = -z + C$. Descartando a C, se escribe

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z. \tag{2}$$

Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz \\
&\quad = \int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} d(xy + xyz + 3yz^3 - z) \\
&\quad = (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big|_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194.
\end{aligned}$$

❑

En el ejemplo 6, el campo de fuerza definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + yz)\mathbf{i} + (x + 3z^3 + xz)\mathbf{j} + (9yz^2 + xy - 1)\mathbf{k}$$

es un campo conservativo o campo gradiente, ya que la demostración de que la forma diferencial $(y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$ es exacta y también prueba que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es la función potencial dada en (2). En general, del teorema 3.10 y de (1) de la sección 3.7, se concluye que, en una región simplemente conexa del espacio, un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es conservativo si, y sólo si, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (esto es, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$).

Comentarios

Una fuerza friccionante como la resistencia del aire es *no conservativa*. Las fuerzas no conservativas son *disipadoras*, puesto que su acción reduce la energía cinética sin un incremento correspondiente en la energía potencial. En otras palabras, si el trabajo realizado $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende de la trayectoria, entonces $\mathbf{F}$ es no conservativa.

EJERCICIOS 3.9

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 10, demuestre que la integral proporcionada es independiente de la trayectoria. Calcúlela de dos maneras: *a*) encuentre una función ϕ tal que $d\phi = P\,dx + Q\,dy$, y *b*) integre a lo largo de alguna trayectoria conveniente entre los puntos.

1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2\,dx + y^2\,dy$
2. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + x^2\,dy$
3. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$
4. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi/2,0)} \cos x \cos y\,dx + (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$
5. $\displaystyle\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$ sobre cualquier trayectoria que no cruce al eje x.
6. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre cualquier trayectoria que no pase por el origen.
7. $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(3,6)} (2y^2x - 3)\,dx + (2yx^2 + 4)\,dy$
8. $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(0,0)} (5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy$
9. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,8)} (y^3 + 3x^2y)\,dx + (x^3 + 3y^2x + 1)\,dy$
10. $\displaystyle\int_{(-2,0)}^{(1,0)} (2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\,dy$

En los problemas del 11 al 16, determine si el campo vectorial dado es un campo gradiente. Si es así, encuentre una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$
12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \operatorname{sen} xy^2\mathbf{j}$
14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$
15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$
16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

En los problemas 17 y 18, encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$ a lo largo de la curva indicada.

17.

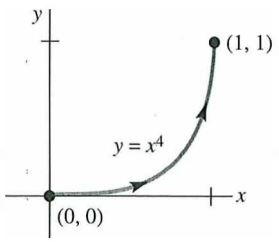


Figura 3.67 Curva para el problema 17

18.

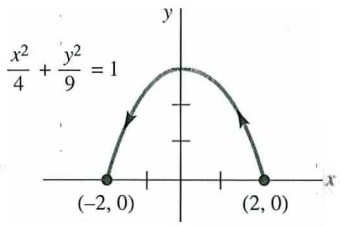


Figura 3.68 Curva para el problema 18

En los problemas del 19 al 24, demuestre que la integral proporcionada es independiente de la trayectoria; calcúlela.

19. $\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

20. $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$

21. $\int_{(1,0,0)}^{(2,p/2,1)} (2x \operatorname{sen} y + e^{3z})\,dx + x^2 \cos y\,dy + (3xe^{3z} + 5)\,dz$

22. $\int_{(1,2,1)}^{(3,4,1)} (2x + 1)\,dx + 3y^2\,dy + \frac{1}{z}\,dz$

23. $\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} e^{2z}\,dx + 3y^2\,dy + 2xe^{2z}\,dz$

24. $\int_{(-2,3,1)}^{(0,0,0)} 2xz\,dx + 2yz\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$

En los problemas 25 y 26, calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

25. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - yz \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + (x + z \cos x)\mathbf{j} + y \cos x\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (1 + \cos t)^2\mathbf{j} + 4 \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi/2$

26. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2 - e^z)\mathbf{i} + (2y - 1)\mathbf{j} + (2 - xe^z)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $(-1, 1, -1)$ a $(2, 4, 8)$

27. La ley cuadrática inversa de la atracción gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 está dada por $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\,\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

28. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xy^3z\,\mathbf{i} + 12x^2y^2z\,\mathbf{j} + 4x^2y^3\,\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ desde $(2, 0, 0)$ hasta $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. Desde $(2, 0, 0)$ hasta $(0, 2, \pi/2)$. [*Sugerencia:* Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo.]

29. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, demuestre que el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria simple cerrada es cero.

30. Una partícula en el plano es atraída hacia el origen con una fuerza $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^n\mathbf{r}$, donde n es un entero positivo y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición de la partícula. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

31. Supóngase que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo con función potencial ϕ. En física, a la función $p = -\phi$ se le denomina **energía potencial**. Puesto que $\mathbf{F} = -\nabla p$, la segunda ley de Newton se convierte en

$$m\mathbf{r}'' = -\nabla p \quad \text{o} \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}.$$

Integrando $m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla p \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ respecto a t, derive la ley de la conservación de energía mecánica: $\frac{1}{2}mv^2 + p$ = constante. [*Sugerencia:* Véase el problema 39 de los ejercicios 3.8.]

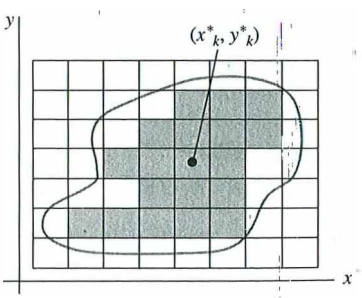
32. Supóngase que C es una curva suave entre los puntos A (en $t = a$) y B (en $t = b$) y que p es la energía potencial definida en el problema 31. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo y $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, demuestre que $p(B) + K(B) = p(A) + K(A)$.

3.10 Integrales dobles

■ **Introducción** En la sección 3.8 se plantean los cinco pasos que llevan a la definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$. A continuación, se plantean los pasos análogos que conducen al concepto de *integral definida bidimensional*, conocida simplemente como la **integral doble** de una función f de dos variables.

$z = f(x, y)$

1. Sea f una función definida en una región cerrada y acotada R.
2. Por medio de una retícula de líneas verticales y horizontales paralelas a los ejes coordenados, se hace una partición P de R compuesta de n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k que se encuentran completamente en R.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición o la longitud de la diagonal más larga de R_k.
4. Elíjase un punto (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k.
5. Genérese la suma $\sum_{k-1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k$.



Entonces, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.10 La integral doble

Sea f una función de dos variables definida en una región cerrada R. Entonces, la **integral doble de f sobre R** viene dada por

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k. \tag{1}$$

Integrabilidad Si existe el límite en (1), se dice que f es **integrable** sobre R, y que R es la **región de integración**. Cuando f es continua en R, entonces f es necesariamente integrable sobre R.

Área Cuando $f(x, y) = 1$ en R, entonces $\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ simplemente proporciona el **área** A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \tag{2}$$

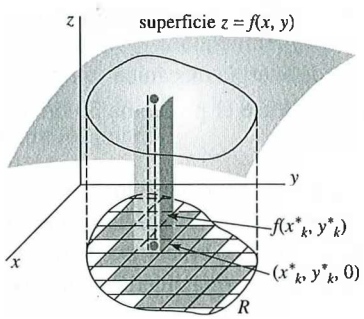


Figura 3.69 Volumen bajo una superficie

Volumen Si $f(x, y) \geq 0$ en R, entonces, como se muestra en la figura 3.69, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\, \Delta A_k$ se interpreta como el volumen de un prisma rectangular de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y base de área ΔA_k. La suma de volúmenes es una aproximación al **volumen** V del sólido *por encima* de la región R y *por debajo* de la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \to 0$, si existe, da el volumen exacto de este sólido; esto es, si f no es negativo en R, entonces

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA. \tag{3}$$

Propiedades La integral doble posee las siguientes propiedades:

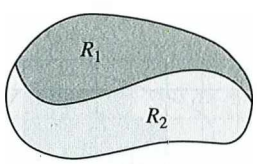
TEOREMA 3.11 Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones de dos variables que son integrables sobre una región R. Entonces

i) $\iint_R kf(x, y)\, dA = k \iint_R f(x, y)\, dA$, donde k es cualquier constante

ii) $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

iii) $\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$, donde R_1 y R_2 son subregiones de R que no se traslapan, y $R = R_1 \cup R_2$



$R = R_1 \cup R_2$

Figura 3.70 R es la unión de dos regiones

El inciso *iii)* del teorema 3.11 es el equivalente bidimensional de $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$. La figura 3.70 ilustra la división de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. R_1 y R_2 no tienen puntos en común, excepto posiblemente en su frontera común. Asimismo, el teorema 3.11*iii)* se extiende a cualquier número finito de subregiones no traslapadas cuya unión sea R.

■ **Regiones tipo I y II** La región mostrada en la figura 3.71*a*),

$$R\colon a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x),$$

donde las funciones de frontera g_1 y g_2 son continuas, se denomina una **región tipo I**. En la figura 3.71*b*), la región

$$R\colon c \le y \le d, \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina una **región tipo II**.

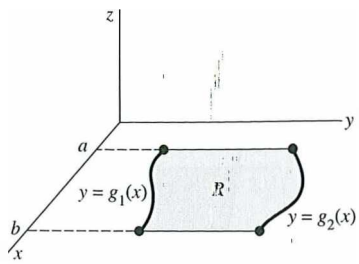
■ **Integrales iteradas** Como la integral parcial $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$ es una función de x únicamente, se puede integrar a su vez la función resultante respecto a x. Si f es continua en una región tipo I, la **integral iterada** de f sobre la región se define como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{4}$$

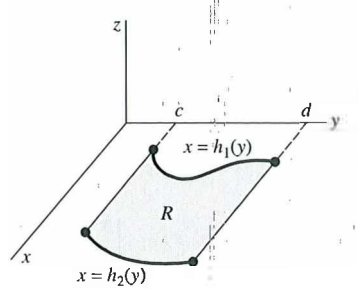
La idea básica en (4) es llevar a cabo *integraciones sucesivas*. La integral parcial proporciona una función de x, que se integra en forma usual desde $x = a$ hasta $x = b$. El resultado final de ambas integraciones es un número real. De manera similar, se define la integral iterada de una función continua f sobre una región tipo II como

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{5}$$

■ **Cálculo de integrales dobles** Las integrales iteradas proporcionan los medios para calcular una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ sobre una región tipo I o tipo II, o bien una región que se exprese como la unión de un número finito de estas regiones.



a) Región tipo I



b) Región tipo II

Figura 3.71 Regiones de integración

TEOREMA 3.12 Cálculo de integrales dobles

Sea f una función continua en una región R.

i) Si R es tipo I, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{6}$$

ii) Si R es tipo II, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{7}$$

El teorema 3.12, para la integral doble, es análogo al teorema fundamental del cálculo. Aunque el teorema 3.12 es difícil de demostrar, se puede captar intuitivamente su significado considerando volúmenes. Sea R una región tipo I y $z = f(x, y)$ una función continua y no negativa en R. El área A del plano vertical, como se muestra en la figura 3.72, es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$, en el plano x = constante y, por ende, viene dada por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Sumando todas estas áreas desde $x = a$ hasta $x = b$, se tiene el volumen V del sólido por encima de R y por debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

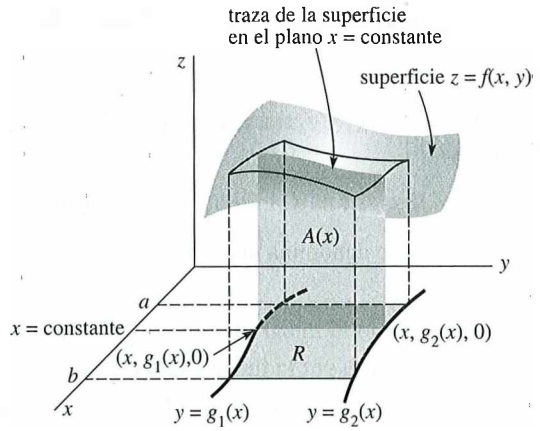


Figura 3.72 Interpretación geométrica de (6)

Pero, como se ha visto en (3), este volumen también viene dado por la integral doble

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

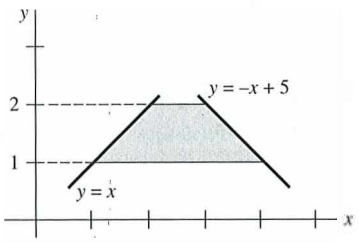


Figura 3.73 Región de integración para el ejemplo 1

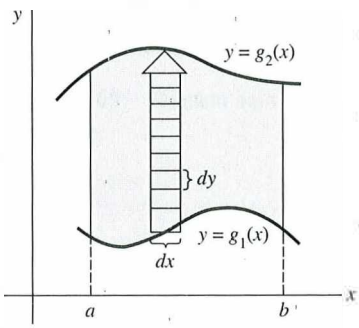
Ejemplo 1 Cálculo de una integral doble

Calcule la integral doble $\iint_R e^{x+3y}\, dA$ sobre la región limitada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$.

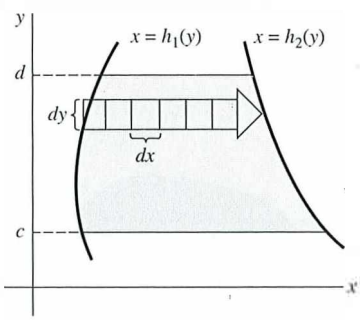
Solución Como se ve en la figura 3.73, la región es tipo II; por lo tanto, de acuerdo con (7), en primer lugar se integra respecto a x desde la frontera izquierda $x = y$ hasta la frontera derecha $x = 5 - y$:

$$\begin{aligned}\iint_R e^{x+3y}\, dA &= \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\, dx\, dy \\ &= \int_1^2 e^{x+3y}\Big]_y^{5-y} dy \\ &= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})\, dy = \left[\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2771.64.\end{aligned}$$

❑



a) Región tipo I



b) Región tipo II

Figura 3.74 *a*) Suma en la dirección y; *b*) suma en la dirección x

Para reducir una integral doble a una integral iterada utilizando límites de integración correctos, es útil visualizar la integral doble como un proceso de suma doble, tal como se sugiere en la argumentación anterior. En una región tipo I, la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ es primero una suma en la dirección y. Gráficamente, esto se indica con la flecha vertical de la figura 3.74*a*); un rectángulo típico del cuerpo de la flecha tiene área $dy\, dx$. El dy antes que el dx significa que los "volúmenes" $f(x, y)\, dy\, dx$ de prismas construidos sobre los rectángulos se suman verticalmente respecto a y desde la curva g_1 que los limita inferiormente hasta la curva g_2 que los limita por encima. El dx que sigue a dy implica que el resultado de cada suma vertical se suma después horizontalmente respecto a x desde la izquierda ($x = a$) hasta la derecha ($x = b$). Se pueden hacer observaciones similares para las integrales dobles sobre regiones tipo II; véase la figura 3.74*b*). Recuérdese de (2) que, cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ proporciona el área de la región. Entonces, la figura 3.74*a*) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ suma las paredes rectangulares verticalmente y después de forma horizontal, mientras que la figura 3.74*b*) muestra que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$ suma las áreas rectangulares horizontalmente y después de forma vertical.

■ **Invirtiendo el orden de integración** Un problema puede simplificarse cuando el orden de integración se **cambia** o se **invierte**. Asimismo, algunas integrales iteradas que

parecerían imposibles de calcular utilizando cierto orden de integración pueden a veces calcularse utilizando el orden inverso de integración.

Ejemplo 2 Invirtiendo el orden de integración

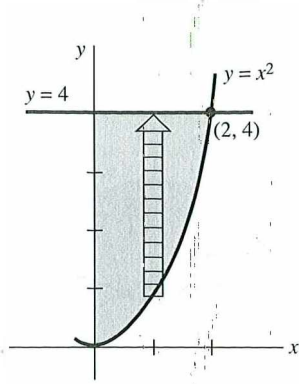
Calcule $\iint_R xe^{y^3}\,dA$ sobre la región R del primer cuadrante que se encuentra limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

Solución Cuando la región se considera de tipo I, se tiene de la figura 3.75*a*), $0 \le x \le 2$ y $x^2 \le y \le 4$; entonces

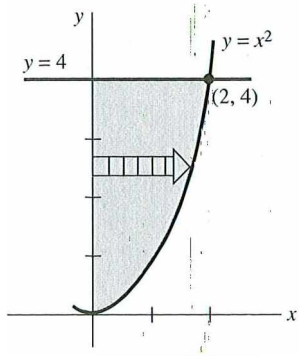
$$\iint_R xe^{y^3}dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^3}\,dy\,dx.$$

Aquí la dificultad radica en que la integral parcial $\int_{x^2}^4 xe^{y^3}\,dy$ no puede calcularse, puesto que e^{y^3} no tiene una antiderivada elemental respecto a y. Sin embargo, como se ve en la figura 3.75*b*), la misma región se puede interpretar como tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$. Por lo tanto, de (7)

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{y^3}dA &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^3}\,dx\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{x^2}{2}e^{y^3}\Big]_0^{\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}ye^{y^3}dy = \frac{1}{4}e^{y^3}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1).\end{aligned}$$ ❑



a) Región tipo I



b) Región tipo II

Figura 3.75 Invirtiendo el orden de integración en el ejemplo 2

■ **Láminas de densidad variable (centro de masa)** Si ρ es una densidad constante (masa por unidad de área), entonces la masa de la lámina que se encuentra en una región limitada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las líneas $x = a$ y $x = b$ es

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\,dx. \tag{8}$$

Si una lámina correspondiente a una región R tiene una *densidad variable* $\rho(x, y)$, donde ρ no es negativa y es continua en R, análogamente a (8) se puede definir su **masa** m a través de la integral doble

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta A_k = \iint_R \rho(x, y)\,dA. \tag{9}$$

Las coordenadas del **centro de masa** de la lámina son entonces

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{10}$$

donde

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\,dA \tag{11}$$

son los **momentos** de la lámina respecto a los ejes y y x, respectivamente. El centro de masa es el punto donde se considera que está concentrada toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ es constante, el centro de masa se denomina **centroide** de la lámina.

Ejemplo 3 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Encuentre su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

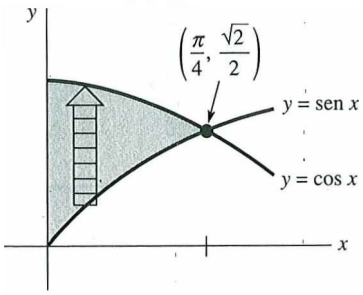


Figura 3.76 Región del ejemplo 3

Solución De la figura 3.76 se observa que

$$m = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{y^2}{2}\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

Ahora,

$$M_y = \iint_R xy\,dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} xy\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}xy^2\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x \cos 2x\,dx \leftarrow \text{integre por partes}$$

$$= \left[\frac{1}{4}x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi - 2}{16}.$$

De forma similar,

$$M_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/4} \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y^2\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} (\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} [\cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/4} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{18}.$$

Por lo tanto, de (10)

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(\pi - 2)/16}{1/4} \approx 0.29, \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(5\sqrt{2} - 4)/18)}{1/4} \approx 0.68.$$

Así, el centro de masa tiene las coordenadas (0.29, 0.68), aproximadamente. ❑

■ **Momentos de inercia** Las integrales M_x y M_y de (11) se denominan también **primeros momentos** de una lámina respecto los ejes x y y, respectivamente. Los llamados **segundos momentos** de una lámina o **momentos de inercia** respecto a los ejes x y y son, a su vez, definidos por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)\,dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)\,dA. \tag{12}$$

Un momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento traslacional, la energía cinética viene dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es masa y v es velocidad

lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que rota a una distancia r de un eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I = mr^2$ es su momento de inercia respecto al eje de rotación y ω es su velocidad angular.

Ejemplo 4 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia respecto al eje y del disco homogéneo delgado de masa m que se muestra en la figura 3.77.

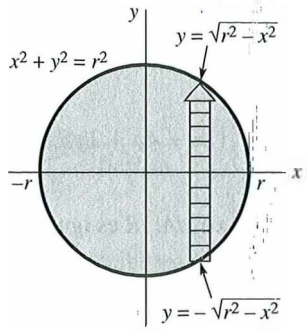


Figura 3.77 Disco del ejemplo 4

Solución Como el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por lo tanto, de (12)

$$I_y = \iint_R x^2\left(\frac{m}{\pi r^2}\right) dA = \frac{m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2\, dy\, dx$$

$$= \frac{2m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica}$$

$$= \frac{2mr^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{mr^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}mr^2. \qquad \square$$

■ **Radio de giro** El **radio de giro** de una lámina de masa m y momento de inercia I, respecto a un eje, se define como

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \tag{13}$$

Puesto que (13) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial que la lámina, considerada una masa puntual, puede rotar respecto al eje sin cambiar la inercia rotacional del cuerpo. En el ejemplo 4, el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{(mr^2/4)/m} = r/2$.

EJERCICIOS 3.10 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 8, calcule la integral parcial indicada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} (6xy - 5e^y)\, dx$
2. $\displaystyle\int_{1}^{2} \tan xy\, dy$
3. $\displaystyle\int_{1}^{3x} x^3e^{xy}\, dy$
4. $\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\, dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{2x} \frac{xy}{x^2 + y^2}\, dy$
6. $\displaystyle\int_{x^3}^{x} e^{2y/x}\, dy$
7. $\displaystyle\int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y)\, dx$
8. $\displaystyle\int_{\sqrt{y}}^{1} y \ln x\, dx$

En los problemas del 9 al 12, bosqueje la región de integración para la integral iterada indicada.

9. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{2x+1} f(x, y)\, dy\, dx$
10. $\displaystyle\int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy$
11. $\displaystyle\int_{-1}^{3}\int_{0}^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$
12. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{-x^2}^{x^2+1} f(x, y)\, dy\, dx$

En los problemas del 13 al 22, calcule la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones indicadas. Elíjase el orden de integración más conveniente.

13. $\iint_R x^3y^2\,dA;\ y = x,\ y = 0,\ x = 1$

14. $\iint_R (x + 1)\,dA;\ y = x,\ x + y = 4,\ x = 0$

15. $\iint_R (2x + 4y + 1)\,dA;\ y = x^2,\ y = x^3$

16. $\iint_R xe^y\,dA;$ R es igual que en el problema 13

17. $\iint_R 2xy\,dA;\ y = x^3,\ y = 8,\ x = 0$

18. $\iint_R \frac{x}{\sqrt{y}}\,dA;\ y = x^2 + 1,\ y = 3 - x^2$

19. $\iint_R \frac{y}{1 + xy}\,dA;\ y = 0,\ y = 1,\ x = 0,\ x = 1$

20. $\iint_R \operatorname{sen}\frac{\pi x}{y}\,dA;\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1,\ y = 2$

21. $\iint_R \sqrt{x^2 + 1}\,dA;\ x = y,\ x = -y,\ x = \sqrt{3}$

22. $\iint_R x\,dA;\ y = \tan^{-1}x,\ y = 0,\ x = 1$

23. Considere el sólido acotado por las gráficas $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - y$ y $z = 0$ mostrado en la figura 3.78. Escoja y calcule la integral correcta que representa al volumen V del sólido.

a) $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

b) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

c) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dx\,dy$

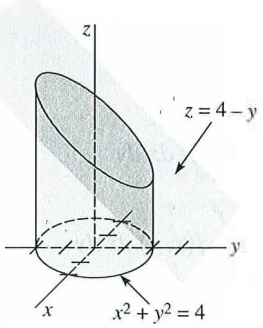


Figura 3.78 Sólido del problema 23

24. Considérese el sólido acotado por las gráficas $x^2 + y^2 = 4$ y $y^2 + z^2 = 4$. En la figura 3.79 se muestra un octavo del sólido. Escoja y calcule la integral correcta que representa al volumen V del sólido.

a) $4\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx$

b) $8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y^2)^{1/2}\,dx\,dy$

c) $8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2)^{1/2}\,dy\,dx$

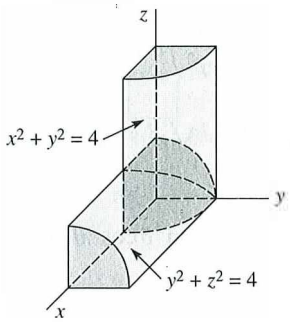


Figura 3.79 Sólido para el problema 24

En los problemas del 25 al 34, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

25. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
26. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
27. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
28. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$
29. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
30. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante
31. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$
32. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$
33. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$
34. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

En los problemas del 35 al 40, calcule la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

35. $\int_0^1 \int_x^1 x^2\sqrt{1 + y^4}\,dy\,dx$

37. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,dy\,dx$

39. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1 + y^4}\,dy\,dx$

40. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1}\,dx\,dy$

En los problemas del 41 al 50, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

41. $x = 0,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 3;\ \rho(x, y) = xy$

42. $x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 4;\ \rho(x, y) = x^2$

43. $y = x,\ x + y = 6,\ y = 0;\ \rho(x, y) = 2y$

44. $y = |x|,\ y = 3;\ \rho(x, y) = x^2 + y^2$

45. $y = x^2,\ x = 1,\ y = 0;\ \rho(x, y) = x + y$

46. $x = y^2,\ x = 4;\ \rho(x, y) = y + 5$

47. $y = 1 - x^2,\ y = 0$; la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al eje x.

48. $y = \operatorname{sen} x,\ 0 \le x \le \pi,\ y = 0$; la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al eje y.

49. $y = e^x,\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;\ \rho(x, y) = y^3$

50. $y = \sqrt{9 - x^2},\ y = 0;\ \rho(x, y) = x^2$

En los problemas del 51 al 54, encuentre el momento de inercia respecto al eje x de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

51. $x = y - y^2,\ x = 0;\ \rho(x, y) = 2x$

52. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$

53. $y = \cos x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante)

54. $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

En los problemas del 55 al 58, encuentre el momento de inercia respecto al eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

55. $y = x^2,\ x = 0,\ y = 4$, primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

56. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$

57. $y = x,\ y = 0,\ y = 1,\ x = 3;\ \rho(x, y) = 4x + 3y$

58. Tanto R como la densidad son iguales que en el problema 47.

En los problemas 59 y 60, encuentre el radio de giro respecto al eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad señaladas.

59. $x = \sqrt{a^2 - y^2},\ x = 0;\ \rho(x, y) = x$; eje y

60. $x + y = a,\ a > 0,\ x = 0,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante); eje x

61. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Si su densidad es $\rho(x, y) = 1$, encuentre:

    a) el momento de inercia respecto al eje x de la lámina,

    b) el momento de inercia respecto al eje y de la lámina,

    c) el radio de giro respecto al eje x [*Sugerencia:* el área de la elipse es πab], y

    d) el radio de giro respecto al eje y.

62. Una sección transversal de un plano aerodinámico experimental es la lámina mostrada en la figura 3.80. El arco ABC es elíptico, mientras que los dos arcos AD y CD son parabólicos. Encuentre el momento de inercia respecto al eje x de la lámina, asumiendo la hipótesis de que la densidad es $\rho(x, y) = 1$.

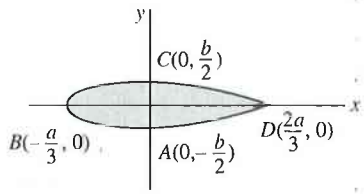


Figura 3.80 Plano aerodinámico del problema 62

El **momento polar de inercia** de una lámina respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA = I_x + I_y.$$

En los problemas del 63 al 66, encuentre el momento polar de inercia de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

63. $x + y = a,\ a > 0,\ x = 0,\ y = 0;\ \rho(x, y) = k$ (constante)

64. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ \rho(x, y) = x^2$ [*Sugerencia:* Véase problemas 52 y 56.]

65. $x = y^2 + 2,\ x = 6 - y^2$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

66. $y = x,\ y = 0,\ y = 3,\ x = 4;\ \rho(x, y) = k$ (constante)

67. Encuentre el radio de giro del problema 63.

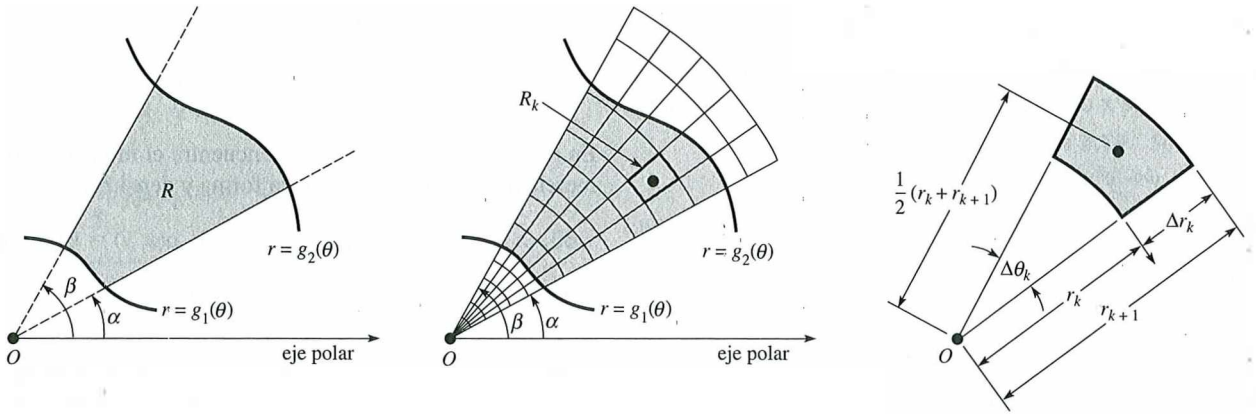
68. Demuestre que el momento polar de inercia respecto al centro de una placa rectangular homogénea delgada de masa m, ancho w y longitud l es $I_0 = m(l^2 + w^2)/12$.

3.11 Integrales dobles en coordenadas polares

Introducción Una integral doble, que parecería difícil o incluso imposible de calcular en coordenadas rectangulares xy, puede hacerse más manipulable cuando se expresa en un sistema coordenado diferente. En esta sección se examinan las integrales dobles en coordenadas polares $r\theta$.

Rectángulos polares Supóngase que R es una región del plano acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$; y que f es una función de r y θ, continua en R. Para definir la integral doble de f sobre R, se utilizan ángulos y círculos concéntricos para dividir la región en una malla de **rectángulos polares** o subregiones R_k. Véase las figuras 3.81*a*) y *b*). El área ΔA_k de una subregión típica R_k, mostrada en la figura 3.81*c*), es la diferencia entre las áreas de dos sectores circulares: $\Delta A_k = \frac{1}{2}r_{k+1}^2\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k$. Ahora, ΔA_k se escribe como

$$\Delta A_k = \tfrac{1}{2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)\Delta\theta_k = \tfrac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1} - r_k)\Delta\theta_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k$$



a) la región R está acotada por gráficas polares y rayos

b) subregión R_k

c) ampliación de R_k

Figura 3.81 R_k en *b*) y *c*) se denomina rectángulo polar

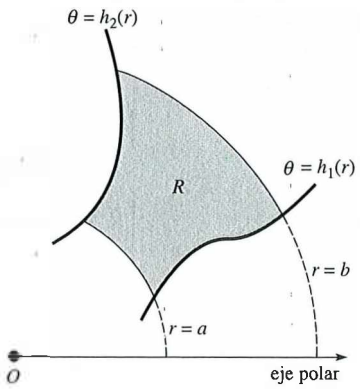


Figura 3.82 R está acotada por gráficas polares y arcos circulares

donde $\Delta r_k = (r_{k+1} - r_k)$ y $r_k^* = \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)$ denota el radio promedio. Eligiendo (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k, la integral doble de f sobre R es

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)r_k^*\,\Delta r_k\,\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\,dA.$$

La integral doble se calcula entonces por medio de la integral iterada:

$$\iint_R f(r, \theta)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\,r\,dr\,d\theta. \tag{1}$$

Por otro lado, si la región R viene dada como en la figura 3.82, la integral doble de f sobre R es entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r, \theta)\,r\,d\theta\,dr. \tag{2}$$

Ejemplo 1 Centro de masa

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región acotada por una hoja de la rosa $r = 2$ sen 2θ del primer cuadrante, si la densidad en un punto P de la lámina es directamente proporcional a la distancia del polo.

Solución Haciendo variar θ desde 0 hasta $\pi/2$, se obtiene la gráfica de la figura 3.83. Ahora, $d(O, P) = |r|$. Por lo tanto, $\rho(r, \theta) = k|r|$, donde k es una constante de proporcionalidad. De (9) de la sección 3.10, se tiene

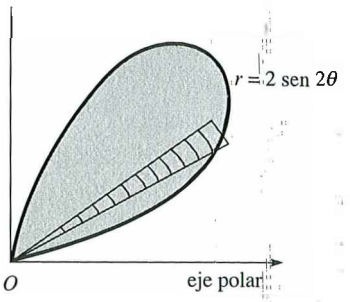


Figura 3.83 Lámina del ejemplo 1

$$
\begin{aligned}
m &= \iint_R k|r|\,dA \\
&= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}2\theta} (r)r\,dr\,d\theta \\
&= k\int_0^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\Big]_0^{2\operatorname{sen}2\theta} d\theta \\
&= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 2\theta\,d\theta \leftarrow \operatorname{sen}^2 2\theta = 1 - \cos^2 2\theta \\
&= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)\operatorname{sen}2\theta\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}k\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}k.
\end{aligned}
$$

Como $x = r\cos\theta$ se escribe $M_y = k\iint_R x|r|\,dA$ como

$$
\begin{aligned}
M_y &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}2\theta} r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\
&= k\int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\cos\theta\Big]_0^{2\operatorname{sen}2\theta} d\theta \\
&= 4k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 2\theta\cos\theta\,d\theta \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\
&= 4k\int_0^{\pi/2} 16\operatorname{sen}^4\theta\cos^4\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= 64k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta\cos^5\theta\,d\theta \\
&= 64k\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta \\
&= 64k\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^4\theta - 2\operatorname{sen}^6\theta + \operatorname{sen}^8\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= 64k\left[\frac{1}{5}\operatorname{sen}^5\theta - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^7\theta + \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{512}{315}k.
\end{aligned}
$$

De forma similar, sabiendo que $x = r\operatorname{sen}\theta$, se obtiene*

$$
M_x = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\operatorname{sen}2\theta} r^2\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = \frac{512}{315}k.
$$

*Se podría haber argumentado que, como la lámina y la función de densidad son simétricas respecto al ángulo $\theta = \pi/4$, entonces $\bar{x} = \bar{y}$ y, por lo tanto, $M_x = M_y$.

Aquí las coordenadas rectangulares del centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{512k/315}{16k/9} = \frac{32}{35}.$$ ❑

Cambio de variables: de coordenadas rectangulares a coordenadas polares En ocasiones una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$, que pareciera difícil o incluso imposible de calcular utilizando coordenadas rectangulares, puede calcularse fácilmente haciendo un cambio de variables. Si se considera que f es continua en la región R, y si R se describe en coordenadas polares como $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) r\, dr\, d\theta. \tag{3}$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando f contiene la expresión $x^2 + y^2$ ya que, en coordenadas polares, se escribe

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

Ejemplo 2 Cambio de una integral a coordenadas polares

Utilice coordenadas polares para calcular

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

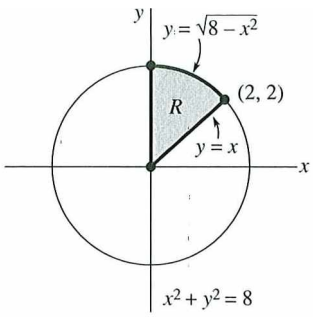


Figura 3.84 Región R del ejemplo 2

Solución La región R de integración correspondiente a $x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$, $0 \le x \le 2$, se bosqueja en la figura 3.84. Como $x^2 + y^2 = r^2$, la descripción polar del círculo $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$. Por lo tanto, en coordenadas polares, la región R viene dada por $0 \le r \le \sqrt{8}$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. Con $1/(5 + x^2 + y^2) = 1/(5 + r^2)$, la integral original se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{2r\, dr}{5 + r^2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(5 + r^2) \Big]_0^{\sqrt{8}}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} (\ln 13 - \ln 5) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \ln \frac{13}{5}.
\end{aligned}$$ ❑

Ejemplo 3 Volumen

Encuentre el volumen de un sólido que se halla bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y sobre la región acotada por la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$.

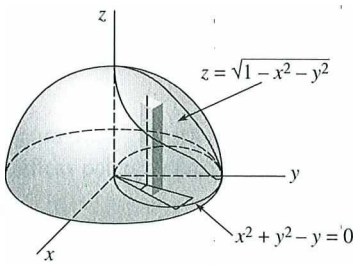


Figura 3.85 Sólido del ejemplo 3

Solución De la figura 3.85, se observa que $V = \iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA$. En coordenadas polares, las ecuaciones del hemisferio y del círculo se convierten, respectivamente, en $z = \sqrt{1 - r^2}$ y $r = \text{sen}\,\theta$. Ahora, por simetría, se tiene que

$$\begin{aligned}
V &= \iint_R \sqrt{1 - r^2}\, dA = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{sen}\,\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (1 - r^2)^{3/2} \right]_0^{\text{sen}\,\theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (\cos^2\theta)^{3/2}]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - \cos^3\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} [1 - (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left[\theta - \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9} \approx 0.60 \text{ unidades cúbicas.}$$ ❑

Área Obsérvese que en (1) si $f(r, \theta) = 1$, entonces el **área** de la región R en la figura 3.81*a*) viene dada por

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\, dr\, d\theta.$$

La misma observación es válida para (2) y la figura 3.82, cuando $f(r, \theta) = 1$.

Comentarios

Se invita al lector a reexaminar el ejemplo 3. La gráfica del círculo $r = \operatorname{sen}\theta$ se obtiene variando θ de 0 a π. Sin embargo, al calcular la integración iterada

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta$$

se observa que el resultado, *incorrecto*, es $\pi/3$. ¿Qué está mal?

EJERCICIOS 3.11 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 4, encuentre el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares indicadas utilizando una integral doble en coordenadas polares.

1. $r = 3 + 3\operatorname{sen}\theta$
2. $r = 2 + \cos\theta$
3. $r = 2\operatorname{sen}\theta$, $r = 1$, área común
4. $r = 8\operatorname{sen} 4\theta$, un pétalo

En los problemas del 5 al 10, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$
6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$
8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$
9. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$, primer octante
10. $r = \cos\theta$, $z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 0$

En los problemas del 11 al 16, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

11. $r = 1$, $r = 3$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)
12. $r = \cos\theta$; la densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el polo.
13. $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$, $x = 3$; $\rho(r, \theta) = r^2$
14. $r = 4\cos 2\theta$, pétalo en el eje polar; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

15. Afuera de $r = 2$ y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primer cuadrante; la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia al polo.

16. $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas del 17 al 20, encuentre el momento de inercia indicado para la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

17. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x

18. $r = a$; $\rho(r, \theta) = \dfrac{1}{1 + r^4}$; I_x

19. Afuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a\cos\theta$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cubo de la distancia al polo; I_y

20. Afuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y

En los problemas del 21 al 24, encuentre el **momento polar de inercia** $I_0 = \iint_R r^2\rho(r, \theta)\,dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

21. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante) [*Sugerencia:* Utilice el problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.]

22. $r = \theta$, $0 \le \theta \le \pi$, $y = 0$; la densidad en un punto P es proporcional a la distancia del polo.

23. $r\theta = 1$, $\frac{1}{3} \le \theta \le 1$, $r = 1$, $r = 3$, $y = 0$; la densidad en un punto P es inversamente proporcional a su distancia al polo [*Sugerencia:* Integre primero con respecto a θ.]

24. $r = 2a\cos\theta$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas del 25 al 32, calcule la integral iterada que se proporciona cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

27. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

28. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{\pi-x^2}} \text{sen}\,(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

29. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y)\,dy\,dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

33. El tanque de hidrógeno líquido del transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto, con una cubierta semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndrica del tanque es de 4.2 m. Encuentre el volumen del tanque mostrado en la figura 3.86.

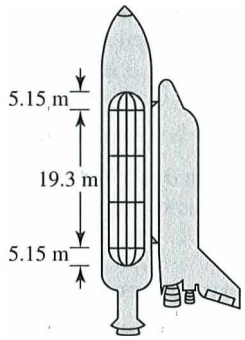


Figura 3.86 Tanque de combustible del problema 33

34. Calcule $\iint_R (x + y)\,dA$ de la región mostrada en la figura 3.87.

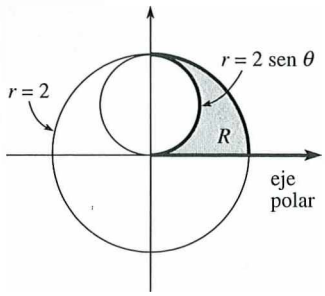


Figura 3.87 Región R para el problema 34

35. La integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es importante en teoría de probabilidad, estadística y otras áreas de la matemática aplicada. Si I denota a esta integral, entonces

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad \text{e} \quad I = \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

y en consecuencia

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Utilice coordenadas polares para calcular esta última integral y encuentre el valor de I.

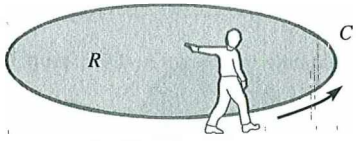
3.12 Teorema de Green

■ **Introducción** Unos de los teoremas más importantes en el cálculo integral vectorial relaciona la integral de línea alrededor de una curva por tramos cerrada C con la integral doble sobre la región R acotada por dicha curva.

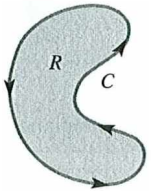
■ **Integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples** La **dirección positiva** alrededor de una curva cerrada simple C es aquella en la cual se debe mover un punto de la curva, o la dirección en la que una persona debe caminar sobre C, de forma tal que la región R acotada por C se mantenga a la izquierda; véase la figura 3.88*a*). En palabras simples, las direcciones *positiva* y *negativa* corresponden al *sentido contrario al de las manecillas del reloj* y al *sentido de las manecillas del reloj*, respectivamente, como se muestra en las figuras 3.88*b*) y 3.88*c*). Las integrales de línea sobre curvas cerradas simples se escriben como sigue

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy, \quad \oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \quad \oint_C F(x, y)\,ds, \tag{1}$$

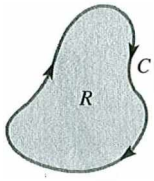
etc. Los símbolos $\oint_C$ y $\oint_C$ se refieren, respectivamente, a integraciones en las direcciones positiva y negativa.



a) Dirección positiva



b) Dirección positiva



c) Dirección negativa

Figura 3.88 Direcciones sobre una curva C

TEOREMA 3.13 Teorema de Green en el plano*

Supóngase que C es una curva cerrada simple suave por tramos que acota a una región R. Si P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son funciones continuas en R, entonces

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

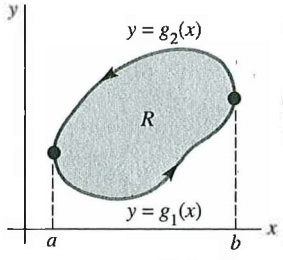
Demostración parcial La siguiente demostración de (1) es válida sólo para una región R que es simultáneamente del tipo I y tipo II:

$$R\text{: } g_1(x) \le y \le g_2(x), \qquad a \le x \le b$$

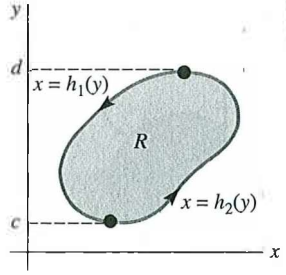
$$R\text{: } h_1(y) \le x \le h_2(y), \qquad c \le y \le d.$$

Utilizando la figura 3.89*a*), se tiene

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx \\ &= \oint_C P(x, y)\,dx. \end{aligned} \tag{2}$$



a) R como región tipo I



b) R como región tipo II

Figura 3.89 Región R del teorema 3.13

*Denominado así por George Green (1793-1841), matemático y físico inglés. Las palabras *en el plano* sugieren que el teorema se generaliza al espacio tridimensional, lo cual es cierto como se ve más adelante.

De forma similar, a partir de la figura 3.89*b*) se tiene,

$$\begin{aligned}\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy \\ &= \oint_C Q(x, y)\,dy.\end{aligned} \tag{3}$$

Sumando los resultados de (2) y (3) se obtiene (1). ❑

El teorema es aplicable a regiones más complicadas, tales como las mostradas en la figura 3.90, aunque la demostración anterior no sea válida para ellas. La demostración consistiría en descomponer R en un número finito de subregiones a las cuales se puede aplicar (1) y sumar así los resultados.

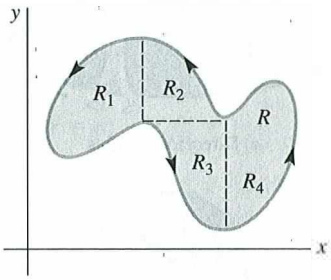


Figura 3.90 Subregiones de R

Ejemplo 1 Uso del teorema de Green

Calcule $\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante que se encuentra acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$.

Solución Si $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = 2y - x$, entonces $\partial P/\partial y = -2y$ y $\partial Q/\partial x = -1$. De (1) y de la figura 3.91, se tiene

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy &= \iint_R (-1 + 2y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (-y + y^2)\Big]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 (-x^6 + x^4 + x^3 - x^2)\,dx = -\frac{11}{420}.\end{aligned}$$ ❑

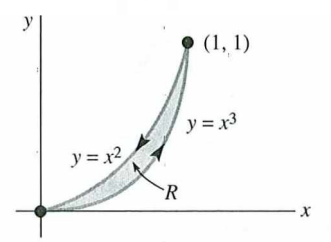


Figura 3.91 Curva C del ejemplo 1

Observe que la integral de línea del ejemplo 1 se podría haber calculado en forma directa utilizando la variable x como parámetro. Sin embargo, pondérese en el próximo ejemplo la conveniencia de calcular la integral de línea dada en la forma usual.

Ejemplo 2 Uso del teorema de Green

Calcule $\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

Solución Sustituyendo $P(x, y) = x^5 + 3y$ y $Q(x, y) = 2x - e^{y^3}$, se tiene $\partial P/\partial y = 3$ y $\partial Q/\partial x = 2$. Así, (1) da

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = \iint_R (2 - 3)\,dA = -\iint_R dA$$

Ahora, la integral doble $\iint_R dA$ proporciona el área de la región R acotada por el círculo de radio 2 que se muestra en la figura 3.92. Como el área del círculo es $\pi 2^2 = 4\pi$, se tiene que

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = -4\pi.$$ ❑

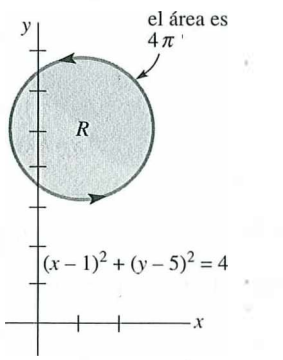


Figura 3.92 Curva circular C del ejemplo 2

Ejemplo 3 Trabajo realizado por una fuerza

Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (-16y + \operatorname{sen} x^2)\mathbf{i} + (4e^y + 3x^2)\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva cerrada simple C mostrada en la figura 3.93.

Solución De (12) de la sección 3.8, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ viene dado por

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_C (-16y + \operatorname{sen} x^2)\, dx + (4e^y + 3x^2)\, dy$$

y entonces, por el teorema de Green, $W = \iint_R (6x + 16)\, dA$. Revisando la región R, esta última integral se maneja mejor en coordenadas polares. Como R se define por $0 \le r \le 1$ y $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$,

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16)\, r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2r^3\cos\theta + 8r^2)\Big]_0^1 d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos\theta + 8)\, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

❑

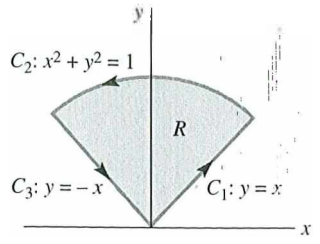


Figura 3.93 Curva C del ejemplo 3

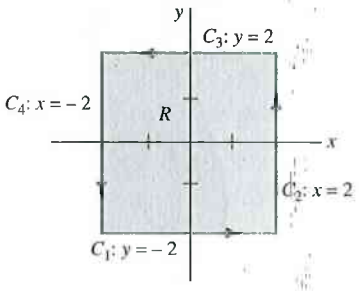


Figura 3.94 Curva C del ejemplo 4

Ejemplo 4 Teorema de Green no aplicable

Sea C la curva cerrada que consta de los cuatro segmentos rectos de línea C_1, C_2, C_3, C_4 mostrados en la figura 3.94. El teorema de Green *no* es aplicable a la integral de línea

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

puesto que P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ no son continuas en el origen. ❑

■ **Región con orificios** El teorema de Green también es válido para una región R con "orificios", esto es, acotada entre dos o más curvas cerradas simples suaves por tramos. En la figura 3.95*a*) se muestra una región R acotada por una curva C que consta de dos curvas cerradas simples C_1 y C_2, o sea, $C = C_1 \cup C_2$. La curva C tiene orientación positiva, ya que si C_1 se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj y C_2 en el sentido de las manecillas del reloj, la región R se halla siempre a la izquierda. Si ahora se introducen cortes transversales como se muestra la figura 3.95*b*), la región R se divide en dos subregiones, R_1 y R_2. Aplicando el teorema de Green a R_1 y R_2, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \oint_{C_1} P\, dx + Q\, dy + \oint_{C_2} P\, dx + Q\, dy \qquad (4) \\ &= \oint_C P\, dx + Q\, dy. \end{aligned}$$

Este resultado es consecuencia de que las integrales de línea en los cortes transversales (trayectorias con orientaciones opuestas) se cancelan entre sí; véase (8) de la sección 3.8.

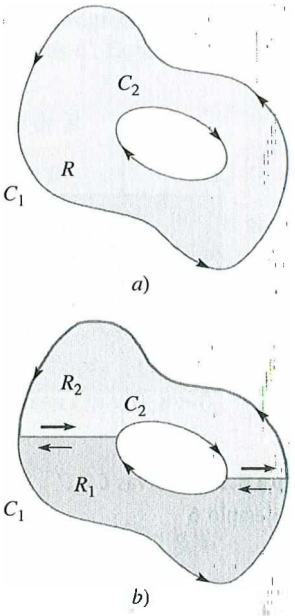


Figura 3.95 La frontera de R es $C = C_1 \cup C_2$

Ejemplo 5 Región con un orificio

Calcule $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R que se muestra en la figura 3.96.

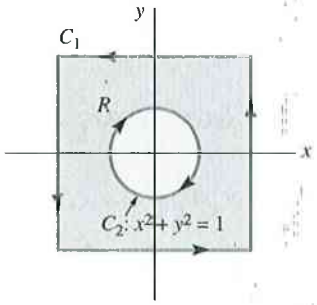


Figura 3.96 Frontera C del ejemplo 5

Solución Puesto que $P(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

son continuas en la región R acotada por C, se tiene, a partir de la argumentación anterior, que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \iint_R \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] dA = 0. \qquad \square$$

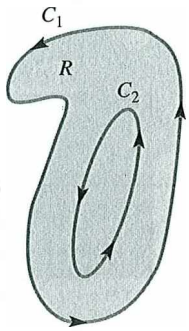


Figura 3.97 Curvas C_1 y C_2 en (5)

Como consecuencia de la argumentación precedente al ejemplo 5, se establece un resultado para las integrales de línea que permite, en ciertas circunstancias, reemplazar una trayectoria cerrada complicada por una trayectoria más sencilla. Supóngase, como se muestra en la figura 3.97, que C_1 y C_2 son dos trayectorias cerradas simples suaves por tramos que no se intersecan y cuya orientación es la misma (en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Supóngase también que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas tales que, en la región R acotada entre C_1 y C_2,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

En la región R limitada entre C_1 y C_2. Entonces, de (4) anterior y (8) de la sección 3.8 se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{-C_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

o

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{5}$$

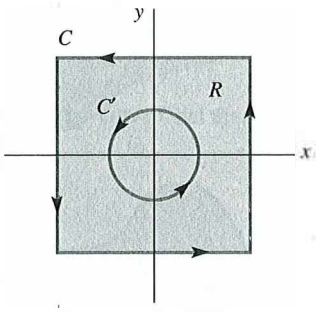


Figura 3.98 Curvas C y C' del ejemplo 6

Ejemplo 6 Revisión del ejemplo 4

Calcule la integral de línea del ejemplo 4.

Solución Un método para calcular la integral de línea es escribir

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

y entonces calcular las cuatro integrales de los segmentos de línea C_1, C_2, C_3 y C_4. O bien, si se observa que el círculo C': $x^2 + y^2 = 1$ está completamente en C (véase la figura 3.98), resulta evidente pues del ejemplo 5 que $P = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q = x/(x^2 + y^2)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en la región R acotada entre C y C'. Además, para R

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo tanto, de (5) se tiene que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy.$$

Utilizando la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, se obtiene para C'

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy &= \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t)]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt \qquad (6) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \qquad \square\end{aligned}$$

Es interesante observar que el resultado en (6):

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = 2\pi$$

es correcto para cualquier curva cerrada simple suave por tramos C con el origen en su interior. Únicamente se necesita elegir C' como $x^2 + y^2 = a^2$, donde a es lo suficientemente pequeño para que el círculo se encuentre completamente dentro de C.

EJERCICIOS 3.12 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 4, verifique el teorema de Green calculando ambas integrales.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + xy\,dy = \iint_R (y + 1)\,dA$, donde C es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 3)$
2. $\oint_C 3x^2y\,dx + (x^2 - 5y)\,dy = \iint_R (2x - 3x^2)\,dA$, donde C es el rectángulo de vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$
3. $\oint_C -y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x + 2y)\,dA$, donde C es el círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$
4. $\oint_C -2y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_R 8y\,dA$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$

En los problemas del 5 al 14, utilice el teorema de Green para calcular la integral de línea indicada.

5. $\oint_C 2y\,dx + 5x\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$
6. $\oint_C (x + y^2)\,dx + (2x^2 - y)\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$
7. $\oint_C (x^4 - 2y^3)\,dx + (2x^3 - y^4)\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$
8. $\oint_C (x - 3y)\,dx + (4x + y)\,dy$, donde C es el rectángulo de vértices $(-2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-2, 2)$
9. $\oint_C 2xy\,dx + 3xy^2\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$
10. $\oint_C e^{2x}\operatorname{sen} 2y\,dx + e^{2x}\cos 2y\,dy$, donde C es la elipse $9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$
11. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$
12. $\oint_C e^{y^2}\,dx + 2\tan^{-1} x\,dy$, donde C es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$
13. $\oint_C \frac{1}{3}y^3\,dx + (xy + xy^2)\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $x = y^2$, $x = 1 - y^2$
14. $\oint_C xy^2\,dx + 3\cos y\,dy$, donde C es la frontera de la región del primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$

En los problemas 15 y 16, calcule la integral requerida utilizando cualquier curva cerrada suave por tramos C.

15. $\oint_C ay\,dx + bx\,dy$
16. $\oint_C P(x)\,dx + Q(y)\,dy$

En los problemas 17 y 18, sea R la región acotada por una curva cerrada simple suave por tramos C. Demuestre los resultados que se indican.

17. $\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx =$ área de R
18. $\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy =$ área de R

En los problemas 19 y 20, utilice los resultados de los problemas 17 y 18 para encontrar el área de la región acotada por la curva cerrada indicada.

19. La hipocicloide $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$
20. La elipse $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$
21. *a*) Demuestre que

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = x_1y_2 - x_2y_1,$$

donde C es el segmento de línea desde el punto (x_1, y_1) hasta (x_2, y_2).

b) Utilice el inciso *a*) y el problema 18 para demostrar que el área A de un polígono de vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), ordenados en sentido contrario al de las manecillas del reloj, es

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n).$$

22. Utilice el inciso *b*) del problema 21 para encontrar el área del cuadrilátero de vértices $(-1, 3)$, $(1, 1)$, $(4, 2)$ y $(3, 5)$.

En los problemas 23 y 24, calcule la integral de línea indicada, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R.

23. $\oint_C (4x^2 - y^3)\,dx + (x^3 + y^2)\,dy$

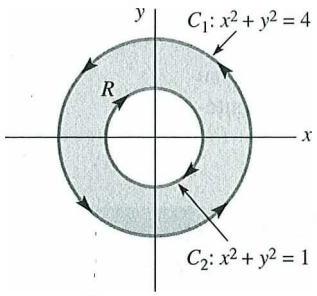


Figura 3.99 Frontera C para el problema 23

24. $\oint_C (\cos x^2 - y)\,dx + \sqrt{y^3 + 1}\,dy$

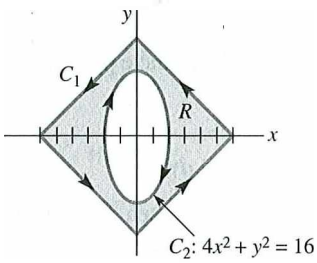


Figura 3.100 Frontera C para el problema 24

En los problemas 25 y 26, proceda como en el ejemplo 6 para calcular la integral de línea indicada.

25. $\oint_C \dfrac{-y^3dx + xy^2dy}{(x^2 + y^2)^2}$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

26. $\oint_C \dfrac{-y}{(x+1)^2 + 4y^2}\,dx + \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + 4y^2}\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$

En los problemas 27 y 28, utilice el teorema de Green para calcular la integral doble indicada por medio de una integral de línea. [*Sugerencia:* Encuentre funciones apropiadas P y Q.]

27. $\iint_R x^2\,dA$; R es la región acotada por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$

28. $\iint_R [1 - 2(y-1)]\,dA$; R es la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y $x = 0$

En los problemas 29 y 30, utilice el teorema de Green para encontrar el trabajo realizado por la fuerza indicada $\mathbf{F}$ alrededor de la curva cerrada de la figura 3.101.

29. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ 30. $\mathbf{F} = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

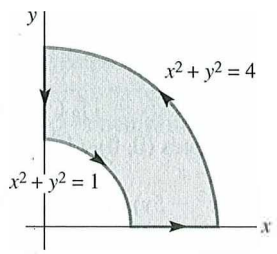


Figura 3.101 Curva para los problemas 29 y 30

31. Sean P y Q funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas sobre una región simplemente conectada del plano xy. Si $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ para cualquier curva cerrada simple suave por tramos C de la región.

32. Sea R una región acotada por una curva cerrada simple suave por tramos C. Demuestre que las coordenadas del centroide de la región vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \quad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

33. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo del cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

3.13 Integrales de superficie

Introducción En el plano xy, la longitud de un arco de la gráfica $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por la integral definida

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1}$$

El problema en tres dimensiones, que es la contraparte del problema de la longitud de arco, es encontrar el área $A(s)$ de una porción de la superficie S que viene dada por una función $z = f(x, y)$ con primeras derivadas parciales continuas sobre una región cerrada R en el plano xy. Se dice que tal superficie es **suave**.

Áreas de superficies Supóngase que se genera una partición interna P de R utilizando líneas paralelas a los ejes x y y, como se muestra en la figura 3.102*a*). P consta entonces de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ que se hallan completamente en R. Sea

$(x_k, y_k, 0)$ la notación de cualquier punto en un R_k. Como se observa en la figura 3.102*a*), al proyectar el contorno de R_k hacia arriba, se determinan dos cantidades: una porción S_k de la superficie y una porción T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que, cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente igual al área ΔS_k de S_k.

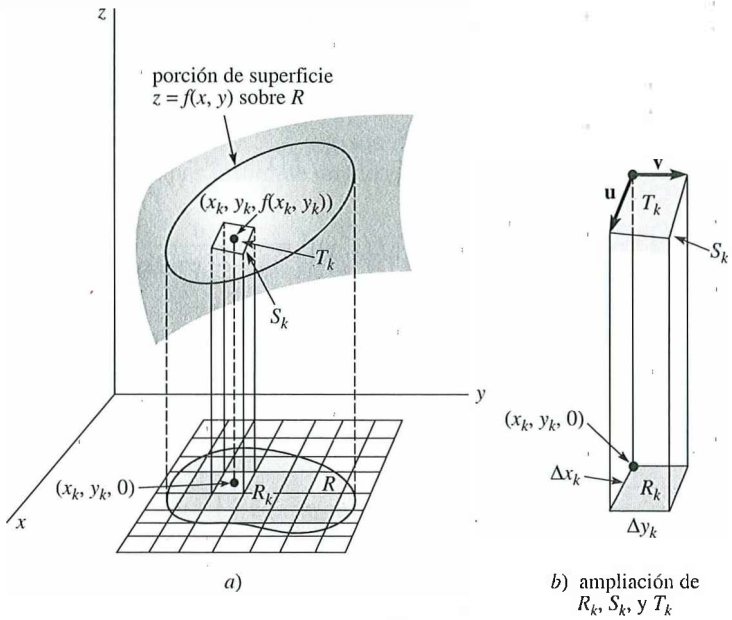


Figura 3.102 ¿Cuál es el área de la superficie por encima de R?

Para determinar el área de T_k se escoge $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k, como se muestra en la figura 3.102*b*). Los vectores indicados **u** y **v**, que forman dos lados de T_k, vienen dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\,\Delta x_k \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \mathbf{k},$$

donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las líneas que contienen a **u** y **v**, respectivamente. Ahora, de (11) de la sección 1.4, se sabe que $\Delta T_k = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ donde

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\,\Delta y_k \end{vmatrix} = [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\Delta x_k\,\Delta y_k.$$

En otras palabras,

$$\Delta T_k = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\,\Delta x_k\,\Delta y_k.$$

En consecuencia, el área A es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\,\Delta x_k\,\Delta y_k.$$

El límite de la suma anterior cuando $\|P\| \to 0$ lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.11 Área de superficies

Sea f una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en una región cerrada R. Entonces, el **área de la superficie sobre R** está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\,dA. \qquad (2)$$

Casi se podría haber adivinado la forma de (2) extrapolando naturalmente la estructura de (1) de una variable a dos variables.

Ejemplo 1 Área de una superficie

Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se halla por encima del plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

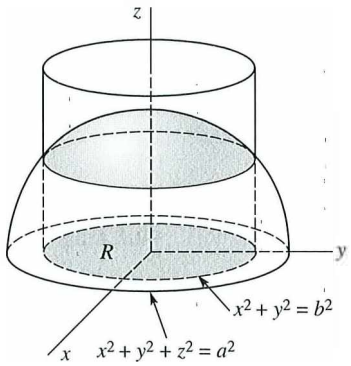


Figura 3.103 Porción de una esfera en el ejemplo 1

Solución Si se define $z = f(x, y)$ con $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

por lo que $$1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Entonces, (2) es $$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde R se indica en la figura 3.103. Para calcular esta integral doble, se cambia a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} A(S) &= a\int_0^{2\pi}\int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \Big[-(a^2 - r^2)^{1/2}\Big]_0^b d\theta = a(a - \sqrt{a^2 - b^2})\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2}) \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

❑

■ **Diferencial de un área de superficie** La función

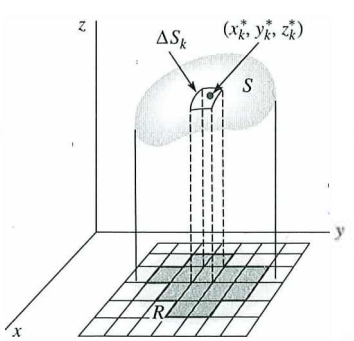
$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \tag{3}$$

se denomina diferencial de un área de superficie. Se utiliza esta función en la argumentación que sigue.

■ **Integral de superficie** Como se ha visto, las integrales dobles y triples

$$\iint_R f(x, y)\, dA \quad \text{y} \quad \iiint_D f(x, y, z)\, dV,$$

son generalizaciones de la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$. La integral de superficie (2) es una generalización de la integral de la longitud de arco (1). A continuación, se considera una generalización de la integral de línea $\int_C G(x, y)\, ds$. Ésta se denomina **integral de superficie**.



$w = G(x, y, z)$

1. Sea G una función definida en una región del espacio tridimensional que contiene a una superficie S, la cual es la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Sea la proyección R de la superficie sobre el plano xy una región tipo I o tipo II.
2. Divídase la superficie en n porciones de área ΔS_k correspondientes a una partición P de R en n rectángulos R_k de áreas ΔA_k.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición, o la longitud de la diagonal más larga de las R_k.
4. Elíjase un punto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada elemento del área de superficie.
5. Genérese la suma $\sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta S_k$.

DEFINICIÓN 3.12 Integral de superficie

Sea G una función de tres variables definida sobre una región del espacio que contiene a la superficie S. Entonces la **integral de superficie de G sobre S** se expresa mediante

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} G(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, \Delta S_k \tag{4}$$

■ **Método de cálculo** Si G, f, f_x y f_y son continuas en una región que contiene a S, entonces (4) se calcula por medio de una integral doble. Mediante (3), el lado izquierdo de (4) se convierte en

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \tag{5}$$

Obsérvese que cuando $G = 1$, (5) se reduce a la fórmula (2) para el área de una superficie.

■ **Proyección de S en otros planos** Si $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre una región R del plano xz, entonces

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(x, g(x), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\, dA. \tag{6}$$

En forma similar, si $x = h(y, z)$ es la ecuación de una superficie que se proyecta sobre el plano yz, entonces el análogo de (5) es

$$\iint_S G(x, y, z)\, dS = \iint_R G(h(y, z), y, z)\sqrt{1 + [h_y(y, z)]^2 + [h_z(y, z)]^2}\, dA. \tag{7}$$

■ **Masa de una superficie** Supóngase que $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de una superficie en cualquier punto, o la masa por área unitaria de superficie; entonces la **masa** m de la superficie es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\, dS. \tag{8}$$

Ejemplo 2 Masa de una superficie

Encuentre la masa de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante para $1 \le z \le 5$ si la densidad en un punto P de la superficie es directamente proporcional a su distancia al plano xy.

Solución La superficie en cuestión y su proyección sobre el plano xy se muestran en la figura 3.104. Ahora, como $\rho(x, y, z) = kz$ y $z = 1 + x^2 + y^2$, (8) y (5) dan

$$m = \iint_S kz\, dS = k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA.$$

Cambiando a coordenadas polares, se obtiene

$$\begin{aligned} m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1 + r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1 + 4r^2)^{1/2} + r^3(1 + 4r^2)^{1/2}]\, dr\, d\theta \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= k\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1 + 4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1 + 4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{k\pi}{2}\left[\frac{5(17)^{3/2}}{12} - \frac{17^{5/2}}{120} - \frac{3}{40}\right] \approx 19.2k \end{aligned}$$

❑

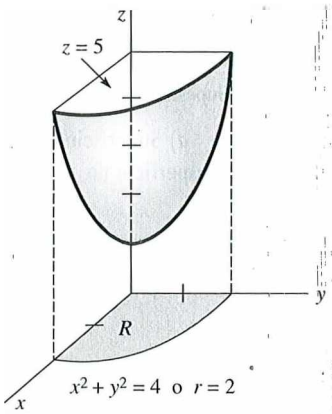


Figura 3.104 Superficie del ejemplo 2

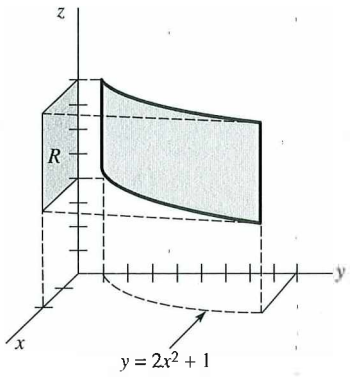


Figura 3.105 Superficie del ejemplo 3

Ejemplo 3 Cálculo de una integral de superficie

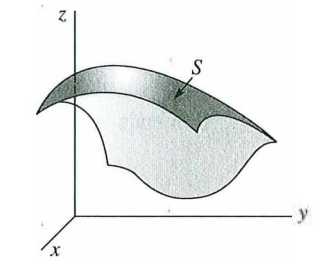
Calcule $\iint_S xz^2\,dS$, donde S es la porción del cilindro $y = 2x^2 + 1$ en el primer octante que está acotada por $x = 0$, $x = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

Solución Se utiliza (6) con $g(x, z) = 2x^2 + 1$ y con la región rectangular R del plano xz mostrada en la figura 3.105. Como $g_x(x, z) = 4x$ y $g_z(x, z) = 0$, se tiene que

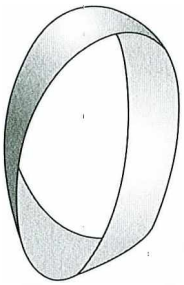
$$\iint_S xz^2\,dS = \int_0^2 \int_4^8 xz^2\sqrt{1 + 16x^2}\,dz\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{z^3}{3} x\sqrt{1 + 16x^2}\,\Big]_4^8 dx = \frac{448}{3}\int_0^2 x(1 + 16x^2)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{28}{9}(1 + 16x^2)^{3/2}\,\Big]_0^2 = \frac{28}{9}[65^{3/2} - 1] \approx 1627.3. \qquad \square$$



a) Superficie de dos caras



b) Superficie de una cara

Figura 3.106 *a*) Superficie orientada; *b*) superficie no orientada

■ **Superficies orientables** En el ejemplo 5, se calcula una integral de superficie de un campo vectorial. Para poder hacer esto, se necesita examinar el concepto de **superficie orientable**. En términos generales, una superficie orientable S, tal como se ilustra en la figura 3.106*a*), tiene dos caras que podrían pintarse de diferentes colores. La tira de Möbius* mostrada en la figura 3.106*b*) no es una superficie orientable y tiene una cara. Una persona que comienza a pintar la superficie de una franja de Möbius desde un punto, pintará toda la superficie regresando eventualmente al punto inicial.

Específicamente, se dice que una superficie suave S es **orientable** o es una **superficie orientada** si existe una función continua $\mathbf{n}$ de vectores unitarios normales definida en cada punto (x, y, z) de la superficie. El campo vectorial $\mathbf{n}(x, y, z)$ se denomina la **orientación** de S. Sin embargo, como un vector unitario normal en (x, y, z) a la superficie S puede ser tanto $\mathbf{n}(x, y, z)$ como $-\mathbf{n}(x, y, z)$, una superficie orientable tiene dos orientaciones; véase la figura 3.107*a*)-*c*). La tira de Möbius, mostrada de nuevo en la figura 3.107*d*), no es una superficie orientada, puesto que si una normal unitaria $\mathbf{n}$ comienza en P sobre la superficie y se mueve *una vez* alrededor de la franja sobre la curva C, termina en la "cara opuesta" de la franja en P y, por lo tanto, apunta en dirección opuesta. Una superficie S definida por $z = f(x, y)$ tiene una **orientación ascendente** (figura 3.107*b*)) cuando las normales unitarias se dirigen hacia arriba, esto es, tiene componentes $\mathbf{k}$ positivas, y tiene una **orientación descendente** (figura 3.107*c*)) cuando las normales unitarias se dirigen hacia abajo, es decir, tiene componentes $\mathbf{k}$ negativas.

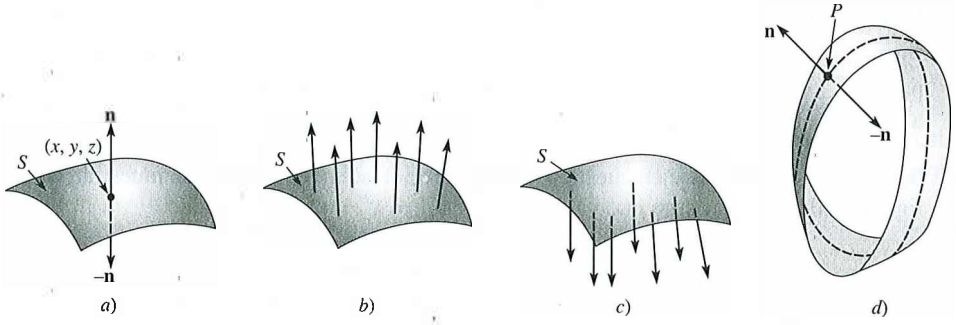


Figura 3.107 Orientación ascendente en *b*); orientación descendente en *c*)

Si una superficie suave S está definida por $g(x, y, z) = 0$, se sabe que un vector unitario normal es

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\|\nabla g\|}\nabla g, \tag{9}$$

*Para construir una tira de Möebius, se corta una tira larga de papel, se le da media vuelta a un extremo y entonces se unen los extremos con cinta adhesiva.

donde $\nabla g = \dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\mathbf{k}$ es el gradiente de g. Si S está definido por $z = f(x, y)$, entonces se utiliza $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ o $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$ dependiendo de la orientación de S.

Como se ve en el siguiente ejemplo, las dos orientaciones de una superficie cerrada orientable son **hacia afuera** y **hacia adentro**.

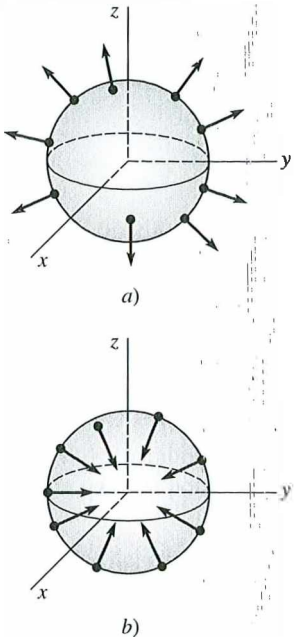


Figura 3.108 Esfera del ejemplo 4

Ejemplo 4 Orientaciones de una superficie

Considérese la esfera de radio $a > 0$: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Si se define $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, entonces

$$\nabla g = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \|\nabla g\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a.$$

Así, las dos orientaciones de la superficie son

$$\mathbf{n} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{x}{a}\mathbf{i} - \frac{y}{a}\mathbf{j} - \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

El campo vectorial $\mathbf{n}$ define una orientación hacia afuera, mientras que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ define una orientación hacia adentro; véase la figura 3.108. ❑

Integrales de los campos vectoriales Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ es el campo de velocidad de un fluido, entonces, como se ve en la figura 3.39, el volumen de fluido que fluye por unidad de tiempo a través de un elemento de un área superficial ΔS es aproximadamente

$$(\text{altura})(\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\,\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,\Delta S,$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie; véase la figura 3.109. El volumen total por unidad de tiempo de un fluido que pasa por S se denomina **flujo de F a través de S**, y viene dado por

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{10}$$

En el caso de una superficie cerrada S, si $\mathbf{n}$ es el vector normal externo (interno), entonces (10) proporciona el volumen del fluido que fluye hacia afuera (hacia adentro) por unidad de tiempo.

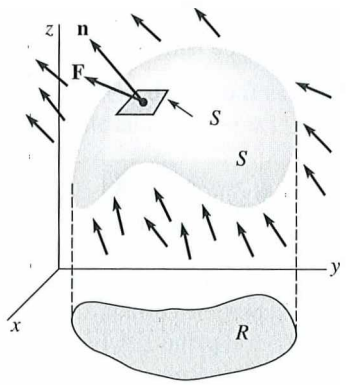


Figura 3.109 Superficie S en (10)

Ejemplo 5 Flujo a través de una superficie

Considérese que $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ representa el flujo de un líquido. Encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la superficie S dada por la porción del plano $z = 6 - 3x - 2y$ en el primer octante orientado hacia arriba.

Solución El campo vectorial y la superficie se ilustran en la figura 3.110. Definiendo el plano por medio de $g(x, y, z) = 3x + 2y + z - 6 = 0$, se observa que un vector normal unitario con una componente **k** positiva es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,
$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_S 3z\, dS.$$

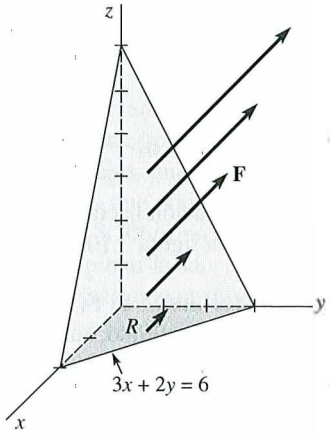


Figura 3.110 Superficie del ejemplo 5

Siendo R la proyección de la superficie sobre el plano xy, se encuentra de (10) que

$$\text{flujo} = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_R 3(6 - 3x - 2y)(\sqrt{14}\, dA)$$

$$= 3\int_0^2 \int_0^{3-3x/2} (6 - 3x - 2y)\, dy\, dx = 18. \qquad \square$$

Dependiendo de la naturaleza del campo vectorial, la integral en (10) representa otros tipos de flujo. Por ejemplo, (10) puede también dar flujo eléctrico, flujo magnético, flujos de calor, etcétera.

Comentarios

Si la superficie S se define por tramos, una integral de superficie sobre S se expresa como la suma de las integrales de superficie sobre las diversas partes de la misma. Por ejemplo, supóngase que S es la superficie cerrada suave por partes orientable acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ (S_1) y el plano $z = 1$ (S_2). Entonces, el flujo de un campo vectorial **F** hacia afuera de la superficie S es

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde se toma S_1 orientado hacia arriba y S_2 orientado hacia abajo; véase la figura 3.111 y el problema 35 de los ejercicios 3.13.

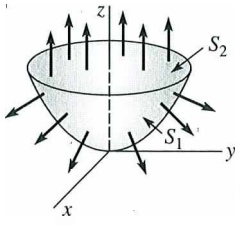


Figura 3.111 Superficie definida por tramos

EJERCICIOS 3.13 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

1. Encuentre el área de la superficie de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ acotada por los planos coordenados en el primer octante.
2. Encuentre el área de la superficie de la porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está por encima de la región del primer cuadrante acotada por la gráfica $r = \text{sen } 2\theta$.
3. Encuentre el área de la superficie de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que se halla por encima de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ y $y = 5$.
4. Encuentre el área de la superficie de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se halla por debajo del plano $z = 2$.
5. Encuentre el área de la superficie de la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que se halla por encima del plano xy.
6. Encuentre el área de la superficie de aquellas porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que se hallan dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
7. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que se halla por encima de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0$, $y = 0$ y $4x^2 + y^2 = 25$. [*Sugerencia:* Integre primero con respecto a x.]
8. Encuentre el área de la superficie de la porción de la gráfica $z = x^2 - y^2$ que se halla en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
9. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se hallan dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
10. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que se hallan dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.
11. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que se hallan dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [*Sugerencia:* Véase la figura 3.79.]
12. Utilice el resultado del ejemplo 1 para demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. [*Sugerencia:* Considere el límite cuando $b \to a$.]
13. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ acotada entre $y = c_1$ y $y = c_2$, donde $0 < c_1 < c_2 < a$. [*Sugerencia:* Utilice coordenadas polares en el plano xz.]
14. Demuestre que el área encontrada en el problema 13 es igual al área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

En los problemas del 15 al 24, calcule la integral de superficie $\iint_S G(x, y, z)\, dS$.

15. $G(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$
16. $G(x, y, z) = xy(9 - 4z)$; la superficie es la misma que en el problema 15.
17. $G(x, y, z) = xz^3$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
18. $G(x, y, z) = x + y + z$; S es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 4$
19. $G(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante.
20. $G(x, y, z) = z^2$; S es la porción del plano $z = x + 1$ dentro del cilindro $y = 1 - x^2$, $0 \le y \le 1$
21. $G(x, y, z) = xy$; S es la porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
22. $G(x, y, z) = 2z$; S es la porción del paraboloide $2z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante acotada por $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 1$
23. $G(x, y, z) = 24\sqrt{yz}$; S es la porción del cilindro $y = x^2$ en el primer octante acotada por $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$
24. $G(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante afuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 25 y 26, calcule $\iint_S (3z^2 + 4yz)\, dS$, donde S es la porción del plano $x + 2y + 3z = 6$ en el primer octante. Utilice la proyección de S sobre el plano coordenado indicado en la figura dada.

25.

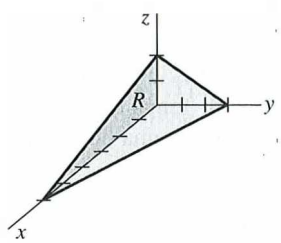


Figura 3.112 Región R para el problema 25

26.

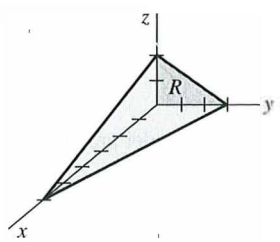


Figura 3.113 Región R para el problema 26

En los problemas 27 y 28, encuentre la masa de la superficie dada utilizando la función de densidad indicada.

27. S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia al plano yz.
28. S es el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $\rho(x, y, z) = |xy|$

En los problemas del 29 al 34, sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la superficie indicada. Considere que la superficie S tiene orientación ascendente.

29. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante acotada por $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $z = 0$

30. $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

31. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; la superficie S es la misma que en el problema 30

32. $\mathbf{F} = -x^3y\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x + 3$ en el primer octante contenido en el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

33. $\mathbf{F} = \frac{1}{2}x^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $0 \leq z \leq 4$

34. $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + 18y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $x + y + z = 6$ en el primer octante.

35. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ hacia afuera de la superficie cerrada S dada en la figura 3.111.

36. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 6z^2\mathbf{k}$ hacia afuera de la superficie cerrada S acotada por los paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

37. Sea $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la función temperatura y sea el "flujo" de calor representado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla T$. Encuentre el flujo de calor hacia afuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. [*Sugerencia:* El área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.]

38. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ hacia afuera del cubo unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$; véase la figura 3.114. Tenga en cuenta que el flujo hacia afuera del cubo es la suma de los flujos hacia afuera de las caras.

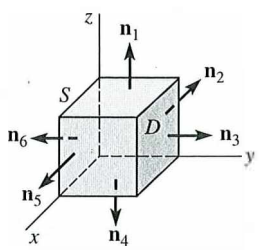


Figura 3.114 Cubo del problema 38

39. La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico $\mathbf{E}$ debido a una carga puntual q en el origen viene dado por $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$, donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine el flujo hacia afuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

40. Si $\sigma(x, y, z)$ es la densidad de carga en un campo electrostático, entonces la carga total sobre una superficie S es $Q = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS$. Encuentre la carga total sobre la porción del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ que se halla dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ si la densidad de carga en un punto P de la superficie es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

41. Las coordenadas del centroide de una superficie están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\, dS}{A(S)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y\, dS}{A(S)}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z\, dS}{A(S)},$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie. Encuentre el centroide de la porción del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.

42. Utilice la información del problema 41 para encontrar el centroide del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

43. Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie S y sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Demuestre que $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ es igual a

$$\iint_R \left[-P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z) \right] dA$$

3.14 Teorema de Stokes

Introducción El teorema de Green de la sección anterior tiene dos formulaciones vectoriales. En esta sección y en la 3.16 se generalizan dichas formulaciones a tres dimensiones.

Formulación vectorial del teorema de Green Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

De (12) y (13) de la sección 3.8, el teorema de Green se escribe en notación vectorial como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA, \tag{1}$$

esto es, la integral de línea de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ es la integral doble de la componente normal de rot $\mathbf{F}$.

Teorema de Green en el espacio tridimensional La formulación vectorial del teorema de Green dada en (1) establece una relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple suave continua por tramos C que forma la frontera de una región plana R y una integral doble sobre R. El teorema de Green en el espacio tridimensional relaciona una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple suave por tramos C que forma la frontera de una superficie S con una integral de superficie sobre S. Supóngase que $z = f(x, y)$ es una función continua cuya gráfica es una superficie orientable suave por tramos sobre una región R del plano xy. Sea C la frontera de S y sea la proyección de C sobre el plano xy la frontera de R. La dirección positiva de C se induce por la orientación de la superficie S; la dirección positiva sobre C corresponde a la dirección en que una persona tendría que caminar sobre C para tener su cabeza apuntando en la dirección de la orientación de la superficie, mientras mantiene la superficie hacia la izquierda; véase la figura 3.115. Siendo más precisos, la orientación positiva de C está de acuerdo con la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de la orientación de la superficie, entonces los dedos de la mano derecha se doblan alrededor de la superficie en la dirección positiva. Finalmente, sea $\mathbf{T}$ un vector unitario tangente a C que apunta en la dirección positiva. La formulación tridimensional del teorema de Green, que se proporciona a continuación, se denomina **teorema de Stokes**.

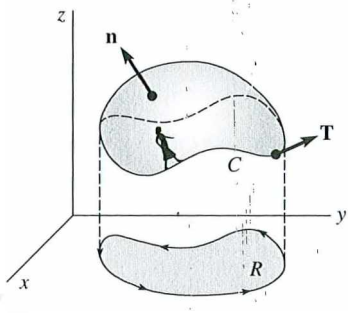


Figura 3.115 La frontera C de la superficie S tiene orientación positiva

TEOREMA 3.14 Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientable suave continua por tramos acotada por una curva cerrada simple suave continua por tramos C. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el que P, Q y R son funciones continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a S. Si C se recorre en dirección positiva, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, dS = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a S con la dirección de la orientación de S.

Demostración parcial Supóngase que la superficie S está orientada hacia arriba y se define por medio de una función $z = f(x, y)$ que tiene segunda derivada parcial continua. De la definición 3.7 se tiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Es más, si se escribe $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \right] dA. \quad (3)$$

El objetivo es ahora demostrar que $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se reduce a (3).

Si C_{xy} es la proyección de C sobre el plano xy y tiene las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$, donde $a \le t \le b$, entonces $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = f(x(t), y(t))$, donde $a \le t \le b$, son ecuaciones paramétricas para C. Así,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \quad \text{regla de la cadena} \\
&= \oint_{C_{xy}} \left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right] dA. \quad \text{teorema de Green}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \begin{matrix}\text{reglas de la cadena} \\ \text{y del producto}\end{matrix} \quad (5) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + R\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}.
\end{aligned}$$

En forma similar,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} + R\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Restando (6) de (5) y aprovechando que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$, se observa que, después de reacomodar términos, (4) conduce a

$$\iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA.$$

Esta última expresión es la misma que la del lado derecho de (3), que es precisamente la que debía obtenerse. ❑

Ejemplo 1 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para la que $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Verifique el teorema de Stokes si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.

Solución La superficie S, la curva C (formada por la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4) y la región R se muestran en la figura 3.116.

Integral de superficie: De $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, se obtiene

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$

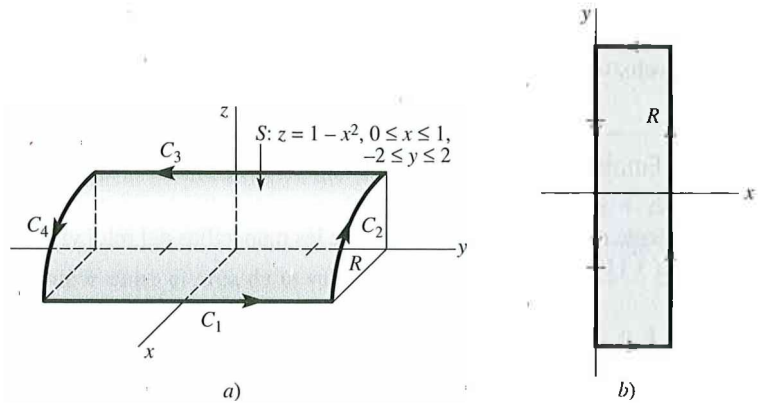


Figura 3.116 Superficie S y región R del ejemplo 1

Ahora, si $g(x, y, z) = z + x^2 - 1 = 0$ define al cilindro, entonces la normal superior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{2x\,\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Por lo tanto, $$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS.$$

Para calcular esta última integral de superficie, se utiliza (5) de la sección 3.13:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS &= \iint_R (-2xy - x)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \left[-xy^2 - xy \right]_{-2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-4x)\, dx = -2. \end{aligned} \tag{7}$$

Integral de línea: Se escribe $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$. Para C_1: $x = 1, z = 0, dx = 0,$ $dz = 0$, por lo que

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\, dy + 0 = 0.$$

Para C_2: $y = 2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2x\, dx,$ por lo que

$$\int_{C_2} 2x\, dx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{11}{15}.$$

Para C_3: $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, por lo que

$$\int_{C_3} 0 + y\,dy + 0 = \int_{2}^{-2} y\,dy = 0.$$

Para C_4: $y = -2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2x\,dx$, por lo que

$$\int_{C_4} -2x\,dx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\,dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\,dx = -\frac{19}{15}.$$

Por lo tanto, $\oint_C xy\,dx + yz\,dy + xz\,dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2,$

que, por supuesto, coincide con (7). ❑

Ejemplo 2 Empleo del teorema de Stokes

Calcule $\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. Oriente C en sentido contrario al de las manecillas del reloj visto desde arriba; véase la figura 3.117.

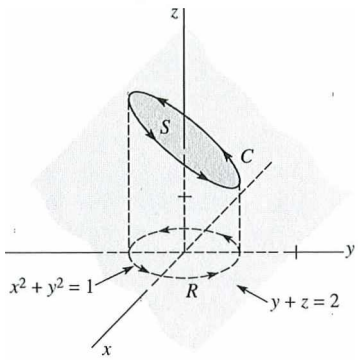


Figura 3.117 Curva C del ejemplo 2

Solución Si $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

La orientación dada de C corresponde a una orientación ascendente de la superficie S. Así, si $g(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ define al plano, entonces la normal ascendente es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

Entonces, de (2),

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \right) \right] dS$$

$$= \sqrt{2} \iint_S dS = \sqrt{2} \iint_R \sqrt{2}\,dA = 2\pi.$$ ❑

Obsérvese que si $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar, entonces, considerando (5) de la sección 3.7, (2) implica que la circulación $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ es cero. En forma inversa, puede mostrarse que si la circulación es cero para cualquier curva cerrada simple, entonces $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar. En otras palabras, $\mathbf{F}$ es irrotacional si, y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es un potencial para $\mathbf{F}$. De manera equivalente, esto ofrece una prueba para un campo vectorial conservativo: $\mathbf{F}$ *es un campo vectorial conservativo si, y sólo si,* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

■ **Interpretación física del rotacional** En la sección 3.8 se explica que si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad de un fluido, entonces la circulación $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ alrededor de C es una medida de la cantidad con la que el fluido tiende a rodear la curva C circulando a su alrededor. La circulación de $\mathbf{F}$ se relaciona estrechamente con el rotacional de $\mathbf{F}$. Para ver esto, supóngase que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y que C_r es un pequeño círculo de radio r centrado en P_0; véase la figura 3.118. Entonces por el teorema de Stokes,

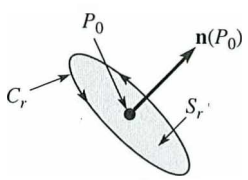


Figura 3.118 Curva C_r y superficie S_r en (8)

$$\oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\,dS. \tag{8}$$

Ahora, si en cualquier punto $P(x, y, z)$ contenido en el pequeño círculo C_r se considera que rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, entonces (8) proporciona la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &\approx \iint_{S_r} (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, dS \\ &= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) \iint_{S_r} dS \qquad (9) \\ &= (\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0)\, A_r, \end{aligned}$$

donde A_r es el área (πr^2) de la superficie circular S_r. Cuando $r \to 0$, mejora la aproximación rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, por lo que (9) conduce a

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (10)$$

Así, se observa que la componente normal de rot $\mathbf{F}$ es el valor límite del cociente de la circulación de $\mathbf{F}$ entre el área de la superficie circular. Para un valor pequeño pero fijo de r, se tiene

$$(\text{rot } \mathbf{F}(P_0)) \cdot \mathbf{n}(P_0) \approx \frac{1}{A_r} \oint_{C_r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \qquad (11)$$

Entonces, el rotacional de $\mathbf{F}$ es aproximadamente igual a la circulación de $\mathbf{F}$ por unidad de área. Si rot $\mathbf{F}(P_0) \neq \mathbf{0}$, entonces el lado izquierdo de (11) es un máximo cuando el círculo C_r se sitúa de forma que $\mathbf{n}(P_0)$ apunte en la misma dirección que rot $\mathbf{F}(P_0)$. En este caso, la circulación del lado derecho de (11) será también un máximo. Así pues, una rueda de palas insertada en el fluído en P_0 rota más rápido cuando su eje apunta en la dirección de rot $\mathbf{F}(P_0)$; véase la figura 3.119. Obsérvese también que la rueda de palas no rota si su eje es perpendicular al rot $\mathbf{F}(P_0)$.

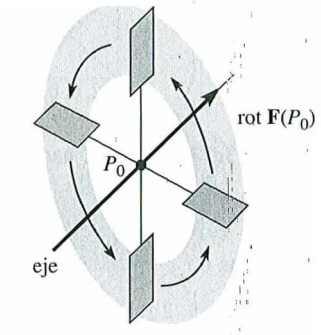


Figura 3.119 Rueda de palas

Comentarios

El valor de la integral de superficie en (2) se determina únicamente por la integral que rodea a su frontera C. Esto significa fundamentalmente que la forma de la superficie S es irrelevante. Suponiendo que las hipótesis del teorema 3.14 se satisfacen, entonces para dos superficies diferentes S_1 y S_2 con la misma orientación y la misma frontera C, se tiene

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_2} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Véase la figura 3.120 y los problemas 17 y 18 de los ejercicios 3.14.

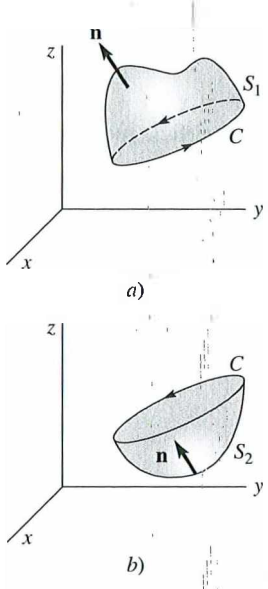


Figura 3.120 Dos superficies con la misma frontera C

EJERCICIOS 3.14 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas del 1 al 4, verifique el teorema de Stokes. Considérese que la superficie S tiene orientación ascendente.

1. $\mathbf{F} = 5y\mathbf{i} - 5x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$
2. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$
3. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante
4. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $z \geq 0$

En los problemas del 5 al 12, utilice el teorema de Stokes para calcular $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Considere que C tiene orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj al verla desde arriba.

5. $\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C es el triángulo cuyos vértices son (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

6. $\mathbf{F} = z^2 y \cos xy\,\mathbf{i} + z^2 x(1 + \cos xy)\,\mathbf{j} + 2z \operatorname{sen} xy\mathbf{k}$; C es la frontera del plano $z = 1 - y$ mostrada en la figura 3.121

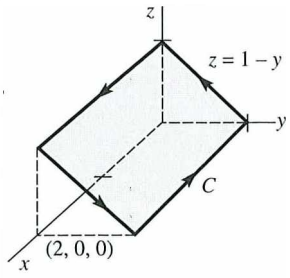


Figura 3.121 Curva C para el problema 6

7. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$; C es la frontera dada en el problema 6.

8. $\mathbf{F} = (x + 2z)\mathbf{i} + (3x + y)\mathbf{j} + (2y - z)\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + 2y + z = 4$ con los planos coordenados.

9. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $x + y + z = 1$

10. $\mathbf{F} = x^2 y\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + xy^2 z\,\mathbf{k}$; C es la frontera de la superficie mostrada en la figura 3.122.

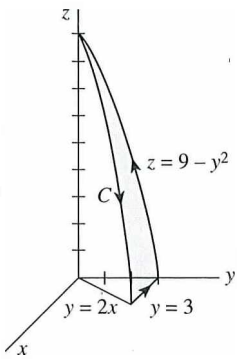


Figura 3.122 Curva C para el problema 10

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^3 y^2\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; C es la frontera del semielipsoide $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ en el plano $z = 0$

12. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + y + z = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ [*Sugerencia:* Recuerde que el área de un elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es πab.]

En los problemas del 13 al 16, utilice el teorema de Stokes para calcular $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$. Considere que la superficie S tiene orientación ascendente.

13. $\mathbf{F} = 6yz\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} + yze^{x^2}\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 4$

14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ para $z \ge 0$

15. $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 8x^3 y\mathbf{j} + 3x^2 y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x$ comprendida dentro del cilindro rectangular definido por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$ y $y = 2$.

16. $\mathbf{F} = 2xy^2 z\mathbf{i} + 2x^2 yz\mathbf{j} + (x^2 y^2 - 6x)\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = y$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

17. Utilice el teorema de Stokes para calcular

$$\oint_C z^2 e^{x^2}\,dx + xy^2\,dy + \tan^{-1} y\,dz$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$, encontrando una superficie S con frontera C cuya orientación tiene el sentido contrario al de las manecillas del reloj visto desde arriba.

18. Considere la integral de superficie $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F} = xyz\,\mathbf{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \ge 0$ con orientación ascendente.

   a) Calcule la integral de superficie por el método de la sección 3.13; o sea, no utilice el teorema de Stokes.

   b) Calcule la integral de superficie encontrando una superficie más sencilla de orientación ascendente cuya frontera sea la misma que la del paraboloide.

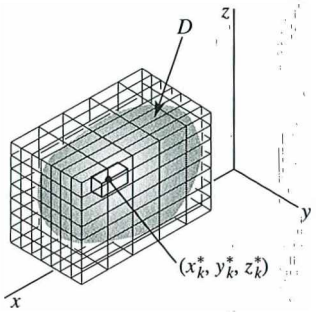
   c) Utilice el teorema de Stokes para verificar el resultado del inciso *b*).

3.15 Integrales triples

Introducción Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional* o **integral triple** son muy similares a los pasos que llevaron a la definición de la integral doble. Desde luego existen diferencias: en lugar de una función de dos variables se integra una función f de tres variables, no sobre una región R de un plano coordenado, sino sobre una región D del espacio tridimensional.

$w = F(x, y, z)$

1. Sea F una función definida sobre una región cerrada y acotada D del espacio.
2. Por medio de una malla tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos coordenados, se forma una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k que se encuentran completamente dentro de D.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición o la longitud de la diagonal más larga de D_k.
4. Se elige un punto (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k.
5. Se genera la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k$.



Una suma de la forma $\Sigma_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k$, donde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) es un punto arbitrario dentro de cada D_k y ΔV_k denota el volumen de cada D_k, se denomina **suma de Riemann**. El tipo de partición utilizada en el paso 2, donde todos los D_k se hallan completamente dentro de D, se denomina una **partición interna** de D.

DEFINICIÓN 3.13 La integral triple

Sea F una función de tres variables definida sobre una región cerrada D del espacio. Entonces la **integral triple de F sobre D** viene dada por

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta V_k. \tag{1}$$

Al igual que en las argumentaciones previas sobre la integral, cuando F es continua sobre D, el límite en (1) existe; esto es, F es **integrable** sobre D.

Cálculo por integrales iteradas Si la región D está acotada por encima por la gráfica de $z = f_2(x, y)$ y acotada por debajo por la gráfica $z = f_1(x, y)$, puede demostrarse entonces que la integral triple (1) se expresa como una integral doble de la integral parcial $\displaystyle\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz$; esto es,

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz \right] dA,$$

donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy. En particular, si R es una región tipo I, entonces —como se muestra en la figura 3.123— la integral triple de F sobre D se escribe como una integral iterada:

$$\iiint_D F(x, y, z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\,dz\,dy\,dx. \tag{2}$$

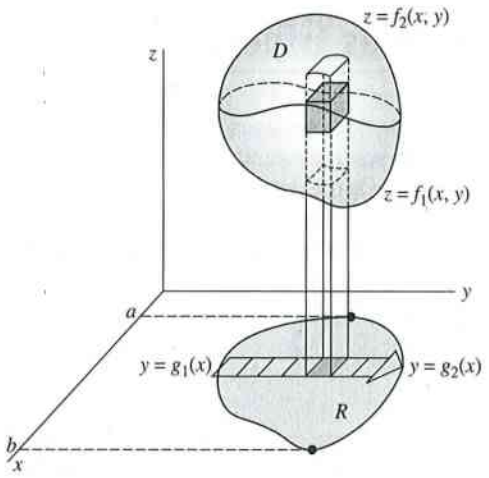


Figura 3.123 Interpretación geométrica de (2)

Para calcular la integral iterada (2) se comienza calculando la integral parcial

$$\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz,$$

en el cual *tanto x como y* se mantienen fijas.

En una integral doble, únicamente existen dos posibles órdenes de integración: $dy\, dx$ y $dx\, dy$. La integral triple en (2) ilustra uno de los *seis* posibles órdenes de integración:

$$dz\, dy\, dx, \quad dz\, dx\, dy, \quad dy\, dx\, dz,$$

$$dx\, dy\, dz, \quad dx\, dz\, dy, \quad dy\, dz\, dx.$$

Las últimas dos diferenciales indican el plano coordenado en el que se sitúa la región R. Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\, dz\, dy$ debe tener la forma

$$\int_c^d \int_{k_1(y)}^{k_2(y)} \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} F(x, y, z)\, dx\, dz\, dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y de la región R de integración en el plano yz se muestra en la figura 3.124.

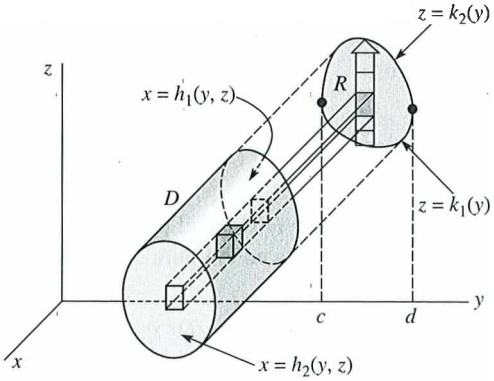


Figura 3.124 Integración: primero x, luego z y finalmente y

■ **Aplicaciones** A continuación se muestra una lista de algunas de las aplicaciones estándar de la integral triple:

Volumen

Si $F(x, y, z) = 1$, entonces el **volumen** del sólido D es

$$V = \iiint_D dV.$$

Masa

Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad, entonces la **masa** del sólido D viene dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dV.$$

Primeros momentos

Los **primeros momentos** del sólido respecto a los planos coordenados indicados por los subíndices vienen dados por

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\, dV, \qquad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\, dV,$$

$$M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\, dV.$$

Centro de masa

Las coordenadas del **centro de masa** de D vienen dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroide

Si $\rho(x, y, z) =$ constante, el centro de masa se denomina el **centroide** del sólido.

Segundos momentos

Los **segundos momentos**, o **momentos de inercia** de D respecto a los ejes coordenados indicados por los subíndices, vienen dados por

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dV.$$

Radio de giro

Igual que en la sección 3.10, si I es el momento de inercia del sólido respecto a un eje determinado, entonces el **radio de giro** es

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

Ejemplo 1 Volumen de un sólido

Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$.

Solución Como se indica en la figura 3.125*a*), la primera integración respecto a z es desde 0 hasta $1 - y^2$. Además, de la figura 3.125*b*) se observa que la proyección del sóli-

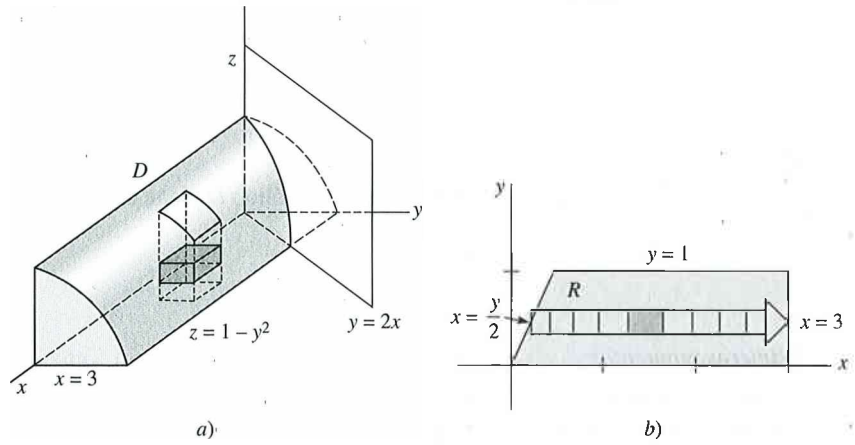


Figura 3.125 Sólido D y región R de integración en el ejemplo 1

do D en el plano xy es una región tipo II. Por lo tanto, a continuación se integra, respecto a x, desde $y/2$ hasta 3. La última integración es respecto a y desde 0 hasta 1. Entonces,

$$V = \iiint_D dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[x - xy^2\right]_{y/2}^3 dy$$

$$= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy$$

$$= \left[3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 = \frac{15}{8} \text{ unidades cúbicas}$$ ❑

Ejemplo 2 Cambio del orden de integración

Cambie el orden de integración en

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

a $dy\, dx\, dz$.

Solución Como se muestra en la figura 3.126*a*), la región D es el sólido del primer octante acotado por los tres planos coordenados y por el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Respecto de la figura 3.126*b*) y la tabla, se concluye que

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3 \int_0^{6-2z} \int_0^{4-2x/3-4z/3} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Orden de integración	Primera integración	Segunda integración	Tercera integración
$dz\ dy\ dx$	De 0 a $3 - x/2 - 3y/4$	De 0 a $4 - 2x/3$	De 0 a 6
$dy\ dx\ dz$	De 0 a $4 - 2x/3 - 4z/3$	De 0 a $6 - 2z$	De 0 a 3

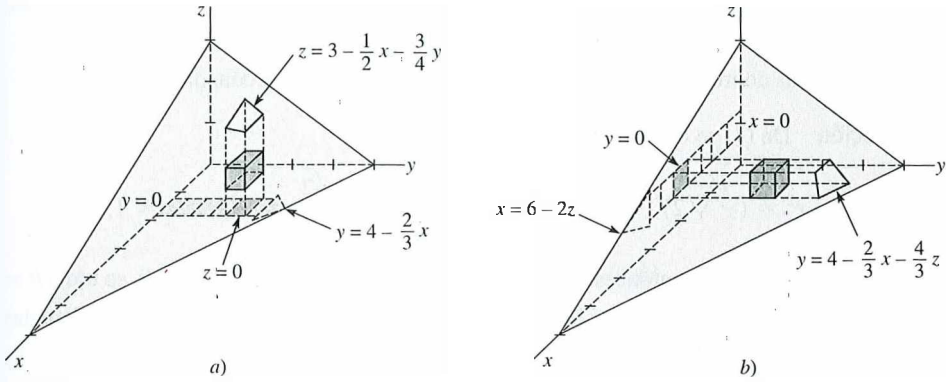


Figura 3.126 Cambio del orden de integración en el ejemplo 2 ❑

Dependiendo de la geometría de una región en el espacio tridimensional, el cálculo de una integral triple sobre dicha región puede realizarse más fácilmente utilizando un nuevo sistema coordenado.

■ **Coordenadas cilíndricas** El **sistema coordenado cilíndrico** combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de su componente z en el espacio. Como se muestra en la figura 3.127*a*), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan por la tripleta ordenada (r, θ, z). La palabra *cilíndrico* sugiere que un punto P en el espacio se determina mediante la intersección de los planos z = constante y θ = constante con un cilindro de r = constante; véase la figura 3.127*b*).

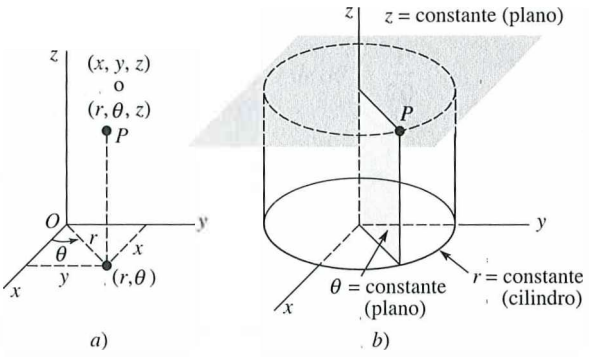


Figura 3.127 Coordenadas cilíndricas.

■ **Conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares** De la figura 3.127*a*) se ve también que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto pueden obtenerse a partir de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por medio de

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad z = z. \tag{3}$$

Ejemplo 3 De coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convierta las coordenadas cilíndricas $(8, \pi/3, 7)$ a coordenadas rectangulares.

Solución De (3),

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4, \quad y = 8\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}, \quad z = 7.$$

Así, $(8, \pi/3, 7)$ es equivalente a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares. ❑

■ **Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas** Para expresar coordenadas rectangulares (x, y, z) como coordenadas cilíndricas, se usa

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{4}$$

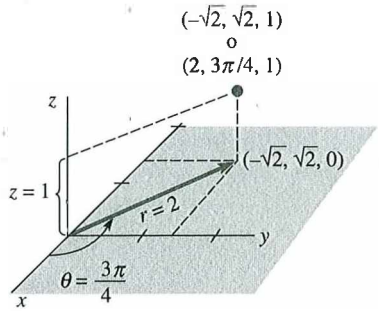


Figura 3.128 Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas en el ejemplo 4

Ejemplo 4 De coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convierta las coordenadas rectangulares $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución De (4) se observa que

$$r^2 = (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4, \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1, \qquad z = 1.$$

Si se considera $r = 2$, entonces, de manera congruente con que $x < 0$ y $y > 0$, se toma $\theta = 3\pi/4$.* En consecuencia, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ es equivalente a $(2, 3\pi/4, 1)$ en coordenadas cilíndricas; véase la figura 3.128. ❑

■ **Integrales triples en coordenadas cilíndricas** Recuérdese de la sección 3.11 que el área de un **rectángulo polar** es $\Delta A = r^* \Delta r \Delta\theta$, donde r^* es el radio promedio. De la figura 3.129*a*) se observa que el volumen de una **cuña cilíndrica** es simplemente $\Delta V =$ (área de la base)(altura) $= r^* \Delta r \Delta\theta \Delta z$. Así, si $F(r, \theta, z)$ es una función continua sobre la región D, como se muestra en la figura 3.129*b*), entonces la integral triple de F sobre D viene dada por

$$\iiint_D F(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z)\, dz \right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(r,\theta)}^{f_2(r,\theta)} F(r, \theta, z) r\, dz\, dr\, d\theta.$$

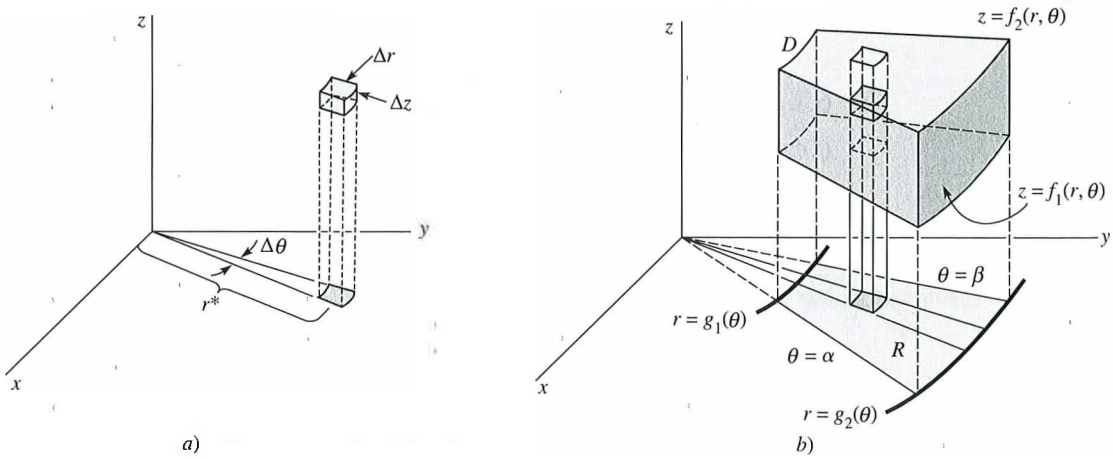


Figura 3.129 *a*) Cuña cilíndrica; *b*) región D

Ejemplo 5 Centro de masa

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ y $y = 0$. Encuentre el centro de masa si la densidad viene dada por $\rho(r, \theta, z) = r$.

*Si se utiliza $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, entonces se puede emplear $r = -2$. Obsérvese que las combinaciones $r = 2$, $\theta = -\pi/4$ y $r = -2$, $\theta = 3\pi/4$ son inconsistentes.

Solución Tomando en consideración (4), la ecuación del cono es $z = r$. Por lo tanto, de la figura 3.130 se ve que

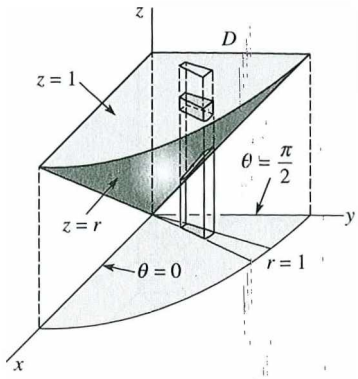


Figura 3.130 Sólido del ejemplo 5

$$m = \iiint_D r\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r(r\,dz\,dr\,d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 z\Big]_r^1 dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^3)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{24}$$

$$M_{xy} = \iiint_D zr\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr^2\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}r^2\Big]_r^1 dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2 - r^4)\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{30}.$$

En las integrales para M_{xz} y M_{yz} se sustituye $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $x = r\cos\theta$:

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \operatorname{sen}\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3 \operatorname{sen}\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 z \operatorname{sen}\theta\Big]_r^1 dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^3 - r^4)\operatorname{sen}\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2\cos\theta\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 r^3\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{20}.$$

En consecuencia,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{1/20}{\pi/24} \approx 0.38, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi/30}{\pi/24} \approx 0.8.$$

El centro de masa tiene coordenadas (0.38, 0.38, 0.8), aproximadamente. ❑

■ **Coordenadas esféricas** Como se aprecia en la figura 3.131*a*), las **coordenadas esféricas** de un punto P vienen dadas por la tripleta ordenada (ρ, ϕ, θ), donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta la proyección vectorial $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$.* La figura 3.131*b*) muestra que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de un cono ϕ = constante, un plano θ = constante y una esfera ρ = constante; de ahí el nombre de coordenadas "esféricas".

*θ es el mismo ángulo que el de las coordenadas polares y las cilíndricas.

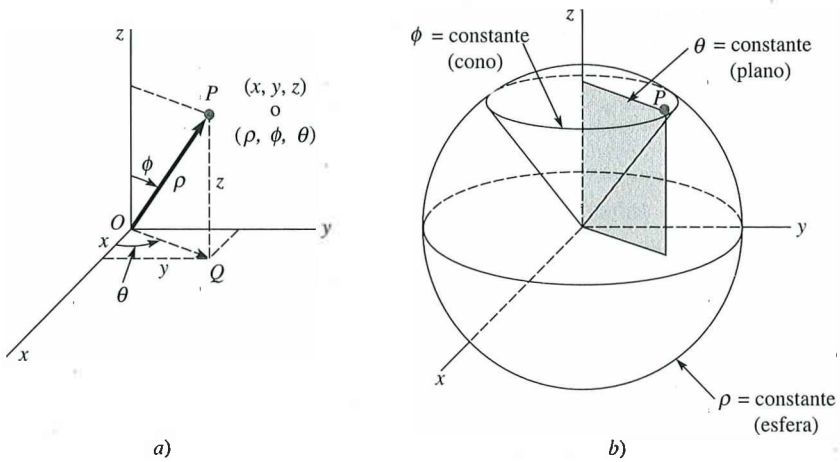


Figura 3.131 Coordenadas esféricas

■ **Conversión de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas** Para transformar coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z), se observa de la figura 3.131*a*) que

$$x = \| \overrightarrow{OQ} \| \cos\theta, \qquad y = \| \overrightarrow{OQ} \| \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \| \overrightarrow{OP} \| \cos\phi.$$

Como $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \operatorname{sen}\phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho \cos\phi. \tag{5}$$

Es usual considerar $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. También, como $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \operatorname{sen}\phi = r$, las fórmulas

$$r = \rho \operatorname{sen}\phi, \qquad \theta = \theta, \qquad z = \rho \cos\phi, \tag{6}$$

nos permiten transformar de coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas cilíndricas (r, θ, z).

Ejemplo 6 De coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas

Convierta las coordenadas esféricas $(6, \pi/4, \pi/3)$ a coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Solución Sustituyendo $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, se encuentra utilizando (5) que las coordenadas rectangulares del punto vienen dadas por

$$x = 6 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \qquad y = 6 \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \qquad z = 6\cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}.$$

De (6) se obtiene

$$r = 6\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}, \qquad z = 6\cos\frac{\pi}{4} = 3\sqrt{2}.$$

Así, las coordenadas cilíndricas del punto son $(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2})$. ❑

■ **Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas** Para transformar coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas, se utiliza

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{7}$$

■ **Integrales triples en coordenadas esféricas** Como se ve en la figura 3.132, el volumen de una **cuña esférica** está dado por la siguiente aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta\rho \, \Delta\phi \, \Delta\theta.$$

Así, en la integral triple de una función $F(\rho, \phi, \theta)$ continua en coordenadas esféricas, el diferencial de volumen dV se expresa como

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Una integral triple típica en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{f_1(\phi,\theta)}^{f_2(\phi,\theta)} F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

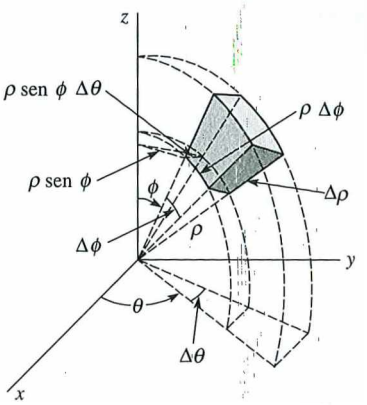


Figura 3.132 Cuña esférica

Ejemplo 7 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido homogéneo que se localiza entre las esferas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \qquad a < b.$$

Solución Si $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$ es la densidad,* entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\, k \, dV.$$

De (5) se encuentra que $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ y $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$. Así que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$; véase la figura 3.133. En consecuencia, la anterior integral se convierte, para coordenadas esféricas, en

$$\begin{aligned}
I_z &= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi(\rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta) \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_a^b \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\
&= k \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi \Big]_a^b d\phi \, d\theta \\
&= \frac{k}{5}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \phi) \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta \\
&= \frac{k}{5}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} \left[-\cos \phi + \frac{1}{3}\cos^3 \phi \right]_0^{\pi} d\theta \\
&= \frac{4k}{15}(b^5 - a^5) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8\pi k}{15}(b^5 - a^5).
\end{aligned}$$

❑

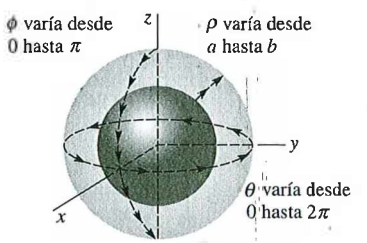


Figura 3.133 Límites de integración para el ejemplo 7

Comentarios

Las coordenadas esféricas se utilizan en navegación. Si se piensa en la Tierra como una esfera de radio fijo con centro en el origen, entonces un punto P puede localizarse especificando dos ángulos, θ y ϕ. Como muestra la figura 3.134, la curva que resulta de mantener constante ϕ se denomina **paralelo**. Valores fijos de θ generan a su vez curvas llamadas **grandes círculos**. La mitad de uno de estos grandes círculos que unen a los polos norte y sur se denomina **meridiano**. La intersección de un paralelo y un meridiano da la posición de un punto P. Si $0° \le \phi \le 180°$ y $-180° \le \theta \le 180°$, entonces se dice que los ángulos $90° - \phi$ y θ son la **latitud** y la **longitud** de P, respectivamente. El **meridiano cero** corresponde a una longitud de 0°. La latitud del ecuador es 0°; las latitudes de los polos norte y sur son, respectivamente, +90° (o 90° norte) y −90° (o 90° sur).

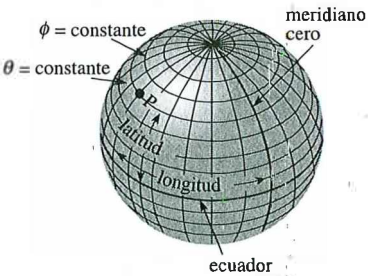


Figura 3.134 Paralelos y grandes círculos

*Se debe utilizar un símbolo diferente para la densidad, con objeto de evitar confusión con el símbolo ρ de las coordenadas esféricas.

EJERCICIOS 3.15 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas del 1 al 8, calcule la integral iterada propuesta.

1. $\int_{2}^{4}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$
2. $\int_{1}^{3}\int_{1}^{x}\int_{-2}^{xy}24xy\,dz\,dy\,dx$
3. $\int_{0}^{6}\int_{0}^{6-x}\int_{0}^{6-x-z}dy\,dz\,dx$
4. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x}\int_{0}^{\sqrt{y}}4x^2z^3\,dz\,dy\,dx$
5. $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)dz\,dx\,dy$
6. $\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{y}}^{2}\int_{0}^{e^{x^2}}x\,dz\,dx\,dy$
7. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2-x^2-y^2}xye^z dz\,dx\,dy$
8. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{1/2}\int_{0}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dy\,dx\,dz$
9. Calcule $\iiint_D z\,dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$.
10. Calcule $\iiint_D (x^2 + y^2)\,dV$, donde D es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $z = 4 - y$ y $z = 0$.

En los problemas 11 y 12, cambie el orden indicado de integración a cada una de las cinco formas restantes de ordenar.

11. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2y}\int_{x+2y}^{4}F(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
12. $\int_{0}^{2}\int_{\pi/2}^{\sqrt{36-9x^2}}\int_{1}^{3}F(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

En los problemas 13 y 14, considere el sólido indicado en la figura. Plantee, pero no calcule, las integrales que dan el volumen V del sólido utilizando las formas indicadas de ordenar la integración.

13.

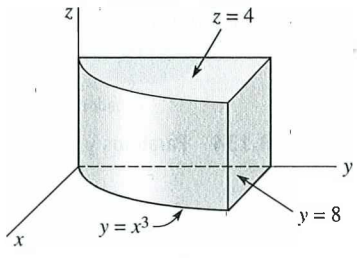


Figura 3.135 Sólido del problema 13

a) $dz\,dy\,dx$ *b*) $dx\,dz\,dy$ *c*) $dy\,dx\,dz$

14.

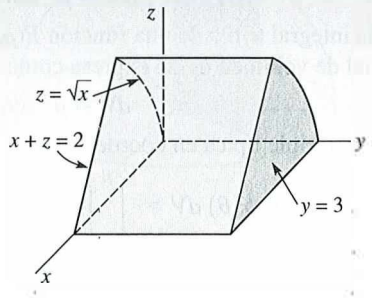


Figura 3.136 Sólido del problema 14

a) $dx\,dz\,dy$ *b*) $dy\,dx\,dz$ *c*) $dz\,dx\,dy$

[*Sugerencia:* El inciso *c*) requiere de dos integrales.]

En los problemas del 15 al 20, bosqueje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\int_{0}^{4}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2-2z/3}dx\,dz\,dy$
16. $4\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{4}^{\sqrt{25-x^2-y^2}}dz\,dx\,dy$
17. $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{5}dz\,dy\,dx$
18. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4}dz\,dy\,dx$
19. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2-y}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}dx\,dz\,dy$
20. $\int_{1}^{3}\int_{0}^{1/x}\int_{0}^{3}dy\,dz\,dx$

En los problemas del 21 al 24, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2$; $4 - x = y^2$, $z = 0$, $z = 3$
22. $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y$, los planos coordenados, el primer octante.
23. $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$
24. $x = 2$, $y = x$, $y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$
25. Encuentre el centro de masa del sólido indicado en la figura 3.135 si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.
26. Encuentre el centroide del sólido de la figura 3.136 si su densidad es constante.
27. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ y $y = 3$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xz.

28. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$, $z = y + 2$ y $z = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano xy.

En los problemas 29 y 30, plantee, pero no calcule, las integrales iteradas que dan la masa del sólido asociado a la forma y densidad indicadas.

29. $x^2 + y^2 = 1$, $z + y = 8$, $z - 2y = 2$; $\rho(x, y, z) = x + y + 4$

30. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 2$; $\rho(x, y, z) = z^2$ [*Sugerencia:* No utilice $dz\,dy\,dx$.]

31. Encuentre el momento de inercia del sólido de la figura 3.135 respecto al eje y si la densidad es la indicada en el problema 25. Determine el radio de giro.

32. Encuentre el momento de inercia del sólido de la figura 3.136 respecto al eje x si la densidad es constante. Determine el radio de giro.

33. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y por la gráfica $x + y + z = 1$ si la densidad es constante.

34. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje y del sólido acotado por las gráficas $z = y$, $z = 4 - y$, $z = 1$, $z = 0$, $x = 2$ y $x = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia al plano yz.

En los problemas del 35 al 38, convierta el punto indicado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

35. $\left(10, \frac{3\pi}{4}, 5\right)$

36. $\left(2, \frac{5\pi}{6}, -3\right)$

37. $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -4\right)$

38. $\left(4, \frac{7\pi}{4}, 0\right)$

En los problemas del 39 al 42, convierta el punto indicado de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

39. $(1, -1, -9)$

40. $(2\sqrt{3}, 2, 17)$

41. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$

42. $(1, 2, 7)$

En los problemas del 43 al 46, convierta la ecuación indicada a coordenadas cilíndricas.

43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

44. $x + y - z = 1$

45. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

46. $x^2 + z^2 = 16$

En los problemas del 47 al 50, convierta la ecuación indicada a coordenadas rectangulares.

47. $z = r^2$

48. $z = 2r \operatorname{sen} \theta$

49. $r = 5 \sec \theta$

50. $\theta = \pi/6$

En los problemas del 51 al 58, utilice integrales triples y coordenadas cilíndricas. En los problemas del 51 al 54, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

51. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z = 0$

52. $z = 10 - x^2 - y^2$, $z = 1$

53. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$

54. $y = x^2 + z^2$, $2y = x^2 + z^2 + 4$

55. Encuentre el centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

56. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$ y $x = 5$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al plano yz.

57. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido acotado por encima por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 2$, si la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al eje z.

58. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje x del sólido acotado por el cono $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ y el plano $z = 1$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al eje z.

En los problemas del 59 al 62, convierta el punto indicado de coordenadas esféricas a: *a*) coordenadas rectangulares y *b*) coordenadas cilíndricas.

59. $\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

60. $\left(5, \frac{5\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$

61. $\left(8, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$

62. $\left(\frac{1}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$

En los problemas del 63 al 66, convierta los puntos indicados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

63. $(-5, -5, 0)$

64. $(1, -\sqrt{3}, 1)$

65. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

66. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right)$

En los problemas del 67 al 70, convierta las ecuaciones indicadas a coordenadas esféricas.

67. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$

68. $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

69. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$

70. $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los problemas del 71 al 74, convierta las ecuaciones indicadas a coordenadas rectangulares.

71. $\rho = 10$

72. $\phi = \pi/3$

73. $\rho = 2 \sec \phi$

74. $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$

En los problemas del 75 al 82, utilice integrales triples y coordenadas esféricas. En los problemas del 75 al 78, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

75. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

76. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y = x$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 0$, primer octante

77. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, primer octante

78. Interiormente $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y exteriormente $z^2 = x^2 + y^2$

79. Encuentre el centroide del sólido homogéneo acotado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

80. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por el hemisferio $z = \sqrt{21 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al plano xy.

81. Encuentre la masa del sólido acotado por encima por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$ si la densidad en un punto P es inversamente proporcional a su distancia al origen. [*Sugerencia:* Exprese el límite superior de integración de ϕ como un arcocoseno.]

82. Encuentre el momento de inercia respecto al eje z del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ si la densidad en un punto P es directamente proporcional a su distancia al origen.

3.16 Teorema de la divergencia

Introducción En la sección 3.14 se plantea que el teorema de Stokes es una generalización tridimensional de una formulación vectorial del teorema de Green. En esta sección se presenta una segunda formulación vectorial del teorema de Green y su analogía tridimensional.

Otra formulación vectorial del teorema de Green Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial bidimensional y sea $\mathbf{T} = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j}$ un vector *unitario tangente* a una curva plana cerrada simple C. En (1) de la sección 3.14 se establece que $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds$ se calcula por medio de una integral doble que involucra a rot $\mathbf{F}$. En forma similar, si $\mathbf{n} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ es un *vector unitario normal* a C (compruebe $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$), entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ se expresa en términos de una integral doble de div $\mathbf{F}$. Del teorema de Green,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dA = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dA,$$

esto es,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA. \tag{1}$$

El resultado en (1) es un caso especial de la **divergencia** o **teorema de Gauss**. A continuación se generaliza (1) al espacio tridimensional:

TEOREMA 3.15 Teorema de la divergencia

Sea D una región cerrada y acotada en el espacio tridimensional con una frontera suave por tramos S con orientación hacia afuera. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial para el que P, Q y R son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a D. Entonces

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div}\ \mathbf{F}\, dV. \tag{2}$$

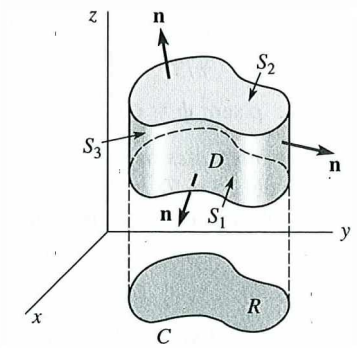


Figura 3.137 Región D utilizada en la demostración del teorema 3.15

Demostración parcial Se demuestra (2) para la región especial D, mostrada en la figura 3.137, cuya superficie S está formada de tres partes:

(parte inferior) S_1: $z = f_1(x, y)$, (x, y) en R
(parte superior) S_2: $z = f_2(x, y)$, (x, y) en R
(parte lateral) S_3: $f_1(x, y) \le z \le f_2(x, y)$, (x, y) en C,

donde R es la proyección de D sobre el plano xy, y C es la frontera de R. Como

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{y} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) + Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) + R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}),$$

se escribe

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_S Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS$$

y

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Para demostrar (2) únicamente se necesita establecer que

$$\iint_S P(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV \tag{3}$$

$$\iint_S Q(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV \tag{4}$$

$$\iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{5}$$

De hecho, se demuestra únicamente (5), ya que en las demostraciones de (3) y (4) se procede de forma similar. Ahora,

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_R \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right] dA = \iint_R [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))]\, dA. \tag{6}$$

A continuación se escribe

$$\iint_S R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{S_2} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{S_3} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Para S_1:
Puesto que la normal hacia afuera tiene sentido descendente, la superficie se describe como $g(x, y, z) = f_1(x, y) - z = 0$. Así,

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2}}.$$

De la definición de dS se tiene entonces

$$\iint_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = -\iint_R R(x, y, f_1(x, y))\, dA. \tag{7}$$

Para S_2:
La normal hacia afuera tiene sentido ascendente, de forma que

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{y entonces} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2}}.$$

de donde se obtiene

$$\iint_{S_2} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R R(x, y, f_2(x, y))\, dA. \tag{8}$$

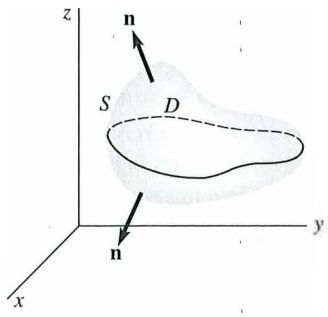


Figura 3.138 Región D sin lado vertical

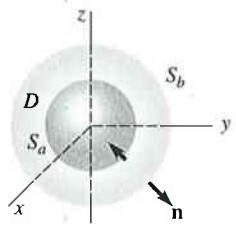


Figura 3.139 Región D acotada entre dos esferas concéntricas

Para S_3:
Como este lado es vertical, $\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$. En consecuencia, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ y

$$\iint_{S_3} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0. \tag{9}$$

Finalmente, sumando (7), (8) y (9) se tiene

$$\iint_R [R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y))]\, dA,$$

que es igual a (6). ❑

Aunque se demuestra (2) para una región especial D que tiene un lado vertical, se observa que este tipo de región no es un requisito para aplicar el teorema 3.15. Una región D sin lado vertical se ilustra en la figura 3.138; una región acotada por una esfera o un elipsoide tampoco tiene una cara vertical. El teorema de divergencia es aplicable a una región D acotada por dos superficies cerradas, tales como las esferas concéntricas S_a y S_b mostradas en la figura 3.139; la superficie S, frontera de D, es la unión de S_a y S_b. En este caso, $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV$ se convierte en

$$\iint_{S_b} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS + \iint_{S_a} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV,$$

donde $\mathbf{n}$ apunta hacia afuera de D; esto es, $\mathbf{n}$ apunta lejos del origen en S_b y $\mathbf{n}$ apunta hacia el origen en S_a.

Ejemplo 1 Verificación del teorema de la divergencia

Sea D la región acotada por el hemisferio $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$, $1 \le z \le 4$, y el plano $z = 1$. Verifique el teorema de la divergencia si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$.

Solución La región cerrada se muestra la figura 3.140.

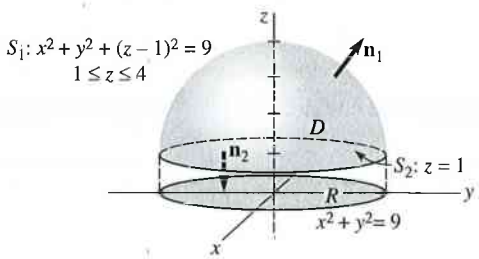


Figura 3.140 Región hemisférica D del ejemplo 1

Integral triple:
Como $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$, se tiene que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3$. Por lo tanto,

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3 \iiint_D dV = 54\pi. \tag{10}$$

En este último cálculo, se aprovecha que $\iiint_D dV$ da el volumen del hemisferio ($\frac{2}{3}\pi 3^3$).

Integral de superficie:
Se escribe $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, donde S_1 es el hemisferio y S_2 es el plano $z = 1$. Si S_1 es una superficie de nivel de $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$, entonces un vector unitario normal exterior es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z - 1}{3}\mathbf{k}.$$

Ahora
$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z - 1)^2}{3} = 3$$

y entonces
$$\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R (3)\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dA\right)$$

$$= 9\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = 54\pi. \quad \leftarrow \text{coordenadas polares}$$

Para S_2, se toma $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ de forma que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z + 1$. Pero, puesto que $z = 1$, $\iint_{S_2} (-z + 1)\, dS = 0$. Por lo tanto, se observa que $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 54\pi + 0 = 54\pi$ lo que concuerda con (10). ❑

Ejemplo 2 Uso del teorema de la divergencia

Si $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, calcule $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

Solución Véase la figura 3.114 y el problema 38 de los ejercicios 3.13. En lugar de calcular seis integrales de superficie, se aplica el teorema de la divergencia. Como div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2yz + 3z^2$, se tiene de (2) que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D (y + 2yz + 3z^2)\, dV$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2z + 3yz^2\right)\Big]_0^1 dz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right) dz = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + z^3\right)\Big]_0^1 = 2. \quad ❑$$

■ **Interpretación física de la divergencia** En la sección 3.14 se plantea que la componente normal del rotacional de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en un punto se puede expresar como un límite relacionado con la circulación de $\mathbf{F}$. A partir de (2), es posible interpretar la divergencia de $\mathbf{F}$ en un punto como un límite relacionado con el flujo de $\mathbf{F}$. Recuérdese de la sección 3.7 que el flujo del campo de velocidad $\mathbf{F}$ de un fluido es la rapidez de su flujo; esto es, el volumen de fluido que pasa a través de una superficie por unidad de tiempo. En dicha sección, se plantea que la divergencia de $\mathbf{F}$ es el flujo por unidad de volumen. Para reforzar esta última idea, supóngase que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto

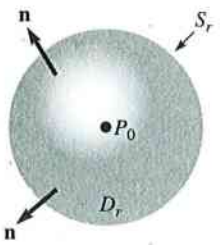


Figura 3.141 Región D_r en (11)

del fluido y que S_r es una pequeña esfera de radio r centrada en P_0; véase la figura 3.141. Si D_r es la esfera, y S_r su interior, entonces el teorema de la divergencia nos da

$$\iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_{D_r} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV. \tag{11}$$

Si se considera que, aproximadamente, $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$ en todos los puntos $P(x, y, z)$ que se hallan dentro de la pequeña esfera, entonces (11) da

$$\begin{aligned} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &\approx \iiint_{D_r} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV \\ &= \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \iiint_{D_r} dV \\ &= \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V_r, \end{aligned} \tag{12}$$

donde V_r es el volumen $(\frac{4}{3}\pi r^3)$ de la región esférica D_r. Cuando $r \to 0$, se observa de (12) que la divergencia de $\mathbf{F}$ es el valor límite del cociente entre el flujo de $\mathbf{F}$ y el volumen de la región esférica:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

Por lo tanto, la divergencia $\mathbf{F}$ es flujo por unidad de volumen.

El teorema de la divergencia es de gran utilidad en la deducción de algunas de las ecuaciones famosas de electricidad y magnetismo y de hidrodinámica. En la argumentación siguiente se toma un ejemplo del estudio de fluidos.

■ **Ecuación de continuidad** Al final de la sección 3.7 se menciona que div $\mathbf{F}$ se puede interpretar como una medida de la rapidez del cambio de la densidad de un fluido en un punto. Para comprender la razón de esta interpretación, supóngase que $\mathbf{F}$ es un campo de velocidad de un fluido y que $\rho(x, y, z, t)$ es la densidad del fluido en un punto $P(x, y, z)$ en un instante t. Sea D la región cerrada conformada por la esfera S y su interior. Se sabe de la sección 3.15 que la masa total m del fluido en D viene dada por $m = \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV$. La rapidez con la que la masa en D se incrementa se expresa como

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{13}$$

En la figura 3.39 se observa ahora que el volumen de fluido que atraviesa a un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo se aproxima a $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S$. La masa del fluido que fluye por unidad de tiempo a través de un elemento de área superficial ΔS es entonces $(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S$. Si se considera que el cambio de masa en D se debe únicamente al flujo que entra y que sale de D, entonces el *volumen del fluido* que sale de D por unidad de tiempo viene dado por (10) de la sección 3.13, $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, mientras que la *masa del fluido* que sale de D por unidad de tiempo es $\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$. Por lo tanto, una expresión alterna para la rapidez con la que se incrementa la masa en D es

$$-\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{14}$$

Por el teorema de la divergencia, (14) es igual que

$$-\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\, dV. \tag{15}$$

Igualando (13) y (15) se obtiene entonces

$$\iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\, dV \quad \text{o} \quad \iiint_D \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{F}) \right) dV = 0.$$

Como este último resultado debe ser válido para cualquier esfera, se obtiene la **ecuación de continuidad** para flujos de fluidos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{F}) = 0. \tag{16}$$

En la página 189 se establece que si div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces un fluido es incompresible, lo cual se deduce directamente de (16). Si un fluido es incompresible (como el agua), entonces ρ es constante, por lo que $\nabla \cdot (\rho \mathbf{F}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{F}$. Pero, además, $\partial \rho / \partial t = 0$ por lo que (16) implica que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

EJERCICIOS 3.16 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

En los problemas 1 y 2, verifique el teorema de la divergencia.

1. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$
2. $\mathbf{F} = 6xy\,\mathbf{i} + 4yz\,\mathbf{j} + xe^{-y}\mathbf{k}$; D es la región acotada por los tres planos coordenados y por el plano $x + y + z = 1$

En los problemas del 3 al 14, utilice el teorema de la divergencia para encontrar el flujo saliente $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ del campo vectorial $\mathbf{F}$ indicado.

3. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
4. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\,\mathbf{k}$; D es la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
5. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} + (z-1)^2\,\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 1, z = 5$
6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2yz\,\mathbf{j} + 4z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por el paralelepípedo definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$
7. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D es la región acotada dentro de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$
8. $\mathbf{F} = (x^2 + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; D es la región acotada por $y = x^2, z = 9 - y, z = 0$
9. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)$; D es la región acotada por las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $b > a$
10. $\mathbf{F} = 2yz\,\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
11. $\mathbf{F} = 2xz\,\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por $z = y$, $z = 4 - y$, $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$, $x = 0$, $z = 0$. véase la figura 3.142.

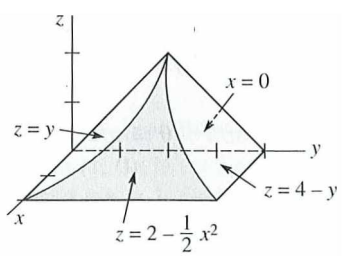


Figura 3.142 Región D del problema 11

12. $\mathbf{F} = 15x^2y\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$; D es la región acotada por $x + y = 2, z = x + y, z = 3, x = 0, y = 0$
13. $\mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 6zxy^2\mathbf{k}$; D es la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$
14. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + 6 \operatorname{sen} x\,\mathbf{k}$; D es la región acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 2, z = 4$
15. El campo eléctrico en un punto $P(x, y, z)$ debido a una carga puntual q localizada en el origen viene dado por el campo cuadrático inverso

$$E = q\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3},$$

donde $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

a) Supóngase que S es una superficie cerrada, que S_a es una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ completamente dentro de S y que D es la región acotada entre S y S_a; véase la figura 3.143. Demuestre que el flujo saliente de $\mathbf{E}$ para la región D es cero.

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para demostrar la **ley de Gauss**:

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\, dS = 4\pi q,$$

esto es, el flujo saliente del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través de *cualquier* superficie cerrada (para la cual sea aplicable el teorema de la divergencia) que contenga al origen es $4\pi q$.

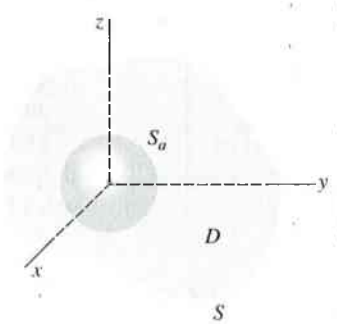


Figura 3.143 Región D del problema 15*a*)

16. Supóngase que existe una distribución continua de carga a través de una región acotada y cerrada D encerrada por

una superficie S. Entonces, la extensión natural de la ley de Gauss viene dada por

$$\iint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_D 4\pi\rho\, dV,$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de la carga, o carga por unidad de volumen.

a) Procédase como en la deducción de la ecuación de continuidad (16) para demostrar que div $\mathbf{E} = 4\pi\rho$.

b) Puesto que $\mathbf{E}$ es un campo vectorial irrotacional, demuestre que el potencial ϕ para $\mathbf{E}$ satisface la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$.

En los problemas del 17 al 21, considere que S es la frontera de una región cerrada y acotada D.

17. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demuestre que $\iint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0$.

18. Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ y P, Q y R tienen segundas derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 0.$$

En los problemas 19 y 20, considere que f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas. Utilice el teorema de la divergencia para establecer las **identidades de Green**.

19. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$

20. $\displaystyle\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$

21. Si f es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas, demuestre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\, dS = \iiint_D \nabla f\, dV$$

[*Sugerencia:* Utilice (2) en $f\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante, y el problema 27 de los ejercicios 3.7.]

22. La fuerza de flotación de un objeto flotante es $\mathbf{B} = -\iint_S p\mathbf{n}\, dS$, donde p es la presión del fluido. La presión p se relaciona con la densidad del fluido $\rho(x, y, z)$ por medio de una ley de la hidrostática: $\nabla p = \rho(x, y, z)\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración constante de la gravedad. Si el peso del objeto es $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, utilice el resultado del problema 21 para demostrar el principio de Arquímedes: $\mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$; véase la figura 3.144.

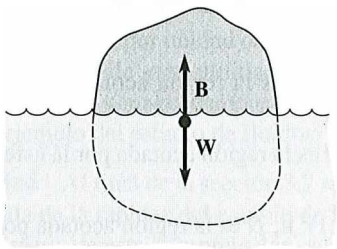


Figura 3.144 Objeto flotante del problema 22

3.17 Cambio de variables en integrales múltiples

■ **Introducción** En muchas ocasiones es conveniente, o incluso necesario, realizar una sustitución, o cambio de variable, en una integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ para poder calcularla. Si f es continua en $[a, b]$, $x = g(u)$ tiene una derivada continua y $dx = g'(u)\, du$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)\, du, \tag{1}$$

donde $c = g(a)$ y $d = g(b)$. Hay tres cuestiones que se deben subrayar en (1); para cambiar la variable de una integral definida se reemplaza x por $g(u)$ en donde aparezca el integrando, se cambia el intervalo de integración $[a, b]$ del eje x al intervalo correspondiente $[c, d]$ del eje u, y se reemplaza dx por una función múltiplo (a saber, la derivada de g) de du. Si se escribe $J(u) = dx/du$, entonces (1) tiene la forma

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_c^d f(g(u))J(u)\, du. \tag{2}$$

Por ejemplo, utilizando $x = 2 \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, se obtiene

$$\int_0^2 \overbrace{\sqrt{4 - x^2}}^{f(x)}\, dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{2\cos\theta}^{f(2\operatorname{sen}\theta)}\, \overbrace{(2\cos\theta)}^{J(\theta)}\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \pi.$$

(x-límites: 0, 2; θ-límites: 0, $\pi/2$)

■ **Integrales dobles** Aunque cambiar variables en una integral múltiple no es tan directo como el procedimiento (1), la idea básica ilustrada en (2) se mantiene. Para cambiar variables en una integral doble se necesitan dos ecuaciones como las siguientes

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v). \tag{3}$$

En analogía con (2), se espera que un cambio de variables en una integral doble tome la siguiente forma

$$\iint_R F(x, y)\, dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v))\, J(u, v)\, dA', \tag{4}$$

donde S es la región en el plano uv correspondiente a la región R del plano xy, y $J(u, v)$ es una función que depende de las derivadas parciales de las ecuaciones (3). El símbolo dA' del lado derecho de (4) representa a $du\, dv$ o a $dv\, du$.

En la sección 3.11, se argumenta brevemente cómo cambiar una integral doble $\iint_R F(x, y)\, dA$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Recuérdese que en el ejemplo 2 de dicha sección las siguientes sustituciones

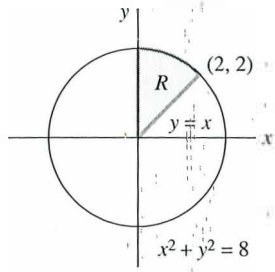
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{5}$$

conducen a

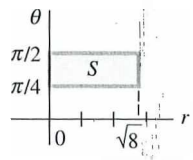
$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\, r\, dr\, d\theta. \tag{6}$$

Como se ve en la figura 3.145, la introducción de coordenadas polares cambia la región original de integración R del plano xy a la más conveniente región rectangular de integración S en el plano $r\theta$. Se observa también que, comparando (4) con (6), se pueden plantear las siguientes igualdades: $J(r, \theta) = r$ y $dA' = dr\, d\theta$.

Las ecuaciones para cambio de variable (3) definen una **transformación (o función)** T del plano uv al plano xy. Se dice que un punto (x_0, y_0) del plano xy, determinado a partir de $x_0 = f(u_0, v_0)$ y $y_0 = g(u_0, v_0)$, es una **imagen** de (u_0, v_0).



a) Región R del plano xy



b) Región S del plano $r\theta$

Figura 3.145 Región S utilizada para calcular (6)

Ejemplo 1 Imagen de una región

Encuentre la imagen de la región S mostrada en la figura 3.146*a*) bajo la transformación $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

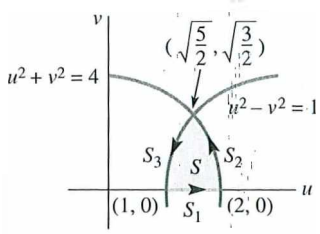
Solución Se comienza encontrando las imágenes de los lados de S indicadas por S_1, S_2 y S_3.

S_1: En esta cara $v = 0$, de forma que $x = u^2$, $y = u^2$. Eliminando entonces u se obtiene $y = x$. Imaginando ahora el movimiento a lo largo de la frontera desde (1, 0) hasta (2, 0) (esto es, $1 \le u \le 2$), las ecuaciones $x = u^2$, $y = u^2$ indican que x se encuentra en el intervalo de $x = 1$ a $x = 4$ y que, simultáneamente, y se encuentra en el intervalo de $y = 1$ a $y = 4$. En otras palabras, en el plano xy la imagen de S_1 es el segmento de línea $y = x$ de (1, 1) a (4, 4).

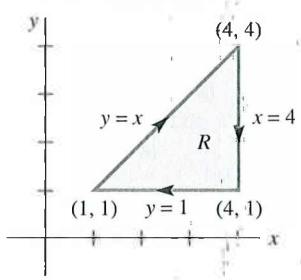
S_2: En esta frontera $u^2 + v^2 = 4$ y, por lo tanto, $x = 4$. Al moverse ahora del punto (2, 0) al $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, la ecuación restante $y = u^2 - v^2$ indica que y se encuentra en el intervalo de $y = 2^2 - 0^2 = 4$ a $y = (\sqrt{\frac{5}{2}})^2 - (\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 1$. En este caso, la imagen de S_2 es el segmento de la línea vertical $x = 4$ que comienza en (4, 4) y desciende hasta (4, 1).

S_3: Como $u^2 - v^2 = 1$, se tiene que $y = 1$. Pero al recorrer esta frontera desde $(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, hasta (1, 0), la ecuación $x = u^2 + v^2$ indica que x se encuentra en el intervalo de $x = 4$ a $x = 1$. La imagen de S_3 es el segmento de la línea horizontal $y = 1$ que comienza en (4, 1) y finaliza en (1, 1).

La imagen de S es la región R indicada en la figura 3.146*b*). ❑



a)



b)

Figura 3.146 La región R es la imagen de la región S en el ejemplo 1

Obsérvese en el ejemplo 1 que al recorrer la frontera de S en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, la frontera de R se va recorriendo en el sentido de las manecillas del reloj. Se dice que la transformación de la frontera de S ha *inducido* una orientación en la frontera de R.

Aunque la demostración de la fórmula para el cambio de variables en una integral múltiple rebasa el alcance de este libro, se indican *algunas* de las consideraciones de fondo que se realizan al respecto de las ecuaciones (3) y de las regiones R y S. Se considera que:

- Las funciones f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en S.
- La transformación es uno a uno.
- Cada una de las regiones R y S consta de una curva simple cerrada suave por tramos y su interior.
- El determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{7}$$

no es cero en S.

Se dice que una transformación T es **uno a uno** si cada punto (x_0, y_0) en R es la imagen bajo T de un punto único (u_0, v_0) en S. Dicho de otra forma, no existen dos puntos en S que tengan la misma imagen en R. Considerando las restricciones $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, las ecuaciones (5) definen una transformación uno a uno del plano $r\theta$ al plano xy. El determinante (7) se denomina **Jacobiano** de la transformación T y es la clave para el cambio de variables en una integral múltiple. El Jacobiano de la transformación definida por las ecuaciones (3) se denota con el símbolo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

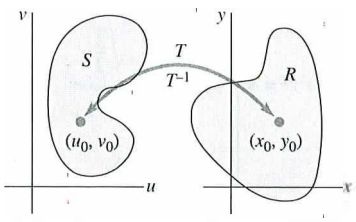


Figura 3.147 Transformación T y su inversa

En forma similar al concepto de función uno a uno, una transformación uno a uno T tiene una **transformación inversa** T^{-1} tal que (u_0, v_0) es la imagen bajo T^{-1} de (x_0, y_0); véase la figura 3.147. Si es posible resolver (3) para u y v en función de x y y, entonces la transformación inversa se define por medio de un par de ecuaciones

$$u = h(x, y), \qquad v = k(x, y). \tag{8}$$

El Jacobiano de la transformación inversa T^{-1} es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{9}$$

y se relaciona con el Jacobiano de la transformación T por medio de

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1. \tag{10}$$

Ejemplo 2 Jacobiano

El Jacobiano de la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r. \qquad \square$$

A continuación, nos abocamos al punto central de esta argumentación: cómo cambiar variables en una integral múltiple. La idea expresada en (4) es válida; la función $J(u, v)$ resulta ser $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. Tomando en cuenta las consideraciones realizadas anteriormente, se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 3.16 Cambio de variables en una integral doble

Si F es continua en R, entonces

$$\iint_R F(x, y)\, dA = \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA'. \tag{11}$$

La fórmula (3) de la sección 3.11 para cambiar una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de (11), con

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = |r| = r,$$

ya que $r \geq 0$. Se tiene entonces en (6) que $J(r, \theta) = |\partial(x, y)/\partial(r, \theta)| = r$.

Puede realizarse un cambio de variables en una integral múltiple para simplificar el integrando o bien para simplificar la región de integración. El cambio de variables utilizado se inspira usualmente en la estructura del integrando $F(x, y)$ o en las ecuaciones que definen la región R. Como consecuencia, la transformación se define entonces por ecuaciones de la forma dada en (8); esto es, se trabaja con la transformación inversa. Los siguientes dos ejemplos ilustran estas ideas.

Ejemplo 3 Cambio de variables en una integral doble

Calcúlese $\iint_R \operatorname{sen}(x + 2y) \cos(x - 2y)\, dA$ sobre la región R mostrada en la figura 3.148*a*).

Solución La dificultad para calcular esta integral doble radica claramente en el integrando. La presencia de los términos $x + 2y$ y $x - 2y$ nos anima a definir el cambio de variables $u = x + 2y$, $v = x - 2y$. Estas ecuaciones tranforman a R en una región S del plano uv. Como en el ejemplo 1, se transforman las caras de la región.

S_1: $y = 0$ implica que $u = x$, $v = x$ o $v = u$. Al pasar de $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$, se observa que los puntos imagen correspondientes del plano uv caen en un segmento de la línea $v = u$, desde $(2\pi, 2\pi)$ hasta $(0, 0)$.

S_2: $x = 0$ implica que $u = 2y$, $v = -2y$, o $v = -u$. Al pasar de $(0, 0)$ a $(0, \pi)$, los puntos imagen correspondientes del plano uv caen en un segmento de la línea $v = -u$, de $(0, 0)$ a $(2\pi, -2\pi)$.

S_3: $x + 2y = 2\pi$ implica que $u = 2\pi$. Al pasar de $(0, \pi)$ a $(2\pi, 0)$, la ecuación $v = x - 2y$ muestra que v se encuentra entre $v = -2\pi$ y $v = 2\pi$. Por lo tanto, la imagen de S_3 es el segmento de la línea vertical $u = 2\pi$ que comienza en $(-2\pi, -2\pi)$ y sube hasta $(2\pi, 2\pi)$; véase la figura 3.148*b*).

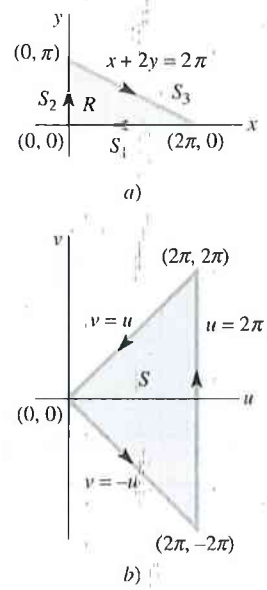


Figura 3.148 La región S es la imagen de la región R del ejemplo 3

Ahora, despejando x y y en función de u y v, se obtiene

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{4}(u - v).$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, de (11) se encuentra que

$$\iint_R \operatorname{sen}(x+2y)\cos(x-2y)\,dA = \iint_S \operatorname{sen} u \cos v \left|-\frac{1}{4}\right| dA'$$

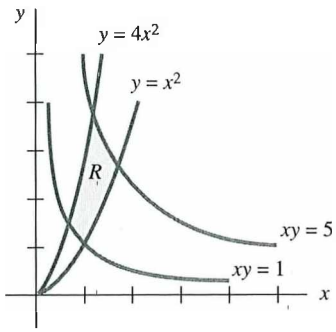
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-u}^{u} \operatorname{sen} u \cos v\, dv\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \Big]_{-u}^{u} du$$

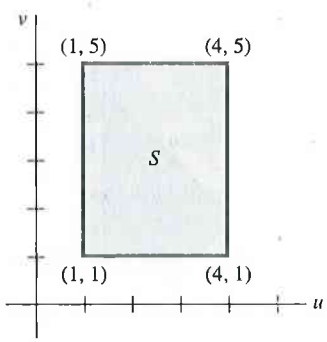
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1-\cos 2u)\, du$$

$$= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$



a)



b)

Figura 3.149 La región S es la imagen de la región R del ejemplo 4

Ejemplo 4 Cambio de variables en una integral doble

Calcule $\iint_R xy\,dA$ sobre la región R mostrada en la figura 3.149*a*).

Solución En este caso el integrando es relativamente simple, pero la integración sobre la región R sería tediosa al tener que expresar $\iint_R xy\,dA$ como la suma de tres integrales (verifique esto).

Las ecuaciones de las fronteras de R sugieren el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{y}{x^2}, \quad v = xy. \tag{12}$$

En este caso la imagen de R se obtiene directamente, puesto que las imágenes de las curvas que forman las cuatro fronteras son simplemente $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = 5$. En otras palabras, la imagen de la región R es la región rectangular S: $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 5$; véase la figura 3.149*b*).

Ahora, en lugar de intentar resolver la ecuación (12) para x y y en función de u y v, se puede calcular el Jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ evaluando $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ y aplicando (10). Se tiene

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2},$$

y entonces, de (10),

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{x^2}{3y} = -\frac{1}{3u}.$$

Por lo tanto,

$$\iint_R xy\,dA = \iint_S v\left|-\frac{1}{3u}\right| dA'$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4\int_1^5 \frac{v}{u}\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{v^2}{2u}\Big]_1^5 du$$

$$= 4\int_1^4 \frac{1}{u}du = 4\ln u\Big]_1^4 = 4\ln 4. \qquad \square$$

■ **Integrales triples** Para cambiar variables en una integral triple, sea

$$x = f(u, v, w), \qquad y = g(u, v, w), \qquad z = h(u, v, w),$$

una transformación uno a uno T de una región E del espacio uvw a una región D del espacio xyz. Si F es continua en D, entonces

$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV = \iiint_E F(f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dV'$$

donde

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Se deja como ejercicio demostrar que si T es la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares, definida por

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi, \tag{13}$$

entonces

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen}\phi.$$

EJERCICIOS 3.17 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

1. Considérese una transformación T definida por $x = 4u - v$, $y = 5u + 4v$. Encuentre las imágenes de los puntos $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(4, 0)$ y $(4, 2)$ en el plano uv bajo T.
2. Considérese una transformación T definida por $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$. Encuentre las imágenes de los puntos $(1, 1)$, $(1, 3)$ y $(\sqrt{2}, 2)$ en el plano xy bajo T^{-1}.

En los problemas del 3 al 6, encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación indicada.

3. S: $0 \le u \le 2, 0 \le v \le u$; $x = 2u + v$, $y = u - 3v$
4. S: $-1 \le u \le 4, 1 \le v \le 5$; $u = x - y$, $v = x + 2y$
5. S: $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2$; $x = u^2 - v^2$, $y = uv$
6. S: $1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2$; $x = uv$, $y = v^2$

En los problemas del 7 al 10, encuentre el Jacobiano de la transformación T del plano uv al plano xy.

7. $x = ve^{-u}$, $y = ve^{u}$
8. $x = e^{3u} \operatorname{sen} v$, $y = e^{3u}\cos v$
9. $u = \dfrac{y}{x^2}$, $v = \dfrac{y^2}{x}$
10. $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{-2y}{x^2 + y^2}$
11. *a*) Encuentre la imagen de la región S: $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$ bajo la transformación $x = u - uv$, $y = uv$.

    b) Explique por qué la transformación no es uno a uno en la frontera de S.
12. Determine dónde es cero el Jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de la transformación del problema 11.

En los problemas del 13 al 22, calcule la integral indicada por medio del cambio de variables propuesto.

13. $\iint_R (x + y)\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x - 2y = -6$, $x - 2y = 6$, $x + y = -1$, $x + y = 3$; $u = x - 2y$, $v = x + y$

14. $\iint_R \frac{\cos\frac{1}{2}(x-y)}{3x+y}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x$, $y = x - \pi$, $y = -3x + 3$, $y = -3x + 6$; $u = x - y$, $v = 3x + y$

15. $\iint_R \frac{y^2}{x}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $x = y^2$, $x = \frac{1}{2}y^2$; $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$

16. $\iint_R (x^2 + y^2)^{-3}\,dA$, donde R es la región acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$; $u = \frac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ [*Sugerencia:* Genere $u^2 + v^2$.]

17. $\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = a$, $x^2 - y^2 = b$, $2xy = c$, $2xy = d$, $0 < a < b$, $0 < c < d$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

18. $\iint_R (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,xy\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = -2$; $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

19. $\iint_R \frac{x}{y + x^2}\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 1$, $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$

20. $\iint_R y\,dA$, donde R es la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(-4, 1)$; $x = 2u - 4v$, $y = 3u + v$

21. $\iint_R y^4\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$; $u = xy$, $v = y/x$

22. $\iiint_D (4z + 2x - 2y)\,dV$, donde D es el paralelepípedo $1 \le y + z \le 3$, $-1 \le -y + z \le 1$, $0 \le x - y \le 3$; $u = y + z$, $v = -y + z$, $w = x - y$

En los problemas del 23 al 26, calcule la doble integral indicada por medio de un cambio de variables adecuado.

23. $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}\,dy\,dx$

24. $\int_{-2}^0 \int_0^{x+2} e^{y^2 - 2xy + x^2}\,dy\,dx$

25. $\iint_R (6x + 3y)\,dA$, donde R es la región trapezoidal del primer cuadrante de vértices $(1, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$

26. $\iint_R (x + y)^4 e^{x-y}\,dA$, donde R es la región cuadrada de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$

27. Un problema de termodinámica consiste en encontrar el trabajo realizado por una máquina ideal de Carnot. Dicho trabajo se define como el área de la región R del primer cuadrante acotada por las isotermas $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$, y las adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, $0 < c < d$. Utilice $A = \iint_R dA$ y una sustitución adecuada para encontrar el área mostrada en la figura 3.150.

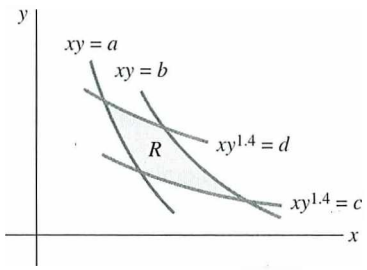


Figura 3.150 Región R del problema 27

28. Utilice $V = \iiint_D dV$ y las sustituciones $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$ para demostrar que el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

29. Calcule la integral doble $\iint_R \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}\right) dA$, donde R es la región elíptica cuya frontera es la gráfica $x^2/25 + y^2/9 = 1$. Utilice las sustituciones $u = x/5$, $v = y/3$, y coordenadas polares.

30. Verifíquese que el Jacobiano de la transformación indicada en (13) es $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \,\text{sen}\,\phi$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

Las respuestas para los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-12.

Responda los problemas del 1 al 20 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso. Donde sea pertinente, considere continuidad de P, Q y de sus primeras derivadas parciales.

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____
2. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ se encuentra en un plano. _____
3. El vector binormal es perpendicular al plano osculador. _____
4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector de velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector de aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____
5. ∇z es perpendicular a la gráfica $z = f(x, y)$. _____
6. Si $\nabla f = 0$, entonces f = constante. _____
7. La integral $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, donde C viene dado por $y = x^3$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$, tiene el mismo valor para la curva $y = x^6$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$. _____
8. El valor de la integral $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ entre dos puntos A y B depende de la trayectoria C. _____
9. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves tales que $\int_{C_1} P dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
10. Si el trabajo $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ depende de la curva C, entonces $\mathbf{F}$ es no conservativo. _____
11. Si $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
12. En un campo conservativo de fuerzas $\mathbf{F}$, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al recorrer una curva simple cerrada es cero. _____
13. Considerando continuidad en todas las derivadas parciales, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. _____
14. La integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ sobre una superficie S es igual a cero. _____
15. El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ al recorrer una curva C se debe por completo a la componente tangencial de $\mathbf{F}$. _____
16. Para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ del plano $z = 0$, el teorema de Stokes es el mismo que el teorema de Green. _____
17. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerzas conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética de un objeto es constante. _____
18. Si $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es el gradiente de una función ϕ. _____
19. Si $\phi = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ es una función potencial para un campo de fuerzas conservativo $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F}$ = _____.
20. Si $\mathbf{F} = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$, entonces rot $\mathbf{F}$ = _____.
21. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ al pasar por el plano $-x + y + z = -4$.
22. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\,\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula comienza en $t = 0$ en $(1, 2, 3)$, ¿cuál es su posición en el instante $t = 2$?
23. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{j}$. Conociendo que la velocidad y la posición de la partícula en el instante $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\,\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en el instante $t = 3\pi/4$?
24. Conociendo que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier instante t. Determine la curvatura.
25. Bosqueje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \text{senh}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$.
26. Considere que la función vectorial del problema 25 es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en el instante $t = 1$, así como la curvatura en dicho punto.

En los problemas 27 y 28, encuentre la derivada direccional de la función indicada en la dirección propuesta.

27. $f(x, y) = x^2y - y^2x$; $D_{\mathbf{u}}f$ en la dirección de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
28. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $D_{\mathbf{u}}F$ en la dirección de $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
29. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En el punto $(1, 1)$, ¿cuál es:
    a) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{i}$?
    b) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$?
    c) la rapidez con la que cambia f en la dirección de $\mathbf{j}$?
30. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
    a) Si $x = 3\,\text{sen}\,2t$, $y = 4\cos 2t$ y $z = 5t^3$, encuentre dw/dt.
    b) Si $x = 3\,\text{sen}\,2\dfrac{t}{r}$, $y = 4\cos 2\dfrac{r}{t}$ y $z = 5t^2r^3$, encuentre $\partial w/\partial t$.
31. Encuentre la ecuación del plano tangente a la gráfica
$$z = \text{sen}\,xy \text{ en } \left(\frac{1}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

32. Determine si existen puntos de la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ para los que el plano tangente es paralelo a $z = 2$.

33. Exprese el volumen del sólido mostrado en la figura 3.151 como una o más integrales iteradas, utilizando el orden de integración: *a*) $dy\,dx$ y *b*) $dx\,dy$. Elija el inciso *a*) o el *b*) para encontrar el volumen.

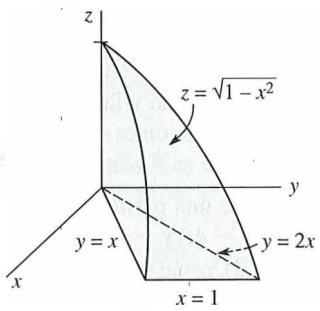


Figura 3.151 Sólido del problema 33

34. Una lámina tiene la forma de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = x^3$. Encuentre el centro de masa si la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

35. Encuentre el momento de inercia de la lámina descrita en el problema 34 respecto al eje y.

36. Encuentre el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utilizando una integral triple en: *a*) coordenadas rectangulares, *b*) coordenadas cilíndricas y *c*) coordenadas esféricas.

37. Encuentre el volumen del sólido acotado entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$ y el plano $z = 3$.

38. Encuentre el volumen del sólido mostrado en la figura 3.152.

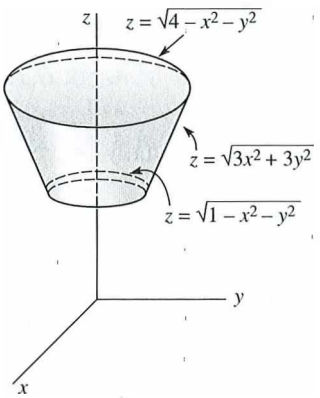


Figura 3.152 Sólido del problema 38

En los problemas del 39 al 42, encuentre la expresión indicada para el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2y\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + 2xyz\,\mathbf{k}$.

39. $\nabla \cdot \mathbf{F}$

40. $\nabla \times \mathbf{F}$

41. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$

42. $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$

43. Calcule $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2}\,ds$, donde C viene dado por

$$x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad z = 2t, \quad \pi \le t \le 2\pi$$

44. Calcule $\int_C (xy + 4x)\,ds$, donde C viene dado por $2x + y = 2$, desde $(1, 0)$ hasta $(0, 2)$.

45. Calcule $\int_C 3x^2y^2dx + (2x^3y - 3y^2)\,dy$, donde C viene dado por $y = 5x^4 + 7x^2 - 14x$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, -2)$.

46. Demuestre que $\displaystyle\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = 2\pi$, donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

47. Calcule $\int_C y \operatorname{sen} \pi z\,dx + x^2e^y\,dy + 3xyz\,dz$, donde C viene dado por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.

48. Si $\mathbf{F} = 4y\,\mathbf{i} + 6x\,\mathbf{j}$ y C viene dado por $x^2 + y^2 = 1$, calcule $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en dos formas diferentes.

49. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + y \operatorname{sen} x\,\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de los segmentos de línea que van desde $(0, 0)$ hasta $(\pi/2, 0)$ y desde $(\pi/2, 0)$ hasta $(\pi/2, \pi)$.

50. Encuentre el trabajo hecho por $\mathbf{F} = \dfrac{2}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}$ desde $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ hasta $(1, \sqrt{3})$ que actúa sobre la trayectoria mostrada en la figura 3.153.

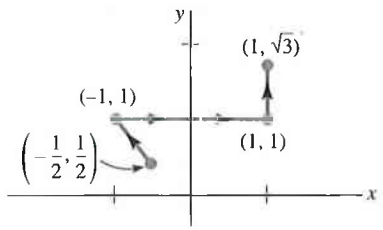


Figura 3.153 Trayectoria del problema 50

51. Calcule $\int\int_S (z/xy)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $z = x^2$ del primer octante acotada por $y = 1$, $y = 3$, $z = 1$, $z = 4$.

52. Si $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa al cuadrado $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $z = 2$.

53. Si $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $\|\mathbf{r}\| = r$, donde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ que atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

54. Explique por qué el teorema de la divergencia no es aplicable en el problema 53.

55. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$ que atraviesa una superficie S, la cual hace frontera con una región acotada cerrada del espacio que no contiene al origen.

56. Si $\mathbf{F} = 6x\,\mathbf{i} + 7z\,\mathbf{j} + 8y\,\mathbf{k}$, utilice el teorema de Stokes para calcular $\iint_S (\text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

57. Útilice el teorema de Stokes para calcular $\oint_C -2y\,dx + 3x\,dy + 10z\,dz$, donde C es el círculo $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$, $z = 3$.

58. Encuentre el trabajo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ sobre la curva C formada por la intersección del plano $z = 2 - y$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

59. Si $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, utilice el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

60. Repita el problema 59 para $\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$.

61. Si $\mathbf{F} = (x^2 - e^y \tan^{-1} z)\,\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} - (2yz + x^{10})\,\mathbf{k}$, utilice el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es la superficie de la región del primer octante acotada por $z = 1 - x^2$, $z = 0$, $z = 2 - y$, $y = 0$.

62. Suponga que $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z^2 + 1)\,\mathbf{k}$ y que S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = c$. Calcule $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$ sin la ayuda del teorema de la divergencia. [*Sugerencia:* El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi ac$.]

63. Calcule la integral $\iint_R (x^2 + y^2)\sqrt[3]{x^2 - y^2}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ por medio del cambio de variables $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$.

64. Calcule la integral $\iint_R (1/\sqrt{(x-y)^2 + 2(x+y) + 1})\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x$, $x = 2$, $y = 0$ por medio del cambio de variables $x = u + uv$, $y = v + uv$.

65. Como se muestra en la figura 3.154, una esfera de radio 1 tiene su centro en la superficie de una esfera de radio $a > 1$. Encuentre el área de la superficie de la porción de la esfera mayor que está cortada por la esfera menor.

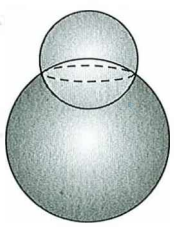


Figura 3.154 Esferas del problema 65

66. En la superficie de un globo —o para ser más precisos, en la superficie de la Tierra—, las fronteras de los estados de Colorado y Wyoming son "rectángulos esféricos" (en este problema se considera que la Tierra es una esfera perfecta). Colorado está acotado por las líneas de longitud 102°W y 109°W, y las líneas de latitud 37°N y 41°N. Wyoming está acotado por las longitudes 104°W y 111°W, y las latitudes 41°N y 45°N; véase la figura 3.155.

   a) Sin calcular explícitamente sus áreas, determine qué estado es más grande y explique por qué.

   b) ¿En qué porcentaje Wyoming es mayor (o menor) que Colorado? [*Sugerencia:* Suponga que el radio de la Tierra es R. Proyecte un rectángulo esférico en el hemisferio norte que esté determinado por las latitudes θ_1 y θ_2 y las longitudes ϕ_1 y ϕ_2 sobre el plano xy.]

   c) Una referencia bibliográfica indica que las áreas de los dos estados son 104 247 y 97 914 mi^2. ¿Cómo se compara este dato con la respuesta en el inciso *b*)?

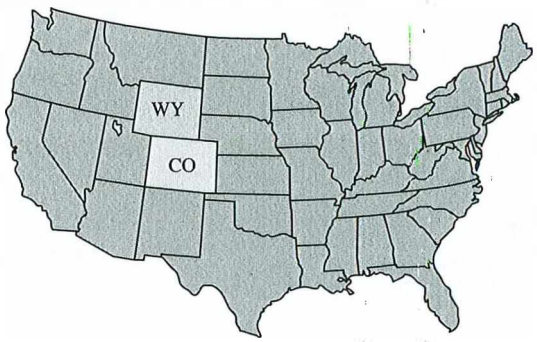
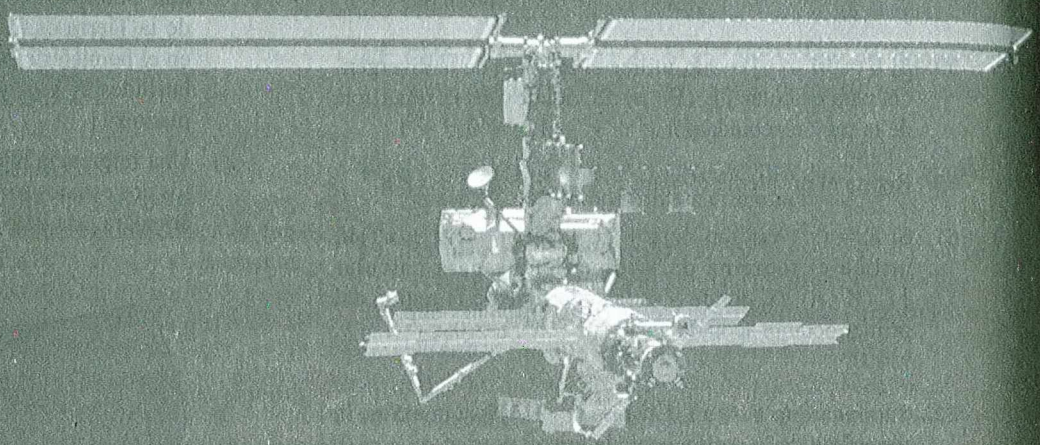
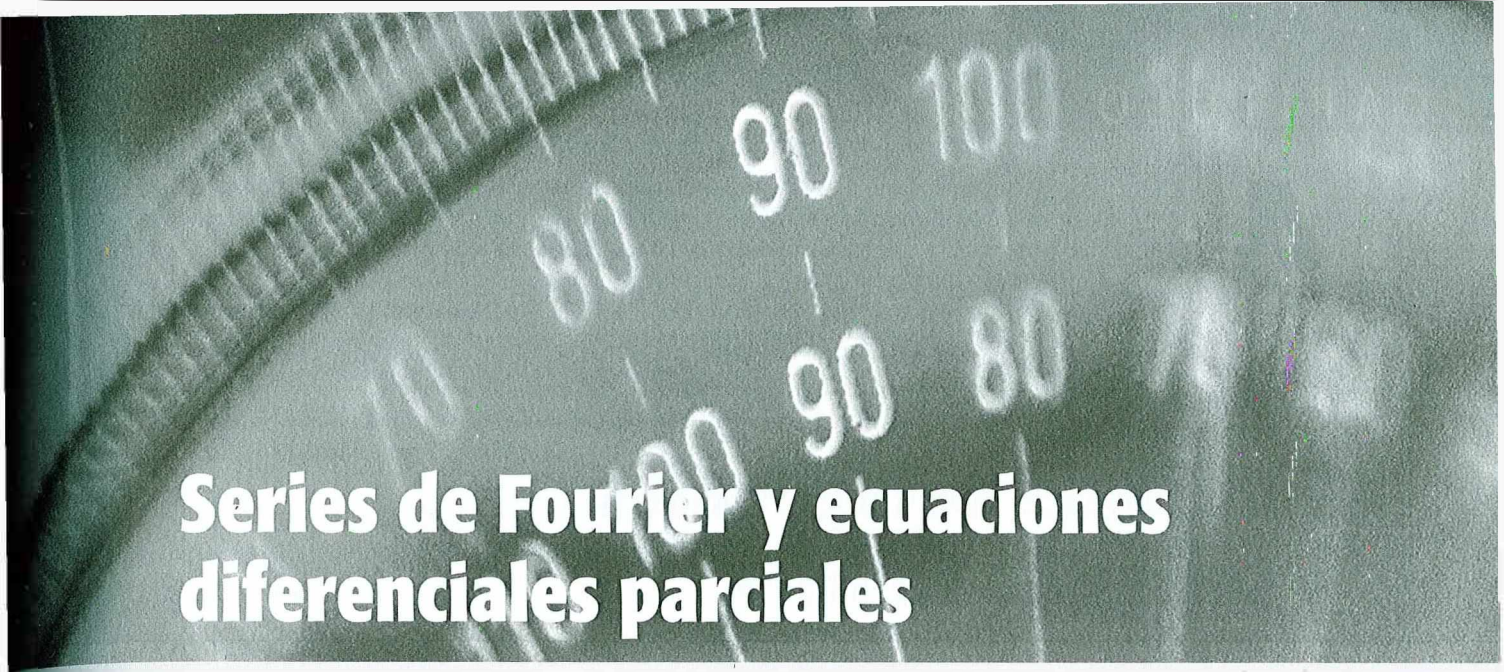


Figura 3.155 Los estados WY y CO son rectángulos esféricos en el problema 66

Por Dayet

parte 2





Series de Fourier y ecuaciones diferenciales parciales

4 Funciones ortogonales y series de Fourier

5 Problemas de valores en la frontera en coordenadas rectangulares

6 Problemas de valores en la frontera en otros sistemas coordenados

7 Método de la transformada integral

8 Soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales parciales

CAPÍTULO

4

Funciones ortogonales y series de Fourier

Estructura del capítulo

4.1 Funciones ortogonales
4.2 Series de Fourier
4.3 Series de Fourier de cosenos y senos
4.4 Series complejas de Fourier
4.5 Problema de Sturm-Liouville
4.6 Series de Bessel y de Legendre
4.6.1 Serie de Fourier-Bessel
4.6.2 Serie de Fourier-Legendre
Ejercicios de repaso del capítulo 4

En esta parte del libro, el objetivo es resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales parciales en el contexto de su aplicación. A pesar de que en este capítulo no resolvemos ninguna ecuación diferencial parcial, el material que se estudiará sirve como base para los procedimientos que se analizarán después.

En cálculo, usted pudo observar que una función f suficientemente diferenciable podía expandirse en una serie de Taylor, la cual en esencia es una serie de potencias de x. El concepto medular que se estudia en este capítulo también implica la expansión de una función en una serie infinita. A principios de los años de 1800, el matemático francés Joseph Fourier promovió la idea de expandir una función f en una serie de funciones trigonométricas. Sucede que las series de Fourier son solamente casos especiales de un tipo más general de representación en forma de series de una función que utiliza un conjunto infinito de funciones ortogonales. La noción de un conjunto de funciones ortogonales nos lleva de regreso a los valores propios y al correspondiente conjunto de funciones ortogonales. Puesto que los valores propios y las funciones propias son los ejes centrales de los procedimientos planteados en los dos capítulos siguientes, se le invita a repasar el ejemplo 2 de la sección 3.9 del tomo I.

4.1 Funciones ortogonales

Introducción En ciertas áreas de las matemáticas avanzadas, a una función se le considera como la generalización de un vector. En esta sección estudiaremos la forma en que los dos conceptos vectoriales de producto interno, o producto escalar, y la ortogonalidad de vectores pueden hacerse extensivos a funciones. El resto del capítulo es una aplicación práctica de este análisis.

Producto interno Recuerde: si $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ son dos vectores en R^3 o en el espacio tridimensional, entonces el producto interno o producto escalar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es un número real (o escalar) que se define como la suma de los productos de sus componentes correspondientes:

El producto interno se expresa como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = \sum_{k=1}^{3} u_kv_k.$$

El producto interno $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ tiene las propiedades siguientes:

i) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

ii) $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, k es un escalar

iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

Se espera que cualquier generalización del producto interno tenga estas mismas propiedades.

Suponga que f_1 y f_2 son funciones definidas en un intervalo $[a, b]$.* Puesto que una integral definida en el intervalo del producto $f_1(x)f_2(x)$ tiene las propiedades *i*) a *iv*) del producto interno vectorial, siempre que la integral exista sugerimos atender la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.1 Producto interno de funciones

El **producto interno** de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a, b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx.$$

Funciones ortogonales Motivados por el hecho de que dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales siempre que su producto interno sea cero, definimos las **funciones ortogonales** de manera similar.

DEFINICIÓN 4.2 Funciones ortogonales

Se dice que dos funciones f_1 y f_2 son **ortogonales** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

Por ejemplo, las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x^3$ son ortogonales en el intervalo $[-1, 1]$ puesto que

$$(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^3\,dx = \tfrac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

*El intervalo pudo haber sido también $(-\infty, \infty)$, $[0, \infty)$, etcétera.

A diferencia del análisis vectorial, donde la palabra *ortogonal* es un sinónimo de *perpendicular*, en el presente contexto el término *ortogonal* y la condición (1) no tienen ningún significado geométrico.

Conjuntos ortogonales Estamos interesados, principalmente, en los conjuntos infinitos de funciones ortogonales.

DEFINICIÓN 4.3 Conjunto ortogonal

Se dice que un conjunto de funciones con valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \dots\}$ es **ortogonal** en un intervalo $[a, b]$ si

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n. \tag{2}$$

Conjuntos ortonormales La norma, o longitud $\|\mathbf{u}\|$, de un vector $\mathbf{u}$ puede expresarse en términos del producto interno. La expresión $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$ se llama norma cuadrada, por lo que la norma es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$. De manera similar, la **norma cuadrada** de una función ϕ_n es $\|\phi_n(x)\|^2 = (\phi_n, \phi_n)$, y entonces la **norma**, o su longitud generalizada, es $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{(\phi_n, \phi_n)}$. En otras palabras, en un conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ la norma cuadrada y la norma de una función ϕ_n son, respectivamente,

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x)\,dx \quad \text{y} \quad \|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}. \tag{3}$$

Si $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a, b]$ con la propiedad de que $\|\phi_n(x)\| = 1$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, entonces se dice que $\{\phi_n(x)\}$ es un **conjunto ortonormal** en el intervalo.

Ejemplo 1 Conjunto ortogonal de funciones

Demuestre que el conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots\}$ es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución Si hacemos las identificaciones $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \cos nx$, entonces debemos demostrar que $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $n \neq 0$, y $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0$, $m \neq n$. En el primer caso, tenemos

$$\begin{aligned}(\phi_0, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n}[\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi)] = 0, \quad n \neq 0,\end{aligned}$$

y en el segundo,

$$\begin{aligned}(\phi_m, \phi_n) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n.\end{aligned}$$

← identidad trigonométrica

❑

Ejemplo 2 Normas

Encuentre las normas de cada función en el conjunto ortogonal dado en el ejemplo 1.

Solución A partir de (3), para $\phi_0(x) = 1$ tenemos

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

por lo que $\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}$. Para $\phi_n(x) = \cos nx$, $n > 0$, se deduce que

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos 2nx]\, dx = \pi.$$

Por lo tanto, para $n > 0$, $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}$. ❑

Cualquier conjunto ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, puede *normalizarse*, esto es, convertirse en un conjunto ortonormal, dividiendo cada función entre su norma. A partir de los ejemplos 1 y 2 se deduce que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right\}$$

es ortonormal en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Un conjunto ortogonal puede convertirse en un conjunto ortonormal.

Analogía vectorial Formulemos una analogía más entre vectores y funciones. Suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son tres vectores mutuamente ortogonales diferentes de cero en el espacio tridimensional. Dicho conjunto ortogonal puede utilizarse como base para el espacio tridimensional; esto es, cualquier vector en tres dimensiones puede escribirse como una combinación lineal

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \tag{4}$$

donde el c_i, $i = 1, 2, 3$, son escalares llamados componentes del vector. Cada componente c_i puede expresarse en términos de $\mathbf{u}$ y del correspondiente vector $\mathbf{v}_i$. Para poder apreciar lo anterior, calculamos el producto interno de (4) con $\mathbf{v}_1$:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = c_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = c_1\|\mathbf{v}_1\|^2 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0.$$

De modo que, $$c_1 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}.$$

De manera similar, podemos observar que los componentes c_2 y c_3 están dados por

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}.$$

Así, (4) puede expresarse como

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^{3} \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n. \tag{5}$$

Expansión en series ortogonales Suponga que $\{\phi_n(x)\}$ es un conjunto de funciones ortogonales infinito en un intervalo $[a, b]$. Nos preguntamos: si $y = f(x)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, ¿es posible determinar un conjunto de coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, para el que

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots? \tag{6}$$

Como en el análisis anterior sobre el cálculo de los componentes de un vector, podemos calcular los coeficientes c_n utilizando el producto interno. Multiplicando (6) por $\phi_m(x)$ e integrando en el intervalo $[a, b]$ obtenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)\, dx = c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)\, dx + c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)\, dx + \cdots + c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\, dx + \cdots$$

$$= c_0(\phi_0, \phi_m) + c_1(\phi_1, \phi_m) + \cdots + c_n(\phi_n, \phi_m) + \cdots.$$

Debido a la ortogonalidad, cada término del lado derecho de la última ecuación es cero, *excepto* cuando $m = n$. En este caso tenemos

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x)\,dx.$$

Se deduce que los coeficientes requeridos son

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)\,dx}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

En otras palabras,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\phi_n(x), \tag{7}$$

donde
$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}. \tag{8}$$

Mediante la notación del producto interno, (7) se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, \phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2}\phi_n(x). \tag{9}$$

Por lo tanto, (9) es visto como la analogía funcional del vector resultante dado en (5).

DEFINICIÓN 4.4 Conjunto ortogonal y función peso

Se dice que un conjunto de funciones con valor real $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es **ortogonal respecto a una función peso** $w(x)$ en un intervalo $[a, b]$ si

$$\int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \quad m \neq n.$$

La suposición usual es que $w(x) > 0$ en el intervalo de ortogonalidad $[a, b]$. El conjunto $\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots\}$ del ejemplo 1 es ortogonal respecto a la función peso $w(x) = 1$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Si $\{\phi_n(x)\}$ es ortogonal respecto a la función peso $w(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces multiplicamos (6) por $w(x)\phi_n(x)$ e integramos para obtener

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)\,dx}{\|\phi_n(x)\|^2}, \tag{10}$$

donde
$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)\,dx. \tag{11}$$

Se dice que la serie (7) con coeficientes dados por (8) y (10) es un **desarrollo en series ortogonales** de f o una **serie generalizada de Fourier**.

■ **Conjuntos completos** El procedimiento bosquejado para determinar los coeficientes c_n fue *formal*; esto es, las preguntas básicas acerca de que si un desarrollo ortogonal de una serie como la (7) es en realidad factible o pudiera ser ignorada. Asimismo, para desarrollar f en una serie de funciones ortogonales, desde luego es necesario que f no sea ortogonal a cada ϕ_n del conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$. (De ser f ortogonal a cada ϕ_n, entonces $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.) Para evitar este último problema debemos suponer, en lo que resta del análisis, que un conjunto ortogonal es **completo**. Esto significa que la única función continua ortogonal a cada miembro del conjunto es la función cero.

Comentarios

Suponga que $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ es un conjunto infinito de funciones con valores reales que son continuas en un intervalo $[a, b]$. Si este conjunto es *linealmente independiente* en $[a, b]$, entonces siempre se podrá convertir en un conjunto ortogonal y, como se describió anteriormente en esta sección, puede convertirse en un conjunto ortonormal. Consulte el problema 22 de los ejercicios 4.1.

EJERCICIOS 4.1 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 6, demuestre que las funciones dadas son ortogonales en el intervalo indicado.

1. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$; $[-2, 2]$
2. $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2 + 1$; $[-1, 1]$
3. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^{-x} - e^{-x}$; $[0, 2]$
4. $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$; $[0, \pi]$
5. $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos 2x$; $[-\pi/2, \pi/2]$
6. $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$; $[\pi/4, 5\pi/4]$

En los problemas del 7 al 12, demuestre que cada conjunto de funciones es ortogonal en el intervalo indicado. Encuentre la norma de cada función del conjunto.

7. $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 3x, \operatorname{sen} 5x, \ldots\}$; $[0, \pi/2]$
8. $\{\cos x, \cos 3x, \cos 5x, \ldots\}$; $[0, \pi/2]$
9. $\{\operatorname{sen} nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $[0, \pi]$
10. $\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $[0, p]$
11. $\left\{1, \cos\frac{n\pi}{p}x\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $[0, p]$
12. $\left\{1, \cos\frac{n\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{m\pi}{p}x\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $m = 1, 2, 3, \ldots$; $[-p, p]$

En los problemas 13 y 14, compruebe por integración directa que las funciones son ortogonales respecto a la función peso indicada en el intervalo dado.

13. $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$; $w(x) = e^{-x^2}$, $(-\infty, \infty)$
14. $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = -x + 1$, $L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$; $w(x) = e^{-x}$, $[0, \infty)$
15. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$. Demuestre que $\int_a^b \phi_n(x)\,dx = 0$ para $n = 1, 2, \ldots$.
16. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$ tal que $\phi_0(x) = 1$ y $\phi_1(x) = x$. Demuestre que $\int_a^b (\alpha x + \beta)\phi_n(x)\,dx = 0$ para $n = 2, 3, \ldots$ y para cualquier constante α y β.
17. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $[a, b]$. Demuestre que $\|\phi_m(x) + \phi_n(x)\|^2 = \|\phi_m(x)\|^2 + \|\phi_n(x)\|^2$, $m \neq n$.
18. Del problema 1 sabemos que $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$ son ortogonales en $[-2, 2]$. Determine las constantes c_1 y c_2 tales que $f_3(x) = x + c_1x^2 + c_2x^3$ sea ortogonal a f_1 y f_2 en el mismo intervalo.
19. El conjunto de funciones $\{\operatorname{sen} nx\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Demuestre que el conjunto está incompleto.
20. Suponga que f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Demuestre que $(f_1 + f_2, f_3) = (f_1, f_3) + (f_2, f_3)$.
21. Se dice que una función con valores reales es **periódica** con periodo T si $f(x + T) = f(x)$. Por ejemplo, 4π es un periodo de sen x ya que sen $(x + 4\pi) = \operatorname{sen} x$. El valor más pequeño de T para el que $f(x + T) = f(x)$ es válida se llama **periodo fundamental** de f. Por ejemplo, el periodo fundamental de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $T = 2\pi$. ¿Cuál es el periodo fundamental de cada una de las funciones siguientes?

   a) $f(x) = \cos 2\pi x$

   b) $f(x) = \operatorname{sen}\frac{4}{L}x$

   c) $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

   d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos 4x$

   e) $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \cos 2x$

   f) $f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{p}x + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right)$, A_n y B_n dependen solamente de n

22. El **proceso Gram-Schmidt** para la construcción de un conjunto ortogonal (consulte la sección 1.7) nos lleva a un conjunto linealmente independiente $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots\}$ de funciones continuas con valores reales en el intervalo $[a, b]$. Con el producto interno $(f_n, \phi_n) = \int_a^b f_n(x)\phi_n(x)dx$, defina las funciones presentes en el conjunto $B' = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ como

$$\phi_0(x) = f_0(x)$$

$$\phi_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)}\phi_0(x)$$

$$\phi_2(x) = f_2(x) - \frac{(f_2, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)}\phi_0(x) - \frac{(f_2, \phi_1)}{(\phi_1, \phi_1)}\phi_1(x)$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente.

a) Escriba $\phi_3(x)$ perteneciente al conjunto.

b) Por construcción, el conjunto $B' = \{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es ortogonal en $[a, b]$. Demuestre que $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son mutuamente ortogonales.

Problemas de análisis

23. *a*) Considere el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ definido en el intervalo $[-1, 1]$. Aplique a este conjunto el proceso de Gram-Schmidt que se dio en el problema 22 y encuentre $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ y $\phi_3(x)$ del conjunto ortogonal B'.

b) Analice: ¿Reconoce el conjunto ortogonal?

24. Compruebe que el producto interno (f_1, f_2) de la definición 4.1 satisface las propiedades *i*) a *iv*) relacionadas en la página 273.

25. En R^3, dé un ejemplo de un conjunto de vectores ortogonales que no esté completo. Proporcione un conjunto completo de vectores ortogonales.

4.2 Series de Fourier

Introducción En el capítulo anterior estudiamos que si $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\}$ es un conjunto de funciones con valores reales que son ortogonales en el intervalo $[a, b]$ y si f es una función definida en el mismo intervalo, entonces podemos desarrollar formalmente f en una serie ortogonal $c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots$. En esta sección desarrollaremos las funciones en términos de un conjunto ortogonal especial de funciones trigonométricas.

Series trigonométricas En el problema 12 de los ejercicios 4.1 se pidió al lector demostrar que el conjunto de funciones trigonométricas

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{p}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \quad (1)$$

es ortogonal en el intervalo $[-p, p]$. Este conjunto será de especial importancia posteriormente en la solución de ciertos tipos de problemas con valores en el límite que involucran ecuaciones diferenciales lineales parciales. En esas aplicaciones necesitaremos desarrollar una función f definida sobre $[-p, p]$ en una serie ortogonal que consista en las funciones trigonométricas dadas en (1), es decir,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right). \quad (2)$$

Ésta es la razón por la que se utiliza $a_0/2$ en lugar de a_0.

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$, pueden determinarse exactamente en la misma forma que en el análisis general de las expansiones de series ortogonales de las páginas 275 y 276. Antes de continuar, observe que hemos seleccionado escribir el coeficiente de 1 en el conjunto (1) como $a_0/2$ en lugar de a_0; esto solamente es por conveniencia, pues la fórmula de a_n se simplificará entonces a a_0 para $n = 0$.

Integrar ambos lados de (2) desde $-p$ hasta p nos da

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \quad (3)$$

Puesto que $\cos(n\pi x/p)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/p)$, $n \geq 1$, son ortogonales a 1 en el intervalo, el segundo miembro de (3) se reduce a un solo término:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0.$$

Despejamos a_0 y obtenemos

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx. \quad (4)$$

Ahora multiplicamos (2) por $\cos(m\pi x/p)$ e integramos:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right). \tag{5}$$

Mediante la ortogonalidad, tenemos

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

y

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases}0, & m \neq n\\ p, & m = n.\end{cases}$$

Por lo tanto, (5) se puede simplificar a $\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = a_n p,$

y así

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{6}$$

Por último, si multiplicamos (2) por $\text{sen}(m\pi x/p)$, integramos, y usamos los resultados

$$\int_{-p}^{p}\text{sen}\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m > 0, \qquad \int_{-p}^{p}\text{sen}\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0$$

y

$$\int_{-p}^{p}\text{sen}\frac{m\pi}{p}x\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases}0, & m \neq n\\ p, & m = n,\end{cases}$$

encontramos que

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{7}$$

Se dice que la serie trigonométrica (2) con coeficientes a_0, a_n y b_n definidos por (4), (6) y (7), respectivamente, se conoce como **serie de Fourier** de la función f. Los coeficientes obtenidos a partir de (4), (6) y (7) se conocen como **coeficientes de Fourier** de f.

Para calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n se supone que f era integrable en el intervalo y que (2), así como la serie obtenida al multiplicar (2) por $\cos(m\pi x/p)$, convergía de tal manera que permite la integración término por término. Hasta que se demuestre que (2) es convergente para una función f dada, el signo de igualdad no se tomará en sentido estricto o literal. En algunos textos se utiliza el símbolo $\sim$ en lugar de $=$. En vista de que la mayoría de las funciones incluidas en las aplicaciones son de un tipo que garantiza la convergencia de la serie, aquí utilizaremos el símbolo de igualdad. A continuación se proporciona un resumen de los resultados:

DEFINICIÓN 4.5 Series de Fourier

La **serie de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-p, p)$ está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\right), \tag{8}$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \tag{9}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx \tag{10}$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{11}$$

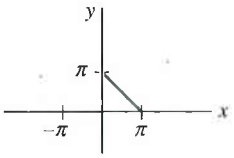


Figura 4.1 Función f del ejemplo 1

Ejemplo 1 Desarollo de una serie de Fourier

Expanda
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \le x < \pi \end{cases} \tag{12}$$
en una serie de Fourier.

Solución La gráfica de f se proporciona en la figura 4.1. Con $p = \pi$, a partir de (9) y (10) tenemos que

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\cos n\pi + 1}{n^2\pi} \quad \leftarrow \cos n\pi = (-1)^n$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}.$$

De manera similar, a partir de (11) encontramos que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto,
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1 - (-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right\}. \tag{13}$$ ❑

Observe que a_n, tal como fue definida en (10), se simplifica al valor a_0 que se dio en (9) cuando fijamos $n = 0$. Sin embargo, como lo muestra el ejemplo 1, éste puede no ser el caso *después* de haber evaluado la integral para a_n.

■ **Convergencia de una serie de Fourier** El teorema siguiente proporciona condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier en un punto.

TEOREMA 4.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' funciones continuas en el intervalo $(-p, p)$; esto es, establezcamos f y f' continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades finitas sólo en estos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ denotan el límite de f en x de derecha a izquierda, respectivamente.*

*En otras palabras, para un punto x en el intervalo y $h > 0$,

$$f(x+) = \lim_{h\to 0} f(x + h), \quad f(x-) = \lim_{h\to 0} f(x - h).$$

Para ver la demostración de este teorema, se recomienda consultar el libro clásico de Churchill y Brown.*

Ejemplo 2 Convergencia de un punto de discontinuidad

La función (12) del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 4.1. En consecuencia, por cada x en el intervalo $(-\pi, \pi)$, excepto en $x = 0$, la serie (13) convergirá a $f(x)$. En $x = 0$ la función es discontinua, entonces la serie (13) convergirá para

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$ ❑

■ **Extensión periódica** Observe que cada una de las funciones incluidas en el conjunto básico (1) tiene un periodo fundamental diferente,** es decir, $2p/n$, $n \geq 1$; sin embargo, puesto que un múltiplo entero positivo de un periodo es también un periodo, podemos ver que todas las funciones tienen en común el periodo $2p$ (compruébelo). En consecuencia, el lado derecho de (2) tiene periodo $2p$; de hecho, $2p$ es el periodo fundamental de la suma. Concluimos que una serie de Fourier no sólo representa la función en el intervalo $(-p, p)$, sino que también proporciona la **extensión periódica** de f fuera de este intervalo. Ahora podemos aplicar el teorema 4.1 a la extensión periódica de f, o suponer desde el principio que la función dada es periódica con periodo $T = 2p$; esto es, $f(x + T) = f(x)$. Cuando f es una función continua y existen las derivadas derecha e izquierda en $x = -p$ y $x = p$, respectivamente, entonces la serie (8) converge al promedio $[f(p-) + f(-p+)]/2$ en estos extremos y a este valor extendido periódicamente en $\pm 3p$, $\pm 5p$, $\pm 7p$, etc. La serie de Fourier dada en (13) converge a la extensión periódica de (12) en todo el eje x. En $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, y $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$, la serie converge a los valores

$$\frac{f(0+) + f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = 0,$$

respectivamente. Los puntos de la figura 4.2 puestos en negritas representan el valor $\pi/2$.

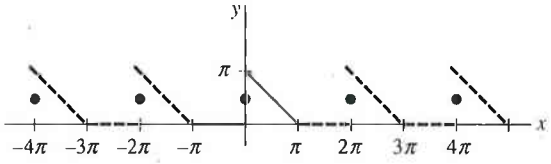


Figura 4.2 Las extensiones periódicas de la función f se muestran en la figura 4.1

■ **Secuencia de sumas parciales** Es interesante observar cómo la secuencia de las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de una serie de Fourier se aproxima a una función. Por ejemplo, las primeras tres sumas parciales de (13) son

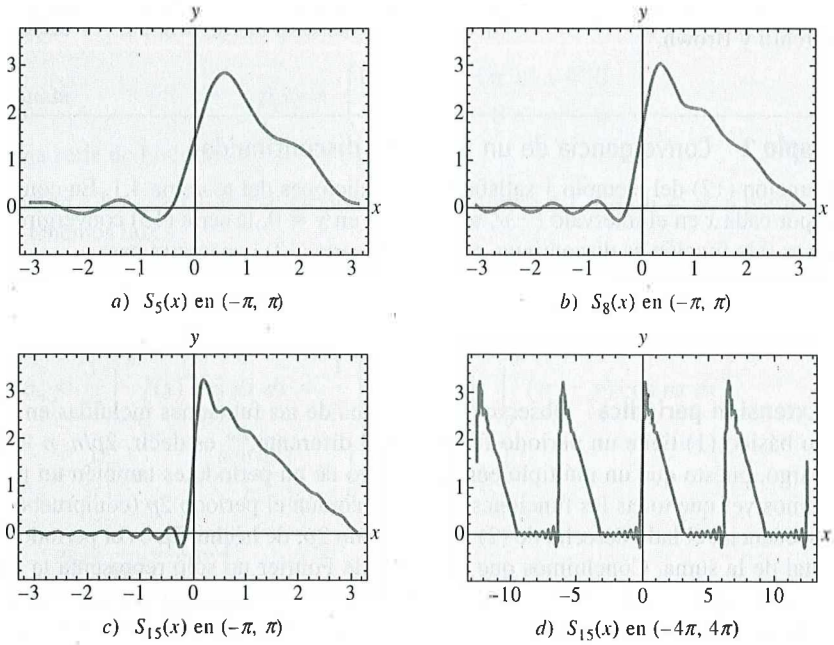
$$S_1(x) = \frac{\pi}{4}, \quad S_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x, \quad S_3(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\cos x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x.$$

En la figura 4.3 hemos utilizado un CAS para graficar las sumas parciales $S_5(x)$, $S_8(x)$ y $S_{15}(x)$ de (13) en el intervalo $(-\pi, \pi)$. La figura 4.3*d*) muestra la extensión periódica utilizando $S_{15}(x)$ en $(-4\pi, 4\pi)$.

Podemos suponer que la función f dada es periódica.

*Ruel V. Churchill y James Ward Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems* (Nueva York: McGraw-Hill, 2000).

**Consulte el problema 21 de los ejercicios 4.1.



a) $S_5(x)$ en $(-\pi, \pi)$ *b)* $S_8(x)$ en $(-\pi, \pi)$

c) $S_{15}(x)$ en $(-\pi, \pi)$ *d)* $S_{15}(x)$ en $(-4\pi, 4\pi)$

Figura 4.3 Sumas parciales de una serie de Fourier

EJERCICIOS 4.2 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 16, encuentre la serie de Fourier de f en el intervalo dado.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \pi^2, & -\pi < x < 0 \\ \pi^2 - x^2, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

7. $f(x) = x + \pi, \quad -\pi < x < \pi$

8. $f(x) = 3 - 2x, \quad -\pi < x < \pi$

9. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi/2 < x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x < \pi/2 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < -1 \\ -2, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1 + x, & 0 \le x < 5 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0 \\ 2, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

15. $f(x) = e^x, \quad -\pi < x < \pi$

16. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ e^x - 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

17. Utilice el resultado del problema 5 para demostrar que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

y

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

18. Utilice el problema 17 para calcular una serie que proporcione el valor numérico de $\pi^2/8$.

19. Utilice el resultado del problema 7 y demuestre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

20. Utilice el resultado del problema 9 para demostrar que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots$$

21. El **valor cuadrático medio** (RMS, por sus siglas en inglés) de una función $f(x)$ definida en un intervalo (a, b) está dado por

$$\text{RMS}(f) = \sqrt{\frac{\int_a^b f^2(x)\,dx}{b - a}}.$$

Si la expansión de la serie de Fourier de f está dada por (8), demuestre que el valor RMS de f en el intervalo $(-p, p)$ está dado por

$$\text{RMS}(f) = \sqrt{\tfrac{1}{4}a_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)},$$

donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier en (9), (10) y (11).

4.3 Series de Fourier de cosenos y senos

Repaso El esfuerzo que se lleva a cabo en la evaluación de los coeficientes a_0, a_n y b_n al desarrollar una función f en una serie de Fourier se reduce de manera significativa cuando f es una función par o impar. Se dice que una función f es:

$$\textbf{par si } f(-x) = f(x) \quad \text{e} \quad \textbf{impar si } f(-x) = -f(x).$$

En un intervalo simétrico tal como $(-p, p)$, la gráfica de una función par tiene simetría respecto al eje y, mientras que la gráfica de una función impar tiene simetría en relación con el origen.

Funciones par e impar Es probable que el origen de las palabras *par* e *impar* provenga del hecho de que las gráficas de las funciones polinomiales que consisten en todas las potencias pares de x sean simétricas respecto al eje y, mientras que las gráficas de polinomios constituidos por todas las potencias impares de x son simétricas en relación con el origen. Por ejemplo,

$$f(x) = x^2 \text{ es par debido a que } f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$
(↓ entero par)

$$f(x) = x^3 \text{ es impar debido a que } f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$
(↓ entero impar)

Consulte las figuras 4.4 y 4.5. Las funciones trigonométricas coseno y seno son funciones pares e impares, respectivamente, ya que $\cos(-x) = \cos x$ y $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$. Las funciones exponenciales $f(x) = e^x$ y $f(x) = e^{-x}$ no son pares ni impares.

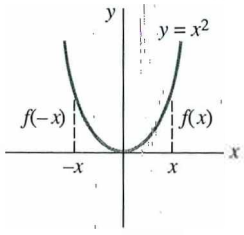


Figura 4.4 Función par

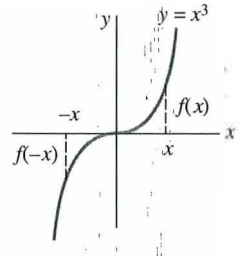


Figura 4.5 Función impar

Propiedades El teorema siguiente relaciona algunas propiedades de las funciones pares e impares.

TEOREMA 4.2 Propiedades de las funciones pares e impares

a) El producto de dos funciones pares es par.
b) El producto de dos funciones impares es par.
c) El producto de una función par y una impar es impar.
d) La suma (resta) de dos funciones pares es par.
e) La suma (resta) de dos funciones impares es impar.
f) Si f es par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.
g) Si f es impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Demostración de *b*) Supongamos que f y g son funciones impares. Entonces, tenemos $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$. Si definimos el producto de f y g como $F(x) = f(x)g(x)$, entonces

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = F(x).$$

Lo anterior muestra que el producto F de dos funciones impares es una función impar. La demostración de las propiedades restantes se deja como ejercicio para el lector. Consulte el problema 52 de los ejercicios 4.3. ❑

Series de senos y cosenos Si f es una función par de $(-p, p)$ entonces, en vista de las propiedades siguientes, los coeficientes (9), (10) y (11) de la sección 4.2 se convierten en

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\underbrace{\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx}_{\text{par}} = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\underbrace{\int_{-p}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx}_{\text{impar}} = 0.$$

De manera similar, cuando f es impar en el intervalo $(-p, p)$,

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

En la definición siguiente resumimos los resultados.

DEFINICIÓN 4.6 Series de Fourier de senos y cosenos

i) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de cosenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x, \tag{1}$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,dx \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{3}$$

ii) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $(-p, p)$ es la **serie de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x, \tag{4}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\,dx. \tag{5}$$

Ejemplo 1 Desarrollo en una serie de senos

Expanda $f(x) = x$, $-2 < x < 2$, en una serie de Fourier.

Solución La inspección de la figura 4.6 muestra que la función dada es impar en el intervalo $(-2, 2)$, por lo que desarrollamos f en una serie de senos. Con la identidad $2p = 4$, tenemos $p = 2$. Por lo tanto (5), después de la integración por partes, es

$$b_n = \int_{0}^{2} x\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{2}x\,dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

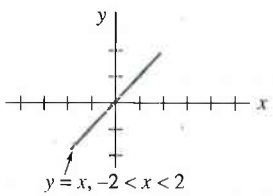


Figura 4.6 Función impar f del ejemplo 1

Por lo tanto, $$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x. \qquad (6)$$ ❑

La función del ejemplo 1 satisface las condiciones del teorema 4.1. De aquí que la serie (6) converja a la función en $(-2, 2)$ y a la extensión periódica (de periodo 4) dada en la figura 4.7.

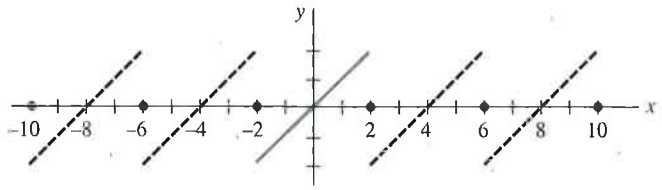


Figura 4.7 Extensión periódica de la función f mostrada en la figura 4.6.

Ejemplo 2 Desarrollo en una serie de senos

La función $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ que se muestra en la figura 4.8 es impar en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Con el valor de $p = \pi$ tenemos a partir de (5)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n},$$

y así $$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx. \qquad (7)$$ ❑

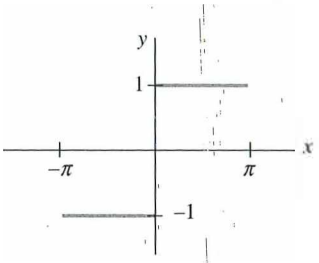


Figura 4.8 Función impar f del ejemplo 2

■ **Fenómeno de Gibbs** Con ayuda de un sistema asistido por computadora, en la figura 4.9 se han trazado las gráficas $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$, $S_{15}(x)$ de las sumas parciales de los términos diferentes a cero de (7). Como se puede observar en la figura 4.9*d*), la gráfica de $S_{15}(x)$ tiene picos pronunciados cerca de las discontinuidades en $x = 0$, $x = \pi$, $x = -\pi$, etc. Este "disparo" por las sumas parciales S_N de los valores funcionales cerca de un punto de discontinuidad no la empareja sino que permanece constante, aun cuando el valor de N se considera elevado. Este comportamiento de una serie de Fourier cerca de un punto en el cual f es discontinua se conoce como **fenómeno de Gibbs**.

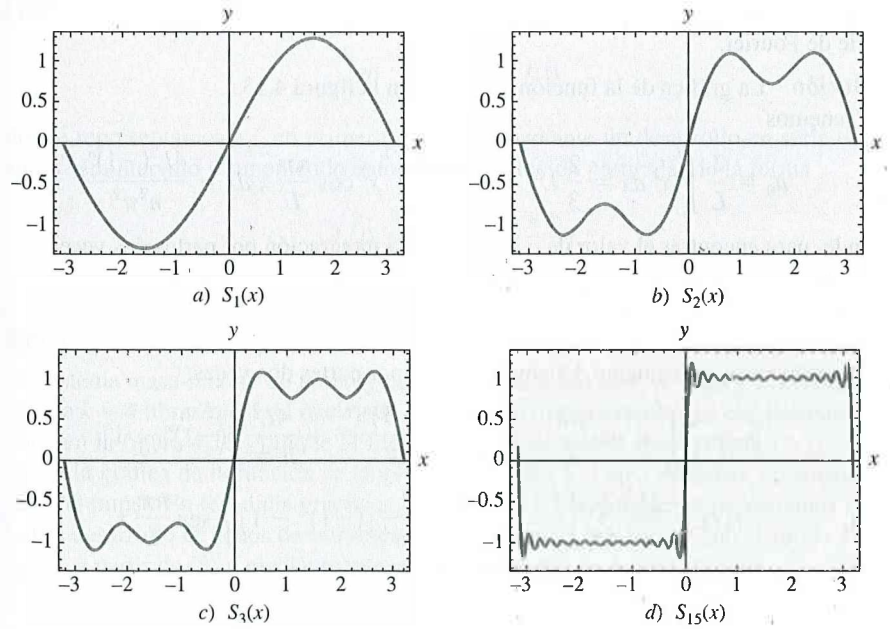


Figura 4.9 Sumas parciales de la serie seno de (7) en el intervalo $(-\pi, \pi)$

La extensión periódica de f en el ejemplo 2 sobre todo el eje x es una función meandro (vea la página 226 del tomo I).

Desarrollos en semiintervalos A lo largo del análisis anterior quedó claro que una función f estaba definida en un intervalo donde el origen era el punto medio, esto es, $-p < x < p$. Sin embargo, en muchos casos, nos interesa representar una función definida solamente para $0 < x < L$ mediante una serie trigonométrica. Lo anterior se puede llevar a cabo de muchas formas diferentes por el suministro de una *definición* arbitraria de la función en el intervalo $-L < x < 0$. Por brevedad, consideramos los tres casos más importantes. Si $y = f(x)$ se define en el intervalo $0 < x < L$,

i) refleje la gráfica de la función respecto al eje y en $-L < x < 0$; la función es ahora par en $-L < x < L$ (consulte la figura 4.10); o

ii) refleje la gráfica de la función a través del origen en $-L < x < 0$; la función es ahora impar en $-L < x < L$ (vea la figura 4.11); o

iii) defina f en $-L < x < 0$ mediante $f(x) = f(x + L)$ (consulte la figura 4.12).

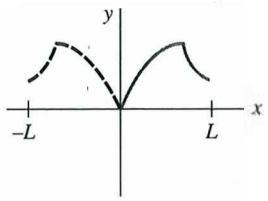


Figura 4.10 Reflexión par

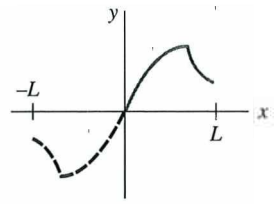
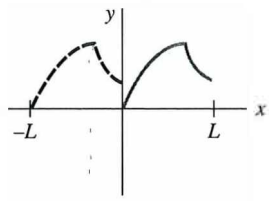


Figura 4.11 Reflexión impar



$f(x) = f(x + L)$

Figura 4.12 Reflexión identidad

Observe que los coeficientes de las series (1) y (4) utilizan solamente la definición de la función en $0 < x < p$ (esto es, medio intervalo $-p < x < p$). De modo que, en la práctica, no existe una necesidad real de hacer las reflexiones descritas en *i*) y *ii*). Si f se define en $0 < x < L$, simplemente identificamos la mitad del periodo como la longitud del intervalo $p = L$. El coeficiente en las fórmulas (2), (3) y (5) y las series correspondientes generan una extensión periódica par o impar con periodo $2L$ de la función original. Las series coseno y seno obtenidas de esta manera se conocen como **desarrollos en semiintervalos**. Por último, en el caso *iii*) estamos definiendo que los valores funcionales en el intervalo $-L < x < 0$ sean los mismos valores presentes en $0 < x < L$. Como en los casos anteriores, no hay una necesidad real para hacer esto. Se puede demostrar que el conjunto de funciones incluidas en (1) de la sección 4.2 es ortogonal en $a \le x \le a + 2p$ para cualquier número real a. Seleccionando $a = -p$, obtenemos los límites de integración de (9), (10) y (11) de esa sección. Sin embargo, para $a = 0$ los límites de integración están desde $x = 0$ hasta $x = 2p$. Por lo tanto, si f está definida en el intervalo $0 < x < L$, identificamos $2p = L$ o $p = L/2$. La serie de Fourier resultante proporcionará la extensión periódica de f con periodo L. De esta forma, los valores hacia los cuales converja la serie serán los mismos en $-L < x < 0$ que en $0 < x < L$.

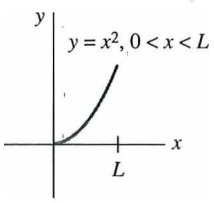


Figura 4.13 Función f del ejemplo 3

Ejemplo 3 Desarrollo en tres series

Desarrollar $f(x) = x^2$, $0 < x < L$, *a*) en una serie coseno, *b*) en una serie seno y *c*) en una serie de Fourier.

Solución La gráfica de la función está dada en la figura 4.13.

a) Tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

donde, para encontrar el valor de a_n, se utilizó la integración por partes dos veces.

Por lo tanto,
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x. \tag{8}$$

b) En este caso, nuevamente debemos integrar por partes dos veces:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1].$$

Así,
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n - 1]\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x. \tag{9}$$

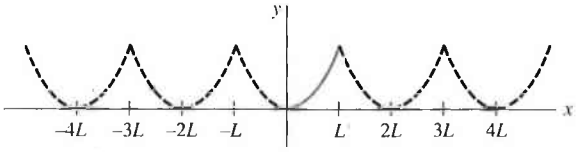
c) Con $p = L/2$, $1/p = 2/L$, y $n\pi/p = 2n\pi/L$, tenemos

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos\frac{2n\pi}{L}x\,dx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

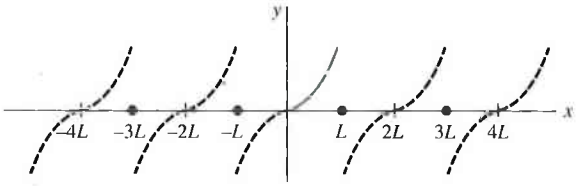
y
$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\,dx = -\frac{L^2}{n\pi}.$$

Por lo tanto,
$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{L}x\right\}, \tag{10}$$

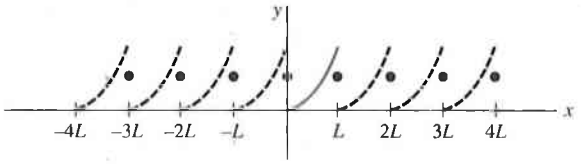
Las series (8), (9) y (10) convergen a la extensión par periódica $2L$ de f, a la extensión impar periódica $2L$ de f, y a la extensión periódica L de f, respectivamente. Las gráficas de estas extensiones periódicas se muestran en la figura 4.14. ❑



a) Serie de cosenos



b) Serie de senos



c) Serie de Fourier

Figura 4.14 Diferentes extensiones periódicas de la función f

■ **Fuerza impulsora periódica** A veces las series de Fourier resultan de utilidad para determinar una solución particular de una ecuación diferencial que describe un sistema físico, donde la entrada o fuerza conductora $f(t)$ es periódica. En el ejemplo siguiente, calculamos una solución particular de la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t) \tag{11}$$

donde representamos a f, en primera instancia, mediante un desarrollo en serie de seno en un semintervalo y suponiendo entonces una solución particular de la forma

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}t. \tag{12}$$

Ejemplo 4 Solución particular de una ecuación diferencial

Un sistema masa-resorte no amortiguado, donde la masa $m = \frac{1}{16}$ slugs y la constante del resorte $k = 4$ libras/pie, está manejado mediante la fuerza externa $f(t)$ con periodo 2 ilustrada en la figura 4.15. Aunque la fuerza $f(t)$ actúa sobre el sistema para $t > 0$, observe que si la gráfica de la función se amplía con periodo 2 al eje t negativo, obtenemos una función impar. En términos prácticos, esto significa que solamente necesitamos encontrar el desarrollo de senos de semintervalo de $f(t) = \pi t$, $0 < t < 1$. Considerando el valor $p = 1$, a partir de (5) y mediante integración por partes se deduce que

$$b_n = 2\int_0^1 \pi t \operatorname{sen} n\pi t\,dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

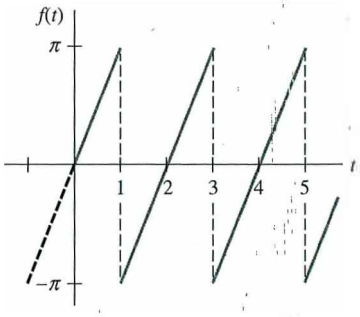


Figura 4.15 Función periódica forzada f del ejemplo 4

A partir de (11) puede observarse que la ecuación diferencial del movimiento es

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{13}$$

Para encontrar la solución particular $x_p(t)$ de (13), sustituimos (12) en la ecuación e igualamos los coeficientes de sen $n\pi t$. Esto nos da

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2 + 4\right)B_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{o} \quad B_n = \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)}.$$

Por lo tanto,

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{n(64 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} n\pi t. \tag{14}$$ ❑

En la solución (14) observe que no existe entero alguno $n \geq 1$ para el que el denominador $64 - n^2\pi^2$ de B_n sea cero. En general, si *existe* un valor de n, digamos N, para el cual $N\pi/p = \omega$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$, entonces el sistema descrito en (11) es un estado de resonancia pura. En otras palabras, tenemos resonancia pura si el desarrollo en series de Fourier de la fuerza conductora $f(t)$ posee un término sen$(N\pi/L)t$ (o cos$(N\pi/L)t$) a la misma frecuencia que la correspondiente a las vibraciones libres.

Desde luego, si la extensión periódica $2p$ de la fuerza conductora f en el eje t negativo nos da una función par, entonces desarrollamos f en una serie de cosenos.

EJERCICIOS 4.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

En los problemas del 1 al 10, determine si la función es par, impar o ninguna de las dos formas.

1. $f(x) = \operatorname{sen} 3x$
2. $f(x) = x \cos x$
3. $f(x) = x^2 + x$
4. $f(x) = x^3 - 4x$
5. $f(x) = e^{|x|}$
6. $f(x) = e^x - e^{-x}$
7. $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0 \\ -x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x + 5, & -2 < x < 0 \\ -x + 5, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$
9. $f(x) = x^3, 0 \leq x \leq 2$
10. $f(x) = |x^5|$

En los problemas del 11 al 24, desarrolle la función dada en una serie apropiada de cosenos o senos.

11. $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$
13. $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$
14. $f(x) = x, -\pi < x < \pi$
15. $f(x) = x^2, -1 < x < 1$
16. $f(x) = x|x|, -1 < x < 1$
17. $f(x) = \pi^2 - x^2, -\pi < x < \pi$
18. $f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$
19. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & -\pi < x < 0 \\ x + 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$
20. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ x - 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$
21. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < -1 \\ -x, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$
22. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -2\pi < x < -\pi \\ x, & -\pi \leq x < \pi \\ \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$
23. $f(x) = |\operatorname{sen} x|, -\pi < x < \pi$
24. $f(x) = \cos x, -\pi/2 < x < \pi/2$

En los problemas del 25 al 34, determine los desarrollos coseno y seno de semintervalo para la función proporcionada.

25. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$
26. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$
27. $f(x) = \cos x, 0 < x < \pi/2$
28. $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 < x < \pi$
29. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$
30. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi \\ x - \pi, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = x^2 + x,\ 0 < x < 1$

34. $f(x) = x(2 - x),\ 0 < x < 2$

En los problemas del 35 al 38, desarrolle la función dada en una serie de Fourier.

35. $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$ 36. $f(x) = x, 0 < x < \pi$

37. $f(x) = x + 1, 0 < x < 1$ 38. $f(x) = 2 - x, 0 < x < 2$

En los problemas 39 y 40, proceda como en el ejemplo 4 para calcular una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = 1$, $k = 10$ y la fuerza conductora $f(t)$ es la que se proporciona. Suponga que al extenderse $f(t)$ al eje t negativo en forma periódica, la función resultante es impar.

39. $f(x) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ -5, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$; $f(t + 2\pi) = f(t)$

40. $f(t) = 1 - t,\ 0 < t < 2;$ $f(t + 2) = f(t)$

En los problemas 41 y 42, proceda como en el ejemplo 4 para calcular una solución particular $x_p(t)$ de la ecuación (11) cuando $m = \frac{1}{4}$, $k = 12$, y la fuerza conductora $f(t)$ es como se indica. Suponga que al extenderse $f(t)$ al eje t negativo de manera periódica, la función resultante es par.

41. $f(t) = 2\pi t - t^2, 0 < t < 2\pi;$ $f(t + 2\pi) = f(t)$

42. $f(x) = \begin{cases} t, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1 - t, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$; $f(t + 1) = f(t)$

43. *a*) Resuelva la ecuación diferencial del problema 39, $x'' + 10x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

b) Utilice un sistema asistido por computadora para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ determinada en el inciso *a*).

44. *a*) Resuelva la ecuación diferencial del problema 41, $\frac{1}{4}x'' + 12x = f(t)$, sujeta a las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

b) Utilice un sistema asistido por computadora (CAS) para trazar la gráfica de la solución $x(t)$ determinada en el inciso *a*).

45. Suponga que una viga uniforme de longitud L se encuentra soportada en $x = 0$ y en $x = L$. Si la carga por unidad de longitud está dada por $w(x) = w_0x/L$, $0 < x < L$, entonces la ecuación diferencial de la deflexión $y(x)$ es

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{w_0x}{L},$$

donde E, I y w_0 son constantes. (Vea (4) en la sección 3.9 del tomo I.)

a) Desarrolle $w(x)$ en una serie de senos de semintervalo.

b) Utilice el método del ejemplo 4 para calcular una solución particular $y(x)$ de la ecuación diferencial.

46. Proceda igual que en el problema 45 para calcular una solución particular $y(x)$ cuando la carga por unidad de longitud está dada como indica la figura 4.16.

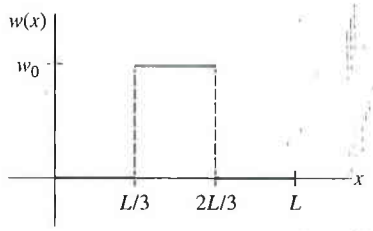


Figura 4.16 Gráfica para el problema 46

Tareas para el laboratorio de cómputo

En los problemas 47 y 48, mediante el uso de un sistema asistido por computadora, grafique las sumas parciales $\{S_N(x)\}$ de la serie trigonométrica dada. Experimente con diferentes valores de N y con gráficas en intervalos distintos del eje x. Utilice sus gráficas para formular una expresión de forma cerrada para una función f definida por $0 < x < L$ que esté representada por las series.

47. $$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1 - 2(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$$

48. $$f(x) = -\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi}{2}x$$

Problemas de análisis

49. ¿Su respuesta a los problemas 47 o 48 es única? Proporcione una función f definida en un intervalo simétrico respecto al origen $-a < x < a$ que tenga la misma serie trigonométrica del problema 47; del problema 48.

50. Analice por qué el desarrollo de la serie de cosenos de Fourier de $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ converge hacia e^{-x} en el intervalo $-\pi < x < 0$.

51. Suponga que $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ se desarrolla en una serie de cosenos y $f(x) = e^x$, $0 < x < \pi$ en una serie de senos. Si las dos series se suman y después se dividen entre 2 (esto es, se obtiene su promedio), tendremos una serie de cosenos y senos que también representa $f(x) = e^x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. ¿Es ésta una serie de Fourier completa de f? [*Sugerencia:* ¿Qué representa el promedio de la serie coseno y seno en el intervalo $-\pi < x < 0$?]

52. Demuestre las propiedades *a*), *c*), *d*), *f*) y *g*) relacionadas en el teorema 4.2.

4.4 Series complejas de Fourier

Introducción Tal como hemos podido observar en las dos secciones anteriores, una función real f puede representarse mediante una serie de senos y cosenos. Las funciones $\cos nx$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\operatorname{sen} nx$, $n = 1, 2, \ldots$ son funciones con *valores reales* de una variable real x. Las tres formas reales diferentes de la serie de Fourier proporcionadas en las definiciones 4.5 y 4.6 serán de significativa importancia en los capítulos 5 y 6, cuando comencemos a resolver ecuaciones diferenciales lineales parciales. Sin embargo, en ciertas aplicaciones, por ejemplo, en el análisis de señales periódicas practicado en ingeniería eléctrica, realmente conviene más representar una función f en una serie infinita de funciones con *valores complejos* de una variable real x como las funciones exponenciales e^{inx}, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y donde i es la unidad imaginaria definida por $i^2 = -1$. Recuerde que para un número real x, la fórmula de Euler es

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{nos da} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x. \tag{1}$$

En esta sección vamos a utilizar los resultados de (1) para expresar la serie de Fourier de la definición 4.5 en **forma compleja** o **forma exponencial**. Observaremos que es posible representar una función real mediante una serie compleja; es decir, una serie donde los coeficientes sean números complejos. Para lograr dicho objetivo, recuerde que un número complejo es un número $z = a + ib$, donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. El número $\bar{z} = a - ib$ se llama conjugado de z.

Series complejas de Fourier Si primero sumamos las dos expresiones de (1) y despejamos $\cos x$, y posteriormente sustituimos las dos expresiones y despejamos $\operatorname{sen} x$, llegamos al resultado

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{2}$$

Al utilizar (2) para reemplazar $\cos(n\pi x/p)$ y $\operatorname{sen}(n\pi x/p)$ en (8) de la sección 4.2, la serie de Fourier de una función f puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{in\pi x/p} + e^{-in\pi x/p}}{2} + b_n \frac{e^{in\pi x/p} - e^{-in\pi x/p}}{2i}\right] \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\pi x/p} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\pi x/p}\right] \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\pi x/p},
\end{aligned} \tag{3}$$

donde $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ y $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. Los símbolos a_0, a_n y b_n son los coeficientes (9), (10) y (11) de la definición 4.5. Cuando la función f es real, c_n y c_{-n} son complejos conjugados y pueden escribirse también en términos de las funciones exponenciales complejas:

$$c_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx - i\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x - i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right]dx \\
&= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}\,dx,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx + i\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x + i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{p}x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{in\pi x/p}\,dx. \tag{6}$$

Puesto que los subíndices de coeficientes y exponentes se encuentran en el rango de todo el conjunto de enteros no negativos... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, podemos escribir los resultados de (3), (4), (5) y (6) de manera más compacta al sumar tanto enteros negativos como no negativos. En otras palabras, es posible utilizar *una* suma y *una* integral que defina todos los coeficientes c_0, c_n y c_{-n}.

DEFINICIÓN 4.7 Series complejas de Fourier

La **serie compleja de Fourier** de las funciones f definidas en un intervalo $(-p, p)$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p}, \tag{7}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}\,dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{8}$$

Si f satisface la hipótesis del teorema 4.1, una serie compleja de Fourier converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad y hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

en un punto de discontinuidad.

Ejemplo 1 Series complejas de Fourier

Expandir $f(x) = e^{-x}$, $-\pi < x < \pi$, en una serie compleja de Fourier.

Solución Con $p = \pi$, (8) da

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi(in+1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right].$$

Podemos simplificar los coeficientes c_n de alguna manera utilizando la fórmula de Euler:

$$e^{-(in+1)\pi} = e^{-\pi}(\cos n\pi - i\operatorname{sen} n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}$$

y

$$e^{(in+1)\pi} = e^{\pi}(\cos n\pi + i\operatorname{sen} n\pi) = (-1)^n e^{\pi},$$

puesto que $\cos n\pi = (-1)^n$ y $\operatorname{sen} n\pi = 0$. En consecuencia,

$$c_n = (-1)^n\frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2(in+1)\pi} = (-1)^n\frac{\operatorname{senh}\pi}{\pi}\frac{1 - in}{n^2 + 1}. \tag{9}$$

La serie compleja de Fourier es, por lo tanto,

$$f(x) = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1 - in}{n^2 + 1} e^{inx}. \qquad (10)$$ ❑

La serie (10) converge hacia la extensión periódica 2π de f.

Probablemente usted tenga la impresión de que hemos complicado las cosas presentando una versión compleja de la serie de Fourier. La realidad es que, en áreas de ingeniería, la forma (7) proporcionada en la definición 4.7 a veces resulta más útil que la dada en (8) de la definición 4.5.

Frecuencia fundamental Las series de Fourier de las definiciones 4.5 y 4.7 explican una función periódica, y el **periodo fundamental** de dicha función (esto es, la extensión periódica de f) es $T = 2p$. Puesto que $p = T/2$, (8) de la sección 4.2 y (7) se convierten, respectivamente, en

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \operatorname{sen} n\omega x) \quad \text{y} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega x}, \qquad (11)$$

donde el número $\omega = 2\pi/T$ se llama **frecuencia angular fundamental**. En el ejemplo 1, la extensión periódica de la función tiene como periodo $T = 2\pi$; la frecuencia angular fundamental es $\omega = 2\pi/2\pi = 1$.

Espectro de frecuencia En el estudio de las señales periódicas de tiempo, los ingenieros eléctricos consideran de mucha utilidad el análisis espectral de diversas formas de onda. Si f es periódica y tiene un periodo fundamental T, la gráfica de los puntos $(n\omega, |c_n|)$, donde ω es la frecuencia angular fundamental y los c_n son los coeficientes definidos en (8), se llama **espectro de frecuencia** de f.

Ejemplo 2 Espectro de frecuencia

En el ejemplo 1, $\omega = 1$ de tal forma que $n\omega$ tome los valores $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Utilizando $|\alpha + i\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, podemos observar que a partir de (9)

$$|c_n| = \frac{\operatorname{senh} \pi}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

La tabla siguiente muestra algunos valores de n y los correspondientes de c_n.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\lvert c_n \rvert$	1.162	1.644	2.599	3.676	2.599	1.644	1.162

La gráfica de la figura 4.17, líneas con puntas de flecha terminando en los valores, representa una porción del espectro de frecuencia de f. ❑

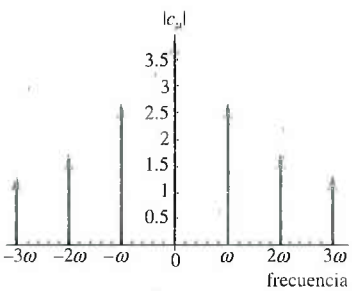


Figura 4.17 Espectro de frecuencia de f para el ejemplo 1

Ejemplo 3 Espectro de frecuencia

Encuentre el espectro de frecuencia de la onda cuadrada periódica, o pulso periódico, ilustrada en la figura 4.18. La onda es la extensión periódica de la función f:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \\ 1, & -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Solución Aquí $T = 1 = 2p$, por lo que $p = \frac{1}{2}$. Como f es 0 en los intervalos $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, la ecuación (8) se convierte en

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{2in\pi x}\, dx = \int_{-1/4}^{1/4} 1 \cdot e^{2in\pi x}\, dx \\ &= \frac{e^{2in\pi x}}{2in\pi}\Bigg|_{-1/4}^{1/4} \\ &= \frac{1}{n\pi} \frac{e^{in\pi/2} - e^{-in\pi/2}}{2i}. \end{aligned}$$

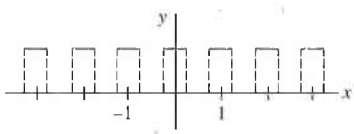


Figura 4.18 Pulso periódico

Esto es, $$c_n = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}. \quad \leftarrow \text{por (2)}$$

Puesto que el último resultado no es válido en $n = 0$, calculamos ese término en forma separada:

$$c_0 = \int_{-1/4}^{1/4} dx = \frac{1}{2}.$$

La tabla siguiente muestra algunos de los valores de $|c_n|$, y la figura 4.19 describe

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\lvert c_n\rvert$	$\frac{1}{5\pi}$	0	$\frac{1}{3\pi}$	0	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\pi}$	0	$\frac{1}{3\pi}$	0	$\frac{1}{5\pi}$

el espectro de frecuencia de f. Puesto que la frecuencia fundamental es $\omega = 2\pi/T = 2\pi$, en la escala horizontal las unidades $n\omega$ son $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 6\pi$, ... A la figura 4.19 se le añadió una curva en línea discontinua con el fin de enfatizar la presencia de los valores iguales a cero de $|c_n|$ para el caso en que n sea un entero par diferente de cero. ❑

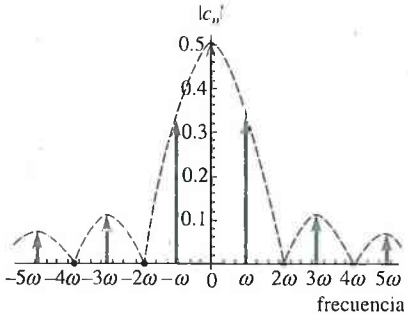


Figura 4.19 Espectro de frecuencia de f

EJERCICIOS 4.4 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la serie compleja de Fourier de f en el intervalo dado.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

5. $f(x) = x, 0 < x < 2\pi$

6. $f(x) = e^{-|x|}, -1 < x < 1$

7. Calcule el espectro de frecuencia de la onda periódica que es extensión periódica de la función f del problema 1.

8. Calcule el espectro de frecuencia de la onda periódica que es extensión periódica de la función f del problema 3.

En los problemas 9 y 10, bosqueje la onda periódica que se proporciona. Calcule el espectro de frecuencia de f.

9. $f(x) = 4 \operatorname{sen} x, 0 < x < \pi; f(x + \pi) = f(x)$
[*Sugerencia:* Utilice (2).]

10. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < \pi \end{cases} \quad f(x + \pi) = f(x)$

11. *a*) Demuestre que $a_n = c_n + c_{-n}$ y $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
b) Utilice los resultados del inciso *a*) y la serie compleja de Fourier del ejemplo 1 para obtener la expansión de la serie de Fourier de f.

12. La función f del problema 1 es impar. Utilice la serie compleja de Fourier para obtener la expansión en series seno de Fourier de f.

4.5 Problema de Sturm-Liouville

■ **Repaso** Por conveniencia, presentamos aquí un breve repaso de algunas de las ecuaciones diferenciales ordinarias que serán de importancia en las secciones y capítulos subsecuentes.

Ecuaciones lineales	**Soluciones generales**
$y' + \alpha y = 0,$	$y = c_1 e^{-\alpha x}$
$y'' + \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0$	$y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$
$y'' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha > 0$	$y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$, o $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$

Ecuación de Cauchy-Euler	**Soluciones generales, $x > 0$**
$x^2 y'' + xy' - \alpha^2 y = 0, \quad \alpha \geq 0$	$y = c_1 x^{-\alpha} + c_2 x^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$; $y = c_1 + c_2 \ln x, \quad \alpha = 0$

Ecuación paramétrica de Bessel ($\nu = 0$)	**Solución general, $x > 0$**
$xy'' + y' + \alpha^2 xy = 0,$	$y = c_1 J_0(\alpha x) + c_2 Y_0(\alpha x)$

Ecuación de Legendre ($n = 0, 1, 2, \ldots$)	**Las soluciones particulares son polinomios**
$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0,$	$y = P_0(x) = 1,$ $y = P_1(x) = x,$ $y = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ldots$

En los capítulos 5 y 6 esta regla será de gran utilidad.

En relación con las dos formas de la solución general de $y'' - \alpha^2 y = 0$, de aquí en adelante emplearemos la regla informal siguiente: *Utilice la forma exponencial* $y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$ *cuando el dominio de x sea un intervalo infinito o seminfinito; aplique la forma hiperbólica* $y = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x$ *cuando el dominio de x sea un intervalo finito.*

■ **Valores propios y funciones propias** Las funciones ortogonales están presentes en la solución de ecuaciones diferenciales. Más aún, se puede generar un conjunto de funciones ortogonales mediante la resolución de un problema evaluado en el límite de dos puntos y que involucre una ecuación diferencial lineal de segundo orden que contenga un parámetro λ. En el ejemplo 2 de la sección 3.9 se pudo ver que el problema evaluado en el límite

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \tag{1}$$

contenía soluciones no triviales solamente cuando el parámetro λ tenía los valores $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ llamados **valores propios**. Las correspondientes soluciones no triviales $y = c_2 \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ o simplemente $y = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ se llaman **funciones propias** del problema. Por ejemplo, para (1) tenemos:

no es un valor propio
↓
Problemas de valores en la frontera: $y'' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

La solución es trivial: $y = 0.$

es un valor propio $(n = 2)$
↓
Problemas de valores en la frontera: $y'' + \dfrac{4\pi^2}{L^2} y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$

La solución es no trivial: $y = \operatorname{sen}(2\pi x/L).$

Para cumplir nuestros propósitos en este capítulo, es importante reconocer que el conjunto de funciones generadas por este problema de valores en la frontera, esto es, $\{\text{sen}(n\pi x/L)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es el conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $[0, L]$ utilizado como base de la serie seno de Fourier.

Ejemplo 1 Valores propios y funciones propias

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que, considerando los tres casos posibles del parámetro λ (cero, negativo o positivo; esto es, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\alpha > 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$), los valores propios y las funciones propias del problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(L) = 0 \tag{2}$$

son, respectivamente, $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, y $y = c_1 \cos(n\pi x/L)$, $c_1 \neq 0$. En contraste con (1), $\lambda_0 = 0$ es un valor propio para este problema de valor en la frontera, y $y = 1$ es la función propia correspondiente. Esta última resulta de resolver $y'' = 0$ sujeta a las mismas condiciones de frontera $y'(0) = 0$ $y'(L) = 0$. Observe también que $y = 1$ puede incorporarse a la familia $y = \cos(n\pi x/L)$ al establecer $n = 0$. El conjunto $\{\cos(n\pi x/L)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal en el intervalo $[0, L]$. Consulte el problema 3 de los ejercicios 4.5. ❑

■ **Problema regular de Sturm-Liouville** Los problemas (1) y (2) son casos especiales de un importante problema general de valores en la frontera de dos puntos. Sean p, q, r y r' funciones continuas con valores reales en un intervalo $[a, b]$, y sean $r(x) > 0$ y $p(x) > 0$ para toda x presente en el intervalo. Entonces

$$\textit{Resolver:} \qquad \frac{d}{dx}[r(x)y'] + (q(x) + \lambda p(x))y = 0 \tag{3}$$

$$\textit{Sujeta a:} \qquad A_1 y(a) + B_1 y'(a) = 0 \tag{4}$$

$$A_2 y(b) + B_2 y'(b) = 0 \tag{5}$$

se dice que es un **problema regular de Sturm-Liouville**. Se supone que los coeficientes de las condiciones de frontera (4) y (5) son reales e independientes de λ. Además, A_1 y B_1 no son cero y A_2 y B_2 tampoco lo son. Los problemas (1) y (2) de valores en la frontera son problemas regulares de Sturm-Liouville. A partir de (1) podemos identificar $r(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $p(x) = 1$ en la ecuación diferencial (3); en la condición de frontera (4) identificamos $a = 0$, $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, y en (5) $b = L$, $A_2 = 1$, $B_2 = 0$. A partir de (2), las identificaciones podrán ser $a = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = 1$ en (4), $b = L$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$ en (5).

La ecuación diferencial (3) es lineal y homogénea. Las condiciones de frontera en (4) y (5) son una combinación lineal de y y y' *igual a cero en un punto*, también se llaman **homogéneas**. Una condición de frontera como $A_2 y(b) + B_2 y'(b) = C_2$, donde C_2 es una constante diferente de cero, es **no homogénea**. Naturalmente, se dice que un problema de valores en la frontera constituido por una ecuación diferencial lineal homogénea y condiciones de frontera homogéneas es homogéneo; de otra forma, es no homogéneo.

Debido a que un problema regular de Sturm-Liouville es un problema homogéneo de valores en la frontera, siempre posee la solución trivial $y = 0$. Sin embargo, no nos interesa esta solución. De igual manera que en el ejemplo 1, para resolver dicho problema buscamos números λ (valores propios) y soluciones y no triviales y que dependan de λ (funciones propias).

■ **Propiedades** El teorema 4.3 es una lista de algunas de las tantas propiedades importantes del problema regular de Sturm-Liouville. Demostraremos solamente la última propiedad.

TEOREMA 4.3 Propiedades del problema regular de Sturm-Liouville

a) Existe un número infinito de valores propios reales que pueden disponerse en orden ascendente $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots$ de tal manera que $\lambda_n \to \infty$ a medida que $n \to \infty$.

b) Para cada valor propio existe solamente una función propia (excepto para múltiplos constantes diferentes de cero).

c) Las funciones propias correspondientes a los diferentes valores propios son linealmente independientes.

d) El conjunto de funciones propias correspondientes al conjunto de valores propios es ortogonal respecto a la función peso $p(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Demostración de *d*) Sean y_m y y_n funciones propias correspondientes a los valores propios λ_m y λ_n, respectivamente. Entonces

$$\frac{d}{dx}[r(x)y_m'] + (q(x) + \lambda_m p(x))y_m = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}[r(x)y_n'] + (q(x) + \lambda_n p(x))y_n = 0. \tag{7}$$

Multiplicamos (6) por y_n y (7) por y_m y al restar las dos ecuaciones obtenemos

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = y_m \frac{d}{dx}[r(x)y_n'] - y_n \frac{d}{dx}[r(x)y_m'].$$

Integramos por partes este último resultado desde $x = a$ hasta $x = b$ y resulta

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)y_m y_n\,dx = r(b)[y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b)] - r(a)[y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a)]. \tag{8}$$

Las funciones propias y_m y y_n deben satisfacer las condiciones de frontera (4) y (5). En particular, a partir de (4) obtenemos

$$A_1 y_m(a) + B_1 y_m'(a) = 0$$

$$A_1 y_n(a) + B_1 y_n'(a) = 0.$$

Para que A_1 y B_1 satisfagan este sistema, sin que ambos sean iguales a cero, el determinante de los coeficientes debe ser cero:

$$y_m(a)y_n'(a) - y_n(a)y_m'(a) = 0.$$

Al aplicar un argumento similar a (5) nos da

$$y_m(b)y_n'(b) - y_n(b)y_m'(b) = 0.$$

Utilizamos estos dos resultados en (8) para demostrar que ambos miembros del lado derecho son iguales a cero. Por lo tanto, establecimos la relación ortogonal

$$\int_a^b p(x)y_m(x)y_n(x)\,dx = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n. \tag{9}$$ ❑

Asimismo, se puede demostrar que el conjunto de funciones propias ortogonales $\{y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots\}$ de un problema regular de Sturm-Liouville es completo en $[a, b]$. Consulte la página 276.

Ejemplo 2 Un problema regular de Sturm-Liouville

Resolver el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0. \tag{10}$$

Solución Debe demostrarse que para $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2 < 0$, donde $\alpha > 0$, el problema (10) de valor en la frontera tiene solamente la solución trivial $y = 0$. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, la solución general de la ecuación diferencial $y'' + \alpha^2 y = 0$ es $y = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. Ahora la condición $y(0) = 0$ implica $c_1 = 0$ en esta solución, por ello solamente nos queda $y = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La segunda condición de frontera $y(1) + y'(1) = 0$ se satisface cuando

$$c_2 \operatorname{sen} \alpha + c_2 \alpha \cos \alpha = 0.$$

Establecemos $c_2 \neq 0$ y podemos observar que la última ecuación es equivalente a

$$\tan \alpha = -\alpha. \tag{11}$$

Si $x = \alpha$ en (11), entonces la figura 4.20 muestra la plausibilidad de que exista un número infinito de raíces de la ecuación $\tan x = -x$, es decir, las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de $y = -x$ interseca las ramas de la gráfica de $y = \tan x$. Los valores propios del problema (10) son, entonces, $\lambda_n = \alpha_n^2$, donde α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son las raíces *positivas* consecutivas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de (11). Con ayuda de un sistema asistido por computadora se demuestra fácilmente que, redondeando a cuatro cifras decimales, $\alpha_1 = 2.0288$, $\alpha_2 = 4.9132$, $\alpha_3 = 7.9787$ y $\alpha_4 = 11.0855$, y las soluciones correspondientes son $y_1 = \operatorname{sen} 2.0288x$, $y_2 = \operatorname{sen} 4.9132x$, $y_3 = \operatorname{sen} 7.9787x$ y $y_4 = \operatorname{sen} 11.0855x$. En general, las funciones propias del problema son $\{\operatorname{sen} \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

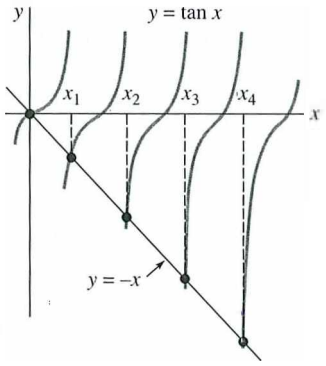


Figura 4.20 Raíces positivas de $\tan x = -x$

Con las identificaciones $r(x) = 1, q(x) = 0, p(x) = 1, A_1 = 1, B_1 = 0, A_2 = 1$ y $B_2 = 1$ podemos observar que (10) es un problema regular de Sturm-Liouville. Por lo tanto, $\{\operatorname{sen} \alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es un conjunto ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. ❑

En algunas circunstancias, es posible demostrar la ortogonalidad de las soluciones de (3) sin necesidad de especificar una condición de frontera en $x = a$ y en $x = b$.

■ **Problema singular de Sturm-Liouville** Existen otras condiciones importantes en las cuales buscamos soluciones no triviales de la ecuación diferencial (3):

- $r(a) = 0$ y una condición de frontera del tipo dado en (5) especificada en $x = b$; (12)
- $r(b) = 0$ y una condición de frontera del tipo dado en (4) especificada en $x = a$; (13)
- $r(a) = r(b) = 0$ y que no se especifique una condición de frontera en $x = a$ o en $x = b$; (14)
- $r(a) = r(b)$ y las condiciones de frontera $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. (15)

Se dice que la ecuación diferencial (3) junto con una de las condiciones (12) o (13) es un problema **singular** de valor en la frontera. Se afirma también que la ecuación (3) con las condiciones especificadas en (5) es un problema **periódico** de valor en la frontera (y otra afirmación es que las condiciones de frontera son periódicas). Observe que si, digamos, $r(a) = 0$ entonces $x = a$ *puede* ser un punto singular de la ecuación diferencial y, en consecuencia, una solución de (3) puede hacerse infinita a medida que $x \to a$. Sin embargo, a partir de (8) vemos que si $r(a) = 0$, entonces no se requiere de una condición de frontera en $x = a$ para demostrar la ortogonalidad de las funciones propias *siempre y cuando* estas soluciones estén acotadas en ese punto. Este último requisito garantiza la existencia de las integrales involucradas. Suponiendo que las soluciones de (3) están acotadas en el intervalo cerrado $[a, b]$, por simple inspección de la ecuación (8) advertimos que:

- si $r(a) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera en $x = a$; (16)
- si $r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera en $x = b$;* (17)
- si $r(a) = r(b) = 0$, entonces la relación de ortogonalidad (9) es válida sin ninguna condición de frontera ya sea en $x = a$ o $x = b$; (18)
- si $r(a) = r(b)$, entonces la relación de ortogonalidad (9) se mantiene con las condiciones de frontera periódicas $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. (19)

■ **Formulación autoadjunta** Si efectuamos la diferenciación $\frac{d}{dx}[r(x)y']$, la ecuación diferencial (3) es lo mismo que

$$r(x)y'' + r'(x)y' + (q(x) + \lambda p(x))y = 0. \tag{20}$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$ es exactamente de la forma dada en (20) con $r(x) = 1 - x^2$ y $r'(x) = -2x$. En otras palabras, otra forma de escribir la ecuación diferencial de Legendre es

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)y'] + n(n + 1)y = 0. \tag{21}$$

Sin embargo, si usted comparara otras ecuaciones diferenciales de segundo orden (digamos, la ecuación de Bessel, las ecuaciones de Cauchy-Euler, y ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes) podría pensar, puesto que el coeficiente de y' es la derivada del coeficiente de y'', que algunas otras ecuaciones diferenciales de segundo orden tienen la forma dada en (3). Por el contrario, si los coeficientes son continuos y $a(x) \neq 0$ para toda x en algún intervalo, entonces *cualquier* ecuación diferencial de segundo orden

$$a(x)y'' + b(x)y' + (c(x) + \lambda d(x))y = 0 \tag{22}$$

puede escribirse nuevamente de la manera llamada **formulación autoadjunta** (3). Para apreciar esto, procedemos igual que en la sección 2.3, donde volvimos a escribir una ecuación lineal de primer orden $a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ en la forma $\frac{d}{dx}[\mu y] = 0$ dividien-

*Las condiciones (16) y (17) equivalen a seleccionar $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ en (4) y $A_2 = 0$, $B_2 = 0$ en (5), respectivamente.

do la ecuación entre $a_1(x)$ y, después, multiplicando por el factor integrante $\mu = e^{\int P(x)dx}$ donde, suponiendo que no existen factores comunes, $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$. Así, primero dividimos (22) entre $a(x)$. Los primeros dos términos son entonces $Y' + \dfrac{b(x)}{a(x)}Y + \cdots$ donde, para enfatizar, escribimos $Y = y'$. En segundo lugar, multiplicamos esta ecuación por el factor integrador $e^{\int (b(x)/a(x))dx}$, donde se supone que $a(x)$ y $b(x)$ no tienen factores comunes

$$\underbrace{e^{\int (b(x)/a(x))dx}Y' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int (b(x)/a(x))dx}Y}_{\text{derivada de un producto}} + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int (b(x)/a(x))dx}Y\right] + \cdots = \frac{d}{dx}\left[e^{\int (b(x)/a(x))dx}y'\right] + \cdots.$$

En resumen, dividiendo (22) entre $a(x)$ y multiplicando entonces por $e^{\int (b(x)/a(x))dx}$ obtenemos

$$e^{\int (b/a)dx}y'' + \frac{b(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}y' + \left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx} + \lambda\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}\right)y = 0. \tag{23}$$

La ecuación (23) es la forma deseada proporcionada en (20) y es lo mismo que (3):

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[e^{\int (b/a)dx}y'\right]}_{r(x)} + \underbrace{\left(\frac{c(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}\right)}_{q(x)}y + \underbrace{\lambda\frac{d(x)}{a(x)}e^{\int (b/a)dx}}_{p(x)}y = 0.$$

Por ejemplo, para expresar $3y'' = 6y' + \lambda y = 0$ en la formulación autoadjunta, escribimos $y'' + 2y' + \lambda\frac{1}{3}y = 0$ y después multiplicamos por $e^{\int 2dx} = e^{2x}$. La ecuación resultante es,

$$\underset{\downarrow}{r(x)} \quad \underset{\downarrow}{r'(x)} \quad \underset{\downarrow}{p(x)}$$

$$e^{2x}y'' + 2e^{2x}y' + \lambda\frac{1}{2}e^{3x}y = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}\left[e^{2x}y'\right] + \lambda\frac{1}{3}e^{2x}y = 0.$$

Desde luego, no es necesario expresar una segunda ecuación diferencial (22) en la formulación autoadjunta (3) con el fin de *resolver* la ecuación diferencial. Para cumplir nuestros propósitos utilizamos la fórmula dada en (3) para determinar la función peso $p(x)$ necesaria en la relación de ortogonalidad (9). Los dos ejemplos siguientes muestran las relaciones de ortogonalidad para las funciones de Bessel y los polinomios de Legendre.

Observación.

Ejemplo 3 Ecuación paramétrica de Bessel

En la sección 5.3 vimos que la solución general de la ecuación diferencial paramétrica de Bessel $x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)y = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ es $y = c_1J_n(\alpha x) + c_2Y_n(\alpha x)$. Luego de dividir la ecuación paramétrica de Bessel entre el coeficiente de mayor grado x^2 y multiplicar la ecuación resultante por el factor de integración $e^{\int (1/x)dx} = e^{\ln x} = x$, $x > 0$, obtenemos la formulación autoadjunta

$$xy'' + y' + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0,$$

donde identificamos $r(x) = x$, $q(x) = -n^2/x$, $p(x) = x$ y $\lambda = \alpha^2$. Ahora $r(0) = 0$, y de las dos soluciones $J_n(\alpha x)$ y $Y_n(\alpha x)$ sólo $J_n(\alpha x)$ está acotada en $x = 0$. Por lo tanto, en vista de la ecuación (16), el conjunto $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_0^b xJ_n(\alpha_i x)J_n(\alpha_j x)\,dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \tag{24}$$

dada α_i, y por lo tanto los valores propios $\lambda_i = \alpha_i^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, sean definidos mediante una condición de frontera en $x = b$ del tipo proporcionado en la ecuación (5):

$$A_2 J_n(\lambda b) + B_2 \alpha J_n'(\alpha b) = 0.* \tag{25}$$ ❑

Para cualquier valor de A_2 y B_2, no siendo ambos iguales a cero, se sabe que (25) tiene un número infinito de raíces $x_i = \alpha_i b$. Los valores propios son entonces $\lambda_i = \alpha_i^2 = (x_i/b)^2$. En el capítulo siguiente se comentará más acerca de los valores propios.

Ejemplo 4 Ecuación de Legendre

A partir del resultado proporcionado por (21) podemos identificar $q(x) = 0$, $p(x) = 1$ y $\lambda = n(n + 1)$. De la sección 5.3, recuerde que cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$ la ecuación de Legendre tiene soluciones polinomiales $P_n(x)$. Ahora podemos hacer la observación de que $r(-1) = r(1) = 0$ junto con el hecho de que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son las únicas soluciones de (21) que están acotadas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$, para concluir de (18) que el conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en $[-1, 1]$. La relación de ortogonalidad es

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n.$$ ❑

Comentarios

i) Un problema de Sturm-Liouville se considera singular cuando el intervalo en que se trabaja es infinito. Consulte los problemas 11 y 12 de los ejercicios 4.5.

ii) Aun cuando las condiciones de los coeficientes p, q, r y r' sean las supuestas en el problema regular de Sturm-Liouville, si las condiciones de frontera son periódicas, entonces la propiedad *b*) del teorema 4.3 no es válida. Se le pide al lector demostrar, en el problema 4 de los ejercicios 4.5, que correspondientes a cada valor propio del problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L).$$

existen dos funciones propias linealmente independientes.

---

*El factor extra de α en (25) proviene de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx} J_n(\alpha x) = J_n'(\alpha x) \frac{d}{dx} \alpha x = \alpha J_n'(\alpha x).$$

EJERCICIOS 4.5 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas 1 y 2, determine las funciones propias y la ecuación que define los valores propios para el problema de valores en la frontera. Utilice un sistema asistido por computadora para aproximar los cuatro primeros valores propios λ_1, λ_2, λ_3 y λ_4. Proporcione las funciones propias correspondientes a estas aproximaciones.

1. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) + y'(1) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 0$
3. Considere la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ sujeta a $y'(0) = 0$, $y'(L) = 0$. Demuestre que las funciones propias son

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[0, L]$, es la base de la serie coseno de Fourier.

4. Considere la ecuación $y'' + \lambda y = 0$ sujeta a las condiciones de frontera periódicas $y(-L) = y(L)$, $y'(-L) = y'(L)$. Demuestre que las funciones propias son

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{L}x, \cos\frac{2\pi}{L}x, \ldots, \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{L}x, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{L}x, \ldots\right\}.$$

Este conjunto, que es ortogonal en $[-L, L]$, es la base de las series de Fourier.

5. Encuentre la norma cuadrada para cada función propia del problema 1.

6. Demuestre que para las funciones propias del ejemplo 2,

$$\|\operatorname{sen}\alpha_n x\|^2 = \frac{1}{2}[1 + \cos^2\alpha_n].$$

7. *a*) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0,\ y(1) = 0,\ y(5) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial como una formulación autoadjunta.

c) Proporcione una relación de ortogonalidad.

8. *a*) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$y'' + y' + \lambda y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2) = 0.$$

b) Exprese la ecuación diferencial como una formulación autoadjunta.

c) Proporcione una relación de ortogonalidad.

9. La **ecuación diferencial de Laguerre**

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tiene soluciones polinomiales $L_n(x)$. Exprese la ecuación como una formulación autoadjunta y proporcione una relación de ortogonalidad.

10. La **ecuación diferencial de Hermite**

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

tiene soluciones polinomiales $H_n(x)$. Exprese la ecuación como una formulación autoadjunta y proporcione una relación de ortogonalidad.

11. Considere el problema regular de Sturm-Liouville:

$$\frac{d}{dx}[(1 + x^2)y'] + \frac{\lambda}{1 + x^2}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

a) Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera.

[*Sugerencia:* Establezca $x = \tan\theta$ y después utilice la regla de la cadena.]

b) Proporcione una relación de ortogonalidad.

12. *a*) Encuentre las funciones propias y la ecuación que defina los valores propios para el problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - 1)y = 0,$$
$$y \text{ está acotada en } x = 0,\ y(3) = 0.$$

b) Utilice la tabla 5.1 de la sección 5.3 del tomo I para calcular los valores aproximados de los primeros cuatro valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4.

Problemas de análisis

13. Considere el caso especial del problema regular de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$:

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + \lambda p(x)y = 0, \quad y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

¿Es $\lambda = 0$ un valor propio del problema? Proporcione soporte a su respuesta.

Tareas para el laboratorio de cómputo

14. *a*) Proporcione una relación de ortogonalidad para el problema de Sturm-Liouville del ejercicio 1.

b) Utilice como apoyo un sistema asistido por computadora para demostrar la relación de ortogonalidad de las funciones propias y_1 y y_2 que correspondan a los primeros dos valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente.

15. *a*) Proporcione una relación de ortogonalidad para el problema de Sturm-Liouville del ejercicio 2.

b) Mediante un sistema asistido por computadora, demuestre la relación de ortogonalidad de las funciones propias y_1 y y_2 que correspondan a los primeros dos valores propios λ_1 y λ_2, respectivamente.

4.6 Series de Bessel y de Legendre

■ **Introducción** Las series de Fourier, las series coseno de Fourier y las series seno de Fourier son tres formas útiles para expandir una función en términos de un conjunto ortogonal de funciones. Sin embargo, dichas expansiones de ninguna manera están limitadas a conjuntos ortogonales de funciones trigonométricas. En la sección 4.1 estudiamos que una función f definida en un intervalo (a, b) podía expandirse, al menos formalmente, en términos de cualquier conjunto de funciones $\{\phi_n(x)\}$ que sea ortogonal respecto a una función peso en $[a, b]$. Muchas de estas expansiones de series ortogonales o series de Fourier generalizadas provienen de problemas de Sturm-Louiville los cuales, a su vez, surgen de intentos de resolver las ecuaciones diferenciales lineales parciales que sirven como modelos para sistemas físicos. Las expansiones en series de Fourier y ortogonales (las últimas incluyen las dos series consideradas en esta sección) aparecerán en la consideración subsecuente de estas aplicaciones en los capítulos 5 y 6.

4.6.1 Serie de Fourier-Bessel

En el ejemplo 3 de la sección 4.5, estudiamos que para un valor constante de n el conjunto de funciones de Bessel $\{J_n(\alpha_i x)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = x$ en un intervalo $[0, b]$ cuando α_i se define mediante una condición de frontera de la forma

$$A_2 J_n(\alpha b) + B_2 \alpha J_n'(\alpha b) = 0. \tag{1}$$

Los valores propios del problema correspondiente de Sturm-Liouville son $\lambda_i = \alpha_i^2$. A partir de (7) y (8) de la sección 4.1, la expansión en series ortogonales o las series de Fourier generalizadas de una función f definida en el intervalo $(0, b)$ en términos de este conjunto ortogonal es

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x), \tag{2}$$

donde

$$c_i = \frac{\int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx}{\|J_n(\alpha_i x)\|^2}. \tag{3}$$

La norma cuadrada de la función $J_n(\alpha_i x)$ está definida por la expresión (11) de la sección 4.1:

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \int_0^b x J_n^2(\alpha_i x)\, dx. \tag{4}$$

A la serie (2) con coeficientes (3) se le conoce como **serie de Fourier-Bessel**.

■ **Relaciones de recurrencia diferenciales** Las relaciones de recurrencia diferenciales que se proporcionaron en (20) y (21) de la sección 5.3 a menudo resultan de utilidad en la evaluación de los coeficientes (3). Por conveniencia, a continuación reproducimos dichas relaciones:

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \tag{6}$$

■ **Norma cuadrada** El valor de la norma cuadrada (4) depende de cómo se definan los valores propios $\lambda_i = \alpha_i^2$. Si $y = J_n(\alpha x)$, entonces sabemos, con base en el ejemplo 3 de la sección 4.5, que

$$\frac{d}{dx}[xy'] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0.$$

Después de multiplicar por $2xy'$, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}[xy']^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}[y]^2 = 0.$$

Integramos por partes el último resultado en $[0, b]$ y obtenemos

$$2\alpha^2 \int_0^b xy^2\, dx = \Big([xy']^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)y^2\Big)\Big|_0^b.$$

Puesto que $y = J_n(\alpha x)$, el límite inferior es cero para $n > 0$ ya que $J_n(0) = 0$. Para $n = 0$, la cantidad $[xy']^2 + \alpha^2 x^2 y^2$ es cero en $x = 0$. Por lo tanto,

$$2\alpha^2 \int_0^b x J_n^2(\alpha x)\, dx = \alpha^2 b^2 [J_n'(ab)]^2 + (\alpha^2 b^2 - n^2)[J_n(\alpha b)]^2, \tag{7}$$

donde hemos utilizado la regla de la cadena para escribir $y' = \alpha J_n'(\alpha x)$.

Ahora consideraremos tres casos de la condición de frontera (1).

Caso I: Si seleccionamos $A_2 = 1$ y $B_2 = 0$, entonces (1) es

$$J_n(\alpha b) = 0. \tag{8}$$

Existe un número infinito de raíces positivas $x_i = \alpha_i b$ de (8) (consulte la figura), que definen la α_i como $\alpha_i = x_i/b$. Los valores propios son positivos y, por lo tanto, son $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. Las raíces negativas de (8) no proporcionan nuevos valores propios ya que $J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$. (Consulte la página 264.) El número 0 no es un valor propio para cualquier valor de n puesto que $J_n(0) = 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $J_0(0) = 1$. En otras palabras, si $\lambda = 0$, obtenemos la función trivial (la cual nunca es una función propia) para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y para $n = 0$, $\lambda = 0$ (o, de manera equivalente, $\alpha = 0$) no satisface la ecuación (8). Cuando (6) se escribe en la forma $xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$, a partir de (7) y (8) se deduce que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_{n+1}^2(\alpha_i b). \tag{9}$$

Caso II: Si seleccionamos $A_2 = h \geq 0$, $B_2 = b$, entonces (1) es

$$hJ_n(\alpha b) + \alpha b J_n'(\alpha b) = 0. \tag{10}$$

La ecuación (10) tiene un número infinito de raíces positivas $x_i = \alpha_i b$ para cada entero positivo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Como antes, los valores propios se obtienen a partir de $\lambda_i = \alpha_i^2 = x_i^2/b^2$. $\lambda = 0$ no es un valor propio para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Sustituyendo $\alpha_i b J_n'(\alpha_i b) = -hJ_n(\alpha_i b)$ en (7) se puede ver que la norma cuadrada de $J_n(\alpha_i x)$ es ahora

$$\|J_n(\alpha_i x)\|^2 = \frac{\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2}{2\alpha_i^2} J_n^2(\alpha_i b). \tag{11}$$

Caso III: Si $h = 0$ y $n = 0$ en (10), α_i se define a partir de las raíces de

$$J_0'(\alpha b) = 0. \tag{12}$$

A pesar de que (12) es solamente un caso especial de (10), es la única situación para la cual $\lambda = 0$ es un valor propio. Para entender esto, observe que para $n = 0$, el resultado en (6) implica que $J_0'(\alpha b) = 0$ es equivalente a $J_1(\alpha b) = 0$. Como $x_1 = \alpha_1 b = 0$ es una raíz de la última ecuación, $\alpha_1 = 0$, y debido a que $J_0(0) = 1$ es no trivial, de $\lambda_1 = \alpha_1^2 = x_1^2/b^2$ concluimos que $\lambda_1 = 0$ es un valor propio. Sin embargo, evidentemente no podemos utilizar (11) cuando $\alpha_1 = 0$, $h = 0$, $n = 0$ y $n = 0$. No obstante, a partir de la norma cuadrada (4) tenemos

$$\|1\|^2 = \int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2}. \tag{13}$$

Para $\alpha_i > 0$ podemos utilizar (11) con $h = 0$ y $n = 0$:

$$\|J_0(\alpha_i x)\|^2 = \frac{b^2}{2} J_0^2(\alpha_i b). \tag{14}$$

La definición siguiente resume las tres formas de la serie (2) correspondientes a las normas cuadradas de los tres casos.

DEFINICIÓN 4.8 Serie de Fourier-Bessel

La **serie de Fourier-Bessel** de una formación f definida en el intervalo $(0, b)$ está dada por

i)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{15}$$

$$c_i = \frac{2}{b^2 J_{n+1}^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{16}$$

donde α_i está definido por $J_n(\alpha b) = 0$.

ii)
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i J_n(\alpha_i x) \tag{17}$$

$$c_i = \frac{2\alpha_i^2}{(\alpha_i^2 b^2 - n^2 + h^2) J_n^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_n(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{18}$$

donde α_i está definido por $hJ_n(\alpha b) + \alpha b J_n'(\alpha b) = 0$.

iii)
$$f(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{\infty} c_i J_0(\alpha_i x) \tag{19}$$

$$c_1 = \frac{2}{b^2} \int_0^b x f(x)\, dx, \quad c_i = \frac{2}{b^2 J_0^2(\alpha_i b)} \int_0^b x J_0(\alpha_i x) f(x)\, dx, \tag{20}$$

donde α_i está definido por $J_0'(\alpha b) = 0$.

■ **Convergencia de una serie de Fourier-Bessel** Las condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier-Bessel no están particularmente restringidas.

TEOREMA 4.4 Condiciones para la convergencia

Si f y f' son continuas en un intervalo abierto $(0, b)$, entonces una expansión Fourier-Bessel de f converge hacia $f(x)$ en cualquier punto donde f es continua, y converge hacia el promedio $[f(x+) + f(x-)]/2$ en un punto donde f es discontinua.

Ejemplo 1 Expansión en una serie de Fourier-Bessel

Expandir $f(x) = x$, $0 < x < 3$, en una serie de Fourier-Bessel, utilizando las funciones Bessel de orden uno que satisfagan la condición de frontera $J_1(3\alpha) = 0$.

Solución Utilizamos (15) donde los coeficientes c_i están dados por (16) con $b = 3$:

$$c_i = \frac{2}{3^2 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^3 x^2 J_1(\alpha_i x)\, dx.$$

Para evaluar esta integral establecemos $t = \alpha_i x$, $dx = dt/\alpha_i$, $x^2 = t^2/\alpha_i^2$ y utilizamos (5) en la forma $\frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)] = t^2 J_1(t)$:

$$c_i = \frac{2}{9\alpha_i^3 J_2^2(3\alpha_i)} \int_0^{3\alpha_i} \frac{d}{dt}[t^2 J_2(t)]\, dt = \frac{2}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}.$$

Por lo tanto, la expansión buscada es

$$f(x) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i J_2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x). \qquad \square$$

En el problema 1 de los ejercicios 4.6, se solicita calcular los primeros cuatro valores de α_i para la serie de Bessel precedente.

Ejemplo 2 Expansión en una serie de Fourier-Bessel

Si en el ejemplo 1 α_i se define mediante $J_1(3\alpha) + \alpha J_1'(3\alpha) = 0$, entonces lo único que cambia en la expansión es el valor de la norma cuadrada. Multiplicando la condición de frontera por 3 obtenemos $3J_1(3\alpha) + 3\alpha J_1'(3\alpha) = 0$, la cual es igual a (10) cuando $h = 3$, $b = 3$ y $n = 1$. Por lo tanto, (18) y (17) nos dan, a su vez,

$$c_i = \frac{18\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)}$$

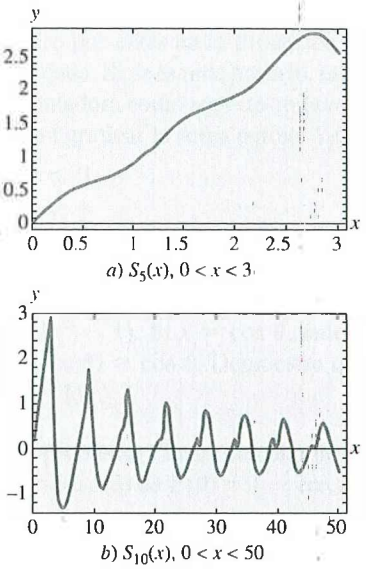
y

$$f(x) = 18\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i J_2(3\alpha_i)}{(9\alpha_i^2 + 8)J_1^2(3\alpha_i)} J_1(\alpha_i x). \qquad \square$$

■ **Uso de las computadoras** Puesto que las funciones de Bessel son funciones "integradas" en un sistema asistido por computadora, calcular los valores aproximados de α_i y de los coeficientes c_i de una serie de Fourier-Bessel es tarea sencilla. Por ejemplo, en (9) podemos pensar que $x_i = \alpha_i b$ es una raíz positiva de la ecuación $hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$. Por lo tanto, en el ejemplo 2 hemos utilizado un sistema asistido por computadora para encontrar las primeras cinco raíces positivas x_i de $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$ y a partir de estas raíces obtenemos los primeros cinco valores propios de α_i: $\alpha_1 = x_1/3 = 0.98320$, $\alpha_2 = x_2/3 = 1.94704$, $\alpha_3 = x_3/3 = 2.95758$, $\alpha_4 = x_4/3 = 3.98538$ y $\alpha_5 = x_5/3 = 5.02078$. Conociendo las raíces $x_i = 3\alpha_i$ y α_i, y α_i, utilizamos de nuevo un sistema computacional para calcular los valores numéricos de $J_2(3\alpha_i)$, $J_1^2(3\alpha_i)$, y, por último, los coeficientes c_i. De esta forma encontramos que la quinta suma parcial $S_5(x)$ para la representación de la serie de Fourier-Bessel de $f(x) = x$, $0 < x < 3$ en el ejemplo 2 es

$$S_5(x) = 4.01844\,J_1(0.98320x) - 1.86937\,J_1(1.94704x) + 1.07106\,J_1(2.95758x) - 0.70306\,J_1(3.98538x) + 0.50343\,J_1(5.02078x).$$

La gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo $0 < x < 3$ se muestra en la figura 4.21*a*). En la figura 4.21*b*) hemos graficado $S_{10}(x)$ en el intervalo $0 < x < 50$. Observe que fuera del intervalo de definición $0 < x < 3$, la serie no converge hacia una extensión periódica de f debido a que las funciones de Bessel no son periódicas. Consulte los problemas 11 y 12 de los ejercicios 4.6.



a) $S_5(x)$, $0 < x < 3$

b) $S_{10}(x)$, $0 < x < 50$

Figura 4.21 Sumas parciales de una serie de Fourier-Bessel

4.6.2 Serie de Fourier-Legendre

A partir del ejemplo 4 de la sección 4.5, sabemos que el conjunto de polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Además, se puede probar que la norma cuadrada de un polinomio $P_n(x)$ depende de n en la forma siguiente:

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

La expansión en series ortogonales de una función en términos de los polinomios de Legendre se sintetiza en la definición siguiente:

DEFINICIÓN 4.9 Serie de Fourier-Legendre

La **serie de Fourier-Legendre** de una función f definida en el intervalo $(-1, 1)$ está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{21}$$

donde

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx. \tag{22}$$

■ **Convergencia de una serie de Fourier-Legendre** En el teorema siguiente se proporcionan condiciones suficientes para la convergencia de una serie Fourier-Legendre.

TEOREMA 4.5 Condiciones para la convergencia

Si f y f' son continuas en $(-1, 1)$, entonces la serie de Fourier-Legendre (21) converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad, y converge hacia el promedio $[f(x+) + f(x-)]/2$ en un punto de discontinuidad.

Ejemplo 3 Expansión de una serie de Fourier-Legendre

Escribir nuevamente los primeros cuatro términos diferentes de cero en la expansión Fourier-Legendre para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < 1. \end{cases}$$

Solución En la página 269 se muestra una relación con algunos de los primeros polinomios de Legendre. A partir de éstos y de (22) tenemos

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot 1\,dx = \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot x\,dx = \frac{3}{4}$$

$$c_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_2(x)\,dx = \frac{5}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = 0$$

$$c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_3(x)\,dx = \frac{7}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dx = -\frac{7}{16}$$

$$c_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_4(x)\,dx = \frac{9}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,dx = 0$$

$$c_5 = \frac{11}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_5(x)\,dx = \frac{11}{2}\int_{0}^{1} 1 \cdot \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\,dx = \frac{11}{32}.$$

De modo que, $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) + \cdots$. ❑

De manera similar a las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre son funciones incluidas en sistemas algebraicos de cómputo como *Maple* y *Mathematica*, por lo que cada uno de los coeficientes relacionados líneas antes puede encontrarse mediante la aplicación de integración de dichos programas. De hecho, utilizando un sistema asistido por computadora, podemos encontrar que $c_6 = 0$ y $c_7 = -\frac{65}{256}$. La quinta suma parcial de la representación de la serie de Fourier-Legendre para la función f definida en el ejemplo 3 es entonces

$$S_5(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{3}{4}P_1(x) - \frac{7}{16}P_3(x) + \frac{11}{32}P_5(x) - \frac{65}{256}P_7(x).$$

La gráfica de $S_5(x)$ en el intervalo $-1 < x < 1$ se proporciona en la figura 4.22.

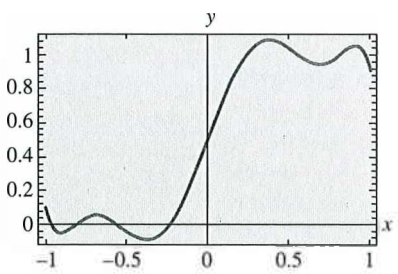


Figura 4.22 Suma parcial $S_5(x)$ de la serie de Fourier-Legendre

■ **Forma alterna de la serie** En algunas aplicaciones, la serie de Fourier-Legendre aparece de una forma alterna. Si establecemos $x = \cos\theta$, entonces $x = 1$ implica que $\theta = 0$, mientras $x = -1$ implica que $\theta = \pi$. Como $dx = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, (21) y (22) se convierten, respectivamente, en

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta) \tag{23}$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} F(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta, \tag{24}$$

donde $f(\cos\theta)$ se ha reemplazado por $F(\theta)$.

EJERCICIOS 4.6 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

4.6.1 Serie de Fourier-Bessel

En los problemas 1 y 2, utilice la tabla 5.1 de la sección 5.3.

1. Encuentre los primeros cuatro $\alpha_i > 0$ definidos por $J_1(3\alpha) = 0$.
2. Encuentre los primeros cuatro $\alpha_i \geq 0$ definidos por $J_0'(2\alpha) = 0$.

En los problemas del 3 al 6, expanda $f(x) = 1$, $0 < x < 2$, en la serie de Fourier-Bessel utilizando las funciones de Bessel de orden cero que satisfagan la condición de frontera proporcionada.

3. $J_0(2\alpha) = 0$
4. $J_0'(2\alpha) = 0$
5. $J_0(2\alpha) + 2\alpha J_0'(2\alpha) = 0$
6. $J_0(2\alpha) + \alpha J_0'(2\alpha) = 0$

En los problemas del 7 al 10, expanda la función dada en una serie de Fourier-Bessel utilizando las funciones Bessel del mismo orden que en la condición de frontera indicada.

7. $f(x) = 5x$, $0 < x < 4$
   $3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0$
8. $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$
   $J_2(\alpha) = 0$
9. $f(x) = x^2$, $0 < x < 3$
   $J_0'(3\alpha) = 0$
   [*Sugerencia:* $t^3 = t^2 \cdot t$.]
10. $f(x) = 1 - x^2$, $0 < x < 1$
    $J_0(\alpha) = 0$

Tareas para el laboratorio de cómputo

11. *a*) Utilice un sistema asistido por computadora para graficar $y = 3J_1(x) + xJ_1'(x)$ en un intervalo de tal forma que se desplieguen las primeras cinco intercepciones positivas de x en la gráfica.
    b) Utilice la capacidad de búsqueda de raíces de su sistema asistido por computadora para aproximar las cinco primeras raíces positivas x_i de la ecuación $3J_1(x) + xJ_1'(x) = 0$.
    c) Use los datos obtenidos en el inciso *b*) para calcular los primeros cinco valores positivos de α_i que satisfagan
    $$3J_1(4\alpha) + 4\alpha J_1'(4\alpha) = 0.$$
    (Consulte el problema 7.)
    d) Si se le pide hacerlo, encuentre los primeros diez valores positivos de α_i.
12. *a*) Use los valores de α_i obtenidos en el inciso *c*) del problema 11 y un sistema asistido por computadora para aproximar los valores de los cinco primeros coeficientes de c_i en la serie de Fourier-Bessel que se obtuvo en el problema 7.
    b) Mediante un sistema asistido por computadora, grafique las sumas parciales $S_N(x)$, $N = 1, 2, 3, 4, 5$, de la serie de Fourier-Bessel del problema 7.
    c) Si se le pide hacerlo, grafique la suma parcial $S_{10}(x)$ en $0 < x < 4$ y en $0 < x < 50$.

Problemas de análisis

13. Si se graficaran las sumas parciales del problema 12 en un intervalo simétrico tal que $-30 < x < 30$, ¿las gráficas tendrían alguna simetría? Explique su respuesta.
14. *a*) Bosqueje, a mano, una gráfica de hacia dónde piensa usted que converge la serie de Fourier-Bessel del problema 3 en el intervalo $-2 < x < 2$.
    b) Bosqueje, a mano, una gráfica de hacia dónde piensa usted que converge la serie de Fourier-Bessel en el intervalo $-4 < x < 4$ si los valores α_i del problema 7 estuvieran definidos por $3J_2(4\alpha) + 4\alpha J_2'(4\alpha) = 0$.

4.6.2 Serie de Fourier-Legendre

En los problemas 15 y 16, escriba nuevamente los primeros cinco términos diferentes de cero presentes en la expansión de Fourier-Legendre de la función dada. Si se le pide hacerlo, utilice un sistema asistido por computadora como soporte en la evaluación de los coeficientes y para graficar la suma parcial $S_5(x)$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$
16. $f(x) = e^x$, $-1 < x < 1$
17. Los primeros tres polinomios de Legendre son $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Si $x = \cos\theta$, entonces $P_0(\cos\theta) = 1$ y $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Demuestre que $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$.
18. Utilice los resultados del problema 17 para calcular la expansión de Fourier-Legendre (23) de $F(\theta) = 1 - \cos 2\theta$.
19. El polinomio de Legendre $P_n(x)$ es una función par o impar, dependiendo de si n es par o impar. Demuestre que si f es una función par en el intervalo $(-1, 1)$, entonces (21) y (22) se convierten, respectivamente, en
    $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} P_{2n}(x) \tag{25}$$
    $$c_{2n} = (4n + 1)\int_0^1 f(x)P_{2n}(x)\,dx. \tag{26}$$
20. Demuestre que si f es una función impar en el intervalo $(-1, 1)$, entonces (21) y (22) se convierten, respectivamente, en
    $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(x) \tag{27}$$
    $$c_{2n+1} = (4n + 3)\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)\,dx. \tag{28}$$
    Las series (25) y (27) pueden utilizarse también cuando f se defina solamente en el intervalo $(0, 1)$. Ambas series representan a f en $(0, 1)$; sin embargo, en el intervalo $(-1, 0)$, (25) representa una extensión par, mientras que (27) representa una extensión impar. En los problemas 21 y 22, escriba nuevamente los primeros cuatro términos diferentes de cero en la expansión indicada de la función dada. ¿Qué función representa la serie en el intervalo $(-1, 1)$? Mediante un sistema asistido por computadora, grafique la suma parcial $S_4(x)$.

21. $f(x) = x,\ 0 < x < 1$; (25)

22. $f(x) = 1,\ 0 < x < 1$; (27)

Problemas de análisis

23. ¿Por qué una expansión de Fourier-Legendre de una función polinómica definida en el intervalo $(-1, 1)$ es necesariamente una serie finita?

24. Aplique su conclusión del problema 23 para calcular la serie de Fourier-Legendre de $f(x) = x^2$. La serie de $f(x) = x^3$. *No* utilice las ecuaciones (21) y (22).

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

Las respuestas para los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-32.

En los problemas del 1 al 10, llene los espacios o responda verdadero o falso sin consultar el libro.

1. Las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^5$ son ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$. _____

2. El producto de una función impar f con una función impar g es una función _____.

3. Para expandir $f(x) = |x| + 1$, $-\pi < x < \pi$, en una serie trigonométrica apropiada utilizaríamos una serie _____.

4. $y = 0$ nunca es una función propia de un problema de Sturm-Liouville. _____

5. $\lambda = 0$ nunca es un valor propio de un problema de Sturm-Liouville _____.

6. Si la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0 \\ -x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

se expande en una serie de Fourier, la serie convergirá hacia _____ en $x = -1$, hacia _____ en $x = 0$ y hacia _____ en $x = 1$.

7. Suponga que la función $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$, se expande en una serie de Fourier, en una serie coseno y en una serie seno. En $x = 0$, la serie de Fourier convergirá hacia _____, la serie coseno convergirá hacia _____ y la serie seno convergirá hacia _____.

8. La función propia correspondiente para el problema de valor en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0,\ y'(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0$$

para $\lambda = 25$ es _____.

9. El conjunto $\{P_{2n}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de polinomios de Legendre de grado par es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. _____

10. El conjunto $\{P_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ de polinomios de Legendre es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[-1, 1]$. Así, para $n > 0$, $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx =$ _____.

11. Sin realizar ningún cálculo, explique por qué la serie coseno de $f(x) = \cos^2 x$, $0 < x < \pi$, es la serie finita $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

12. *a*) Demuestre que el conjunto

$$\left\{ \operatorname{sen}\frac{\pi}{2L}x,\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2L}x,\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2L}x,\ \ldots \right\}$$

es ortogonal en el intervalo $0 \le x \le L$.

b) Encuentre la norma de cada función del inciso *a*). Construya un conjunto ortonormal.

13. Expanda $f(x) = |x| - x$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier.

14. Expanda $f(x) = 2x^2 - 1$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier.

15. Expanda $f(x) = e^x$, $0 < x < 1$, en una serie coseno y en una serie seno.

16. En los problemas 13, 14 y 15, bosqueje la extensión periódica de f hacia donde converge cada serie.

17. Encuentre los valores propios y las funciones propias del problema de valor en la frontera

$$x^2y'' + xy' + 9\lambda y = 0,\ y'(1) = 0,\ y(e) = 0.$$

18. Proporcione una relación de ortogonalidad a las funciones propias del problema 17.

19. La ecuación diferencial de Chebyshev

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

tiene una solución polinómica $y = T_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Especifique la función peso $p(x)$ y el intervalo donde es ortogonal el conjunto de polinomios de Chebyshev $\{T_n(x)\}$. Escriba una relación de ortogonalidad.

20. Expanda la función periódica ilustrada en la figura 4.23 en una serie de Fourier apropiada.

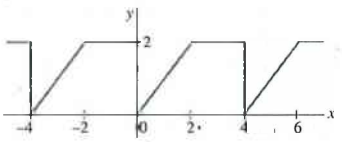


Figura 4.23 Gráfica para el problema 20

21. Expanda $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 4 \end{cases}$ en una serie de Fourier-Bessel, utilice las funciones de Bessel de orden cero que satisfacen la condición de frontera $J_0(4\alpha) = 0$.

22. Expanda $f(x) = x^4$, $-1 < x < 1$, en una serie de Fourier-Legendre.

Por Dayet

CAPÍTULO

5

Problemas de valores en la frontera en coordenadas rectangulares

Estructura del capítulo

5.1 Ecuaciones diferenciales parciales separables
5.2 Ecuaciones clásicas y problemas de valores en la frontera
5.3 La ecuación de calor
5.4 La ecuación de onda
5.5 La ecuación de Laplace
5.6 Problemas de valores en la frontera no homogéneos
5.7 Desarrollos en series ortogonales
5.8 Serie de Fourier con dos variables
Ejercicios de repaso del capítulo 5

En este capítulo, y en los dos siguientes, se enfatizan dos procedimientos utilizados a menudo para resolver problemas que involucran temperaturas y desplazamientos oscilatorios y potenciales. Tales problemas, llamados problemas de valores en la frontera (PVF), se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP) lineales de segundo orden relativamente sencillas. La finalidad de ambos procedimientos es encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial parcial reduciéndola a una o más ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Comenzamos con el método de separación de variables para las EDP. La aplicación de este método a un problema de valores en la frontera nos lleva de manera natural a los importantes temas estudiados en el capítulo 4, como son los problemas de Sturm-Liouville, los valores propios, las funciones propias y el desarrollo de una función en una serie de funciones ortogonales.

5.1 Ecuaciones diferenciales parciales separables

Repaso Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), igual que las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), se clasifican en *lineales* y *no lineales*. Así como en las EDO (consulte la ecuación (6) de la sección 1.1), en una EDP lineal la variable dependiente y sus derivadas parciales aparecen sólo en la primera potencia. En este capítulo, y en los subsecuentes, nuestro interés se centrará solamente en ecuaciones diferenciales parciales lineales.

Ecuación diferencial parcial lineal Si establecemos que u denota la variable dependiente x y la variable independiente y, entonces la forma general de una **ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden** está dada por

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \tag{1}$$

donde los coeficientes A, B, C, ..., G son constantes o funciones de x y de y. Cuando $G(x, y) = 0$, se dice que la ecuación (1) es **homogénea**; de otra forma, es **no homogénea**. Por ejemplo, las ecuaciones lineales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

son homogénea y no homogénea, respectivamente.

Solución de una ecuación diferencial parcial La **solución** de una ecuación diferencial parcial lineal (1) es una función $u(x, y)$ de dos variables independientes que tienen todas las derivadas parciales concurriendo en la ecuación y que la satisface en alguna región del plano xy.

Sólo nos interesan las soluciones particulares de las EDP.

No es nuestra intención analizar procedimientos para encontrar *soluciones generales* de las ecuaciones diferenciales parciales lineales. A menudo no solamente es difícil obtener la solución general de una EDP lineal de segundo orden, sino que una solución general con frecuencia tampoco resulta muy útil en las aplicaciones. Por lo tanto, nos enfocaremos en determinar *soluciones particulares* de algunas EDP lineales importantes, es decir, ecuaciones que aparecen en un gran número de aplicaciones.

Separación de variables A pesar de que existen varios métodos que pueden utilizarse para encontrar soluciones particulares de una EDP lineal, con el **método de separación de variables** nuestro objetivo es encontrar una solución particular en forma del *producto* de una función de x y una función de y,

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

Mediante esta suposición, *con frecuencia* es factible reducir una EDP lineal de dos variables en dos EDO. Con este objetivo en mente, podemos observar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

donde las primas expresan la diferenciación ordinaria.

Ejemplo 1 Uso de la separación de variables

Encuentre las soluciones producto de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Solución Al sustituir $u(x, y) = X(x)Y(y)$ en la ecuación diferencial parcial obtenemos

$$X''Y = 4XY'.$$

Después de dividir ambos miembros de la ecuación entre $4XY$, separamos las variables:

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}.$$

Como el miembro izquierdo de la última ecuación es independiente de y y es igual al miembro derecho, que es independiente de x, concluimos que ambos miembros de la ecuación son independientes de x y de y. En otras palabras, cada miembro de la ecuación debe ser constante. Para fines prácticos, resulta conveniente escribir esta verdadera **constante de separación** como $-\lambda$. A partir de las dos igualdades,

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

obtenemos las dos ecuaciones diferenciales lineales ordinarias

$$X'' + 4\lambda X = 0 \quad \text{y} \quad Y' + \lambda Y = 0. \tag{2}$$

Puede consultar el ejemplo 2 de la sección 3.9 y el ejemplo 1 de la sección 4.5 del tomo I.

En los tres casos para λ: cero, negativo o positivo; esto es, $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, las EDO en (2) son, respectivamente,

$$X'' = 0 \quad \text{y} \quad Y' = 0, \tag{3}$$

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' - \alpha^2 Y = 0, \tag{4}$$

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \quad \text{y} \quad Y' + \alpha^2 Y = 0. \tag{5}$$

Caso I **($\lambda = 0$):** En (3), las ecuaciones diferenciales pueden resolverse por integración. Las soluciones son $X = c_1 + c_2 x$ y $Y = c_3$. Por lo tanto, una solución producto particular de la EDP dada es

$$u = XY = (c_1 + c_2 x)c_3 = A_1 + B_1 x, \tag{6}$$

donde reemplazamos $c_1 c_3$ y $c_2 c_3$ por A_1 y B_1, respectivamente.

Caso II **($\lambda = -\alpha^2$):** En (4), las soluciones generales de las ED son

$$X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x \quad \text{y} \quad Y = c_6 e^{\alpha^2 y},$$

respectivamente. Por lo tanto, otra solución producto particular de la EDP es

$$u = XY = (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \operatorname{senh} 2\alpha x)c_6 e^{\alpha^2 y}$$

o bien $$u = A_2 e^{\alpha^2 y} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 y} \operatorname{senh} 2\alpha x, \tag{7}$$

donde $A_2 = c_4 c_6$ y $B_2 = c_5 c_6$.

Caso III **($\lambda = \alpha^2$):** Por último, en (5) las soluciones generales de las ED son

$$X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \operatorname{sen} 2\alpha x \quad \text{y} \quad Y = c_9 e^{-\alpha^2 y},$$

respectivamente. Estos resultados, sin embargo, proporcionan otra solución particular

$$u = A_3 e^{-\alpha^2 y} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 y} \operatorname{sen} 2\alpha x, \tag{8}$$

donde $A_3 = c_7 c_9$ y $B_3 = c_8 c_9$. ❑

Se deja como ejercicio para el lector demostrar que (6), (7) y (8) satisfacen la ecuación diferencial parcial dada $u_{xx} = 4u_y$. Consulte el problema 29 de los ejercicios 5.1.

La separación de variables no es un método general para encontrar soluciones particulares; algunas ecuaciones diferenciales parciales lineales simplemente no se pueden separar. Usted deberá comprobar que el supuesto $u = XY$ no lleva a una solución para $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial y = x$.

■ **Principio de superposición** El teorema siguiente es similar al 3.2 del tomo I, que trata sobre el **principio de superposición** para ecuaciones homogéneas.

TEOREMA 5.1 Principio de superposición

Si $u_1, u_2, \ldots, u_k$ son las soluciones de una ecuación diferencial parcial lineal homogénea, entonces la combinación lineal

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_k u_k,$$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes, es también una solución.

En lo que resta del capítulo, supondremos que siempre que tengamos un conjunto infinito $u_1, u_2, u_3, \ldots$ de soluciones de una ecuación lineal homogénea, podremos construir otra solución u formando la serie infinita

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

donde las c_k, $k = 1, 2, \ldots,$ son constantes.

■ **Clasificación de las ecuaciones** Una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes puede clasificarse como uno de tres tipos. Esta clasificación depende solamente de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Desde luego, suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B y C es diferente de cero.

DEFINICIÓN 5.1 Clasificación de las ecuaciones

La ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes reales, se dice que es

hiperbólica si $B^2 - 4AC > 0$,
parabólica si $B^2 - 4AC = 0$,
elíptica si $B^2 - 4AC < 0$.

Ejemplo 2 Clasificación de EDP lineales de segundo orden

Clasifique las ecuaciones siguientes:

$$a)\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad c)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Solución *a*) Al volver a escribir la ecuación dada como

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

podemos identificar que $A = 3$, $B = 0$ y $C = 0$. Puesto que $B^2 - 4AC = 0$, la ecuación es parabólica.

b) Al volver a escribir la ecuación como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

podemos observar que $A = 1, B = 0, C = -1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(-1) > 0$. La ecuación es hiperbólica.

c) Si $A = 1, B = 0, C = 1$, y $B^2 - 4AC = -4(1)(1) < 0$, la ecuación es elíptica. ❑

Una explicación más detallada de por qué desearíamos clasificar una ecuación diferencial parcial de segundo orden está más allá del alcance de este libro. Sin embargo, la respuesta reside en el hecho de que deseamos resolver ecuaciones diferenciales parciales sujetas a ciertas condiciones alternas conocidas como condiciones iniciales y de frontera. Los tipos apropiados de condiciones alternas para una determinada ecuación están en función de si la ecuación es hiperbólica, parabólica o elíptica.

EJERCICIOS 5.1 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-14.

En los problemas del 1 al 16, mediante la separación de variables, encuentre, si es posible, las soluciones producto para la ecuación diferencial parcial que se proporciona.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

3. $u_x + u_y = u$

4. $u_x = u_y + u$

5. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$

6. $y\dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

8. $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = 0$

9. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$

10. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$

11. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

12. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$

13. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2k\dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$

14. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

15. $u_{xx} + u_{yy} = u$

16. $a^2 u_{xx} - g = u_{tt}$, g es una constante

En los problemas del 17 al 26, clasifique la ecuación diferencial parcial que se proporciona en hiperbólica, parabólica o elíptica.

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

18. $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

19. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

20. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

21. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

22. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

23. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

24. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$

25. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

26. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$

En los problemas 27 y 28, demuestre que la ecuación diferencial parcial que se proporciona tiene la solución producto indicada.

27. $k\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$;

$u = e^{-k\alpha^2 t}(c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r))$

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$;

$u = (c_1 \cos \alpha\theta + c_2 \operatorname{sen} \alpha\theta)(c_3 r^{\alpha} + c_4 r^{-\alpha})$

29. Compruebe que cada producto $u = XY$ incluido en (6), (7) y (8) satisface las EDP de segundo orden del ejemplo 1.

30. La definición 5.1 es una generalización de las EDP lineales con coeficientes que son funciones de x y y. Determine las regiones del plano xy para las que la ecuación

$$(xy + 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + 2y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy^2 u = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica.

Problemas de análisis

En los problemas 31 y 32, vea si pueden encontrarse las soluciones producto $u = X(x)Y(y)$ para las ecuaciones diferenciales parciales que se proporcionan. [*Sugerencia:* Utilice el principio de superposición.]

31. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$

32. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

5.2 Ecuaciones clásicas y problemas de valores en la frontera

Introducción En lo que resta de este capítulo y en el siguiente nos enfocaremos a encontrar las soluciones producto de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad k > 0 \tag{1}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

o ligeras variaciones de estas ecuaciones. Dichas ecuaciones clásicas de física-matemáticas se conocen como **ecuación unidimensional de calor**, **ecuación unidimensional de onda** y **ecuación bidimensional de Laplace**, respectivamente. "Unidimensional" se refiere a que x expresa una dimensión espacial mientras t representa el tiempo; en (3), "bidimensional" significa que x y y son dimensiones espaciales. La ecuación de Laplace se abrevia como $\nabla^2 u = 0$, donde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

se llama **laplaciano bidimensional** de la función u. En tres dimensiones, el **laplaciano** de u es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Al comparar las ecuaciones de la (1) a la (3) con la EDP lineal de segundo orden proporcionada en el teorema 5.1, donde t hace las veces de y, podemos observar que la ecuación de calor (1) es parabólica, la ecuación de onda (2) es hiperbólica y la ecuación de Laplace (3) es elíptica. En el capítulo 8, esta clasificación resulta particularmente importante.

Ecuación de calor La ecuación (1) se presenta en la teoría del flujo de calor, esto es, la transferencia de calor por conducción en una varilla o un alambre delgado. La función $u(x, t)$ es la temperatura. Los problemas acerca de vibraciones mecánicas a menudo llevan a la ecuación de onda (2). Para efectos del presente análisis, una solución $u(x, t)$ de (2) representará el desplazamiento de una cuerda idealizada. Por último, una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (3) puede interpretarse como la distribución de temperatura de estado estable (es decir, independiente del tiempo) en una placa delgada de dos dimensiones.

Aunque tenemos que hacer muchas suposiciones de simplificación, vale la pena observar cómo surgen ecuaciones como la (1) y la (2).

Suponga que una varilla circular delgada de longitud L tiene área transversal A y coincide con el eje x en el intervalo $[0, L]$. Vea la figura 5.1. Supongamos que:

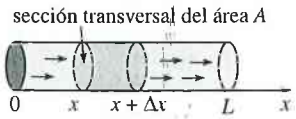


Figura 5.1 Flujo de calor unidimensional

- Dentro de la varilla, el flujo de calor tiene lugar sólo en la dirección x.
- La superficie lateral, o curva, de la varilla está aislada; esto es, no escapa calor de su superficie.
- No se está generando calor dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea; esto es, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El calor específico γ y la conductividad térmica K del material de la varilla son constantes.

Para deducir la ecuación diferencial parcial que se satisface mediante la temperatura $u(x, t)$, necesitamos dos leyes empíricas de conducción de calor:

i) En un elemento de masa m, la cantidad de calor Q es

$$Q = \gamma m u, \tag{4}$$

donde u representa la temperatura del elemento.

ii) La velocidad del flujo de calor Q_t a través de la sección transversal que se indica en la figura 5.1 es proporcional al área A de la sección transversal y a la derivada parcial de la temperatura respecto a x:

$$Q_t = -K A u_x. \tag{5}$$

Como el calor fluye en la dirección que desciende la temperatura, el signo menos se utiliza en (5) para asegurar que Q_t sea positiva para $u_x < 0$ (flujo de calor hacia la derecha) y negativa para $u_x > 0$ (flujo de calor hacia la izquierda). Si la sección circular de la varilla ilustrada en la figura 5.1 entre x y $x + \Delta x$ es muy delgada, entonces $u(x, t)$ puede considerarse como la temperatura aproximada en cada punto del intervalo. Ahora la masa de la sección circular es $m = \rho(A\ \Delta x)$, por ello, a partir de (4), puede deducirse que la cantidad de calor en tal masa es,

$$Q = \gamma\rho A\ \Delta x\ u. \tag{6}$$

Además, cuando fluye calor en la dirección positiva de x, a partir de (5) observamos que el calor se incrementa en la sección transversal a una velocidad neta de

$$-K A u_x(x, t) - [-K A u_x(x + \Delta x, t)] = K A[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \tag{7}$$

Diferenciamos (6) respecto a t y observamos que la velocidad neta está dada también por

$$Q_t = \gamma\rho A\ \Delta x\ u_t. \tag{8}$$

Al igualar (7) y (8) obtenemos

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = u_t. \tag{9}$$

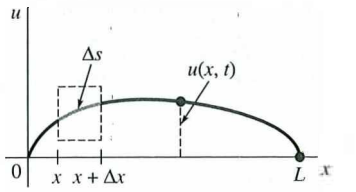
Calculamos el límite de (9) como $\Delta x \to 0$ para finalmente obtener (1) en la forma*

$$\frac{K}{\gamma\rho} u_{xx} = u_t.$$

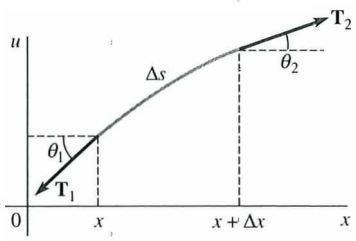
Es muy común establecer $k = K/\gamma\rho$ y llamar a esta constante positiva **difusividad térmica**.

---

*Recuerde, con base en el cálculo, que $u_{xx} = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}$.



a) segmento de cuerda



b) amplificación del segmento

Figura 5.2 Cuerda tensada entre dos puntos del eje x

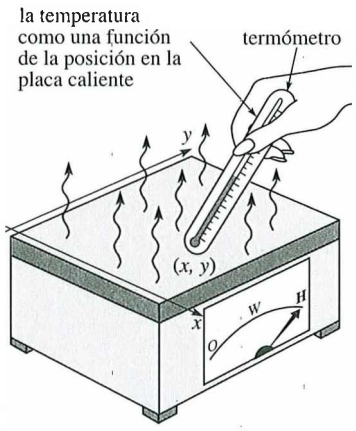


Figura 5.3 Temperaturas de estado estable en una placa rectangular

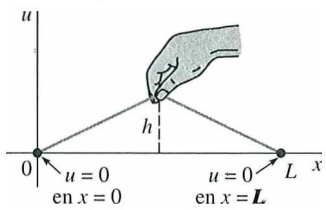


Figura 5.4 Cuerda pulsada

■ **Ecuación de onda** Considere una cuerda de longitud L, como la cuerda de una guitarra, tensada entre dos puntos localizados en el eje x, digamos, $x = 0$ y $x = L$. Cuando la cuerda comienza a vibrar, suponga que el movimiento tiene lugar en el plano xy de tal manera que cada punto de la cuerda se mueve en dirección perpendicular al eje x (vibraciones transversales). Como se muestra en la figura 5.2*a*), establecemos que $u(x, t)$ exprese el desplazamiento vertical de cualquier punto de la cuerda medido a partir del eje x para $t > 0$. Además suponemos que:

- La cuerda es perfectamente flexible.
- La cuerda es homogénea; esto es, su masa por unidad de longitud ρ es constante.
- Los desplazamientos u son pequeños en comparación con la longitud de la cuerda.
- La pendiente de la curva es pequeña en todos los puntos.
- La tensión $\mathbf{T}$ actúa en dirección tangente a la cuerda y su magnitud T es igual en todos los puntos.
- La tensión es grande en comparación con la fuerza de gravedad.
- No actúan otras fuerzas externas sobre la cuerda.

Ahora, en la figura 5.2*b*), las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ son tangentes en los extremos de la curva en el intervalo $[x, x + \Delta x]$. Para valores pequeños de θ_1 y θ_2, la fuerza vertical neta que actúa sobre el elemento correspondiente Δs de la cuerda es, por lo tanto,

$$T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1 \approx T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1$$
$$= T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)], \ *$$

donde $T = |\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2|$. Ahora $\rho\, \Delta s \approx \rho\, \Delta x$ es la masa de la cuerda en $[x, x + \Delta x]$, por lo que la segunda ley de Newton nos da

$$T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] = \rho\, \Delta x\, u_{tt}$$

o bien

$$\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T} u_{tt}.$$

Si el límite se toma como $\Delta x \to 0$, la última ecuación se convierte en $u_{xx} = (\rho/T)u_{tt}$. Lo anterior es, desde luego, la ecuación (2) con $a^2 = T/\rho$.

■ **Ecuación de Laplace** Aunque no lo demostraremos, la ecuación de Laplace en dos y tres dimensiones se presenta en problemas independientes del tiempo que involucran potenciales como el electrostático, el gravitacional y la velocidad en mecánica de fluidos. Además, la solución de la ecuación de Laplace también puede interpretarse como la distribución de temperatura de estado estable. Como ilustra la figura 5.3, una solución $u(x, y)$ de (3) podría representar la temperatura que varía de un punto a otro (aunque no con el tiempo) de una placa rectangular.

Con frecuencia deseamos encontrar soluciones de ecuaciones como (1), (2) y (3) que satisfagan algunas condiciones adicionales.

■ **Condiciones iniciales** Puesto que las soluciones de (1) y (2) dependen del tiempo t, es posible establecer lo que pasa en $t = 0$; esto es, podemos proporcionar **condiciones iniciales (CI)**. Si $f(x)$ expresa la distribución inicial de temperatura a través de la varilla en la figura 5.1, entonces una solución $u(x, t)$ de (1) debe satisfacer la condición inicial única $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < L$. Por otro lado, para una cuerda vibratoria, podemos especificar su desplazamiento inicial (o forma) $f(x)$ así como su velocidad inicial $g(x)$. En términos matemáticos, estamos buscando una función $u(x, t)$ que satisfaga (2) en las dos condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{10}$$

Por ejemplo, la cuerda podría estarse pulsando, como en la figura 5.4, y liberarse del reposo ($g(x) = 0$).

*tan $\theta_2 = u_x(x + \Delta x, t)$ y tan $\theta_1 = u_x(x, t)$ son expresiones equivalentes para la pendiente.

Condiciones de frontera La cuerda de la figura 5.4 está asegurada al eje x en $x = 0$ y $x = L$ en todo momento. Interpretamos lo anterior mediante las dos **condiciones de frontera (CF)**:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Observe que en este contexto la función f es continua en (10) y, en consecuencia, $f(0) = 0$ y $f(L) = 0$. En general, existen tres tipos de condiciones de frontera asociados con las ecuaciones (1), (2) y (3). En una frontera, podemos especificar los valores de *uno* de los siguientes formatos:

$$i)\ u, \qquad ii)\ \frac{\partial u}{\partial n}, \qquad \text{o} \qquad iii)\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu, \quad h \text{ es una constante}$$

Aquí $\partial u/\partial n$ expresa la derivada normal de u (la derivada direccional de u en la dirección perpendicular a la frontera). Una condición de frontera del primer tipo *i)* se llama **condición de Dirichlet**; una condición de frontera del segundo tipo *ii)* es la **condición de Neumann**; y una condición de frontera del tercer tipo *iii)* se conoce como **condición de Robin**. Por ejemplo, para $t > 0$, una condición típica en el extremo derecho de la varilla de la figura 5.1 puede ser,

$$i)'\quad u(L, t) = u_0, \quad u_0 \text{ es una constante,}$$

$$ii)'\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \text{ o}$$

$$iii)'\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -h(u(L, t) - u_m), \quad h > 0 \text{ y } u_m \text{ son constantes.}$$

La condición *i)'* simplemente establece que la frontera $x = L$ se conserva de alguna manera a *temperatura* constante u_0 en todo tiempo $t > 0$. La condición *(ii)'* indica que la frontera $x = L$ está *aislada*. A partir de la ley empírica para la transferencia de calor, el flujo de calor a través de una frontera (esto es, la cantidad de calor por unidad de área por unidad de tiempo que se transfiere a través de la frontera) es proporcional al valor de la derivada normal $\partial u/\partial n$ de la temperatura u. Por lo tanto, cuando la frontera $x = L$ está aislada térmicamente, no existe ningún flujo de calor desde y hacia la varilla, por lo que

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

Podemos interpretar *iii)'* como el *calor que se pierde* en el extremo derecho de la varilla por estar en contacto con un medio, como aire o agua, que se encuentra a temperatura constante. A partir de la ley de Newton para el enfriamiento, sabemos que el flujo de calor hacia fuera de la varilla es proporcional a la diferencia entre la temperatura $u(L, t)$ en la frontera y la temperatura u_m del medio circundante. Observemos que si existe pérdida de calor desde el extremo izquierdo de la varilla, la condición de frontera es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h(u(0, t) - u_m).$$

El cambio de signo algebraico es consistente con el supuesto de que la varilla se encuentra a una temperatura más elevada que el medio circundante en los extremos, por lo que $u(0, t) > u_m$ y $u(L, t) > u_m$. En $x = 0$ y $x = L$, las pendientes $u_x(0, t)$ y $u_x(L, t)$ deben ser positiva y negativa, respectivamente.

Desde luego, en los extremos de la varilla podemos especificar diferentes condiciones al mismo tiempo. Por ejemplo, podríamos tener

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad \text{y} \qquad u(L, t) = u_0, \quad t > 0.$$

Observemos que en *i)'* la condición de frontera es homogénea si $u_0 = 0$; cuando $u_0 \neq 0$, la condición de frontera es no homogénea. La condición de frontera *ii)'* es homogénea; *iii)'* es homogénea si $u_m = 0$ y no homogénea si $u_m \neq 0$.

■ **Problemas de valores en la frontera** Problemas tales como

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} \quad a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \\ &\textit{Sujeta a:} \quad \text{(BC) } u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0 \\ &\qquad\qquad \text{(IC)} \quad u(x, 0) = f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L \end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b \\ &\textit{Sujeta a:} \quad \text{(BC)} \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \\ u(x, 0) = 0, & u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

se llaman **problemas de valores en la frontera**. Los problemas (11) y (12) están clasificados como problemas de valores en la frontera **homogéneos**, porque las ecuaciones diferenciales parciales y las condiciones de frontera son homogéneas.

■ **Variaciones** Las ecuaciones diferenciales parciales (1), (2) y (3) deben modificarse con el fin de tomar en consideración las influencias internas y externas que actúan en el sistema físico. Formas más generales de las ecuaciones unidimensionales de calor y de onda son, respectivamente,

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_x) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{13}$$

y

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Por ejemplo, si existe transferencia de calor desde la superficie lateral de una varilla hacia un medio circundante que se mantiene a temperatura constante u_m, entonces la ecuación de calor (13) es

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde h es una constante. En la ecuación (14), la función F podría representar las diferentes fuerzas que actúan en la cuerda. Por ejemplo, cuando las fuerzas externas de amortiguamiento y restablecimiento elástico se toman en cuenta, (14) toma la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \underbrace{f(x, t) - c \frac{\partial u}{\partial t} - ku}_{F(x, t, u, u_t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{15}$$

fuerza externa; amortiguamiento; fuerza de restablecimiento

Comentarios

El análisis de una amplia gama de fenómenos genera los modelos matemáticos (1), (2) o (3) o sus generalizaciones, las cuales involucran una mayor cantidad de variables espaciales. Por ejemplo, a la ecuación (1) a veces se le llama **ecuación de difusión** porque la difusión de las sustancias disueltas en una solución es análoga al flujo de calor en un sólido. La función $c(x, t)$ que satisface la ecuación diferencial parcial representa, en este caso, la concentración de la sustancia disuelta. De modo similar, la ecuación (2) y su generalización (15) aparecen en el análisis del flujo de electricidad en un cable largo o en una línea de transmisión. En este ambiente, la ecuación (2) se conoce como

ecuación telegráfica. Es posible demostrar que, bajo ciertas suposiciones, la corriente $i(x, t)$ y el voltaje $v(x, t)$ presentes en la línea satisfacen dos ecuaciones diferenciales parciales idénticas a (2) (o a (15)). La ecuación de onda (2) aparece también en la mecánica de fluidos, en la acústica y en la elasticidad. La ecuación de Laplace (3) se puede observar en la determinación del desplazamiento estático de membranas.

EJERCICIOS 5.2 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas del 1 al 6, una varilla de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ en el eje x. Establezca el problema de valores en la frontera para la temperatura $u(x, t)$.

1. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de cero y el derecho está aislado. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
2. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura u_0 y el derecho tiene la temperatura u_1. La temperatura inicial es de cero en todo el proceso.
3. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de 100°, y se presenta transferencia de calor desde el extremo derecho hacia el medio circundante que tiene temperatura de cero. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
4. Hay transferencia de calor desde el extremo izquierdo hacia el medio circundante, que tiene temperatura de 20°, y el extremo derecho está aislado. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
5. El extremo izquierdo está a una temperatura de $\text{sen}(\pi t/L)$, el extremo derecho se mantiene en cero, y existe transferencia de calor desde la superficie lateral de la varilla hacia el medio circundante, que se mantiene a temperatura de cero. En todo el proceso, la temperatura inicial es $f(x)$.
6. Los extremos se encuentran aislados y existe transferencia de calor desde la superficie lateral de la varilla hacia el medio circundante que se mantiene a temperatura de 50°. En todo el proceso, la temperatura inicial es de 100°.

En los problemas del 7 al 10, una cuerda de longitud L coincide con el intervalo $[0, L]$ sobre el eje x. Establezca el problema de valores en la frontera para el desplazamiento $u(x, t)$.

7. Los extremos están anclados al eje x. La cuerda se libera a partir del reposo desde el desplazamiento inicial $x(L - x)$.
8. Los extremos están anclados al eje x. Al inicio la cuerda no se ha desplazado, pero tiene velocidad inicial de $\text{sen}(\pi x/L)$.
9. El extremo izquierdo está asegurado al eje x, sin embargo, el derecho se mueve transversalmente de acuerdo con $\text{sen}\ \pi t$. La cuerda se libera a partir del reposo desde el desplazamiento inicial $f(x)$. Para $t > 0$, las vibraciones transversales son amortiguadas con una fuerza proporcional a la velocidad instantánea.
10. Los extremos están anclados al eje x y la cuerda se encuentra inicialmente en reposo sobre este eje. Una fuerza vertical externa proporcional a la distancia horizontal a partir del extremo izquierdo actúa sobre la cuerda en $t > 0$.

En los ejercicios 11 y 12, establezca el problema de valores en la frontera para la temperatura constante $u(x, y)$.

11. Una placa delgada rectangular coincide en el plano xy con la región definida por $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$. El extremo izquierdo y la parte inferior de la placa están aislados. La parte superior de la placa se mantiene a temperatura cero y su extremo derecho tiene temperatura constante $f(y)$.
12. Una placa seminfinita coincide con la región definida por $0 \le x \le \pi$, $y \ge 0$. El extremo izquierdo se mantiene a una temperatura de e^{-y}, y el derecho tiene temperatura constante de 100° para $0 < y \le 1$ y temperatura de cero para $y > 1$. La parte inferior de la placa se mantiene a temperatura $f(x)$.

5.3 La ecuación de calor

Introducción Considere una varilla delgada de longitud L con temperatura inicial $f(x)$ en toda ella y cuyos extremos se mantienen a una temperatura de cero en todo tiempo $t > 0$. Si la varilla ilustrada en la figura 5.5 satisface los supuestos de la página 315, entonces su temperatura $u(x, t)$ se determina mediante el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L. \tag{3}$$

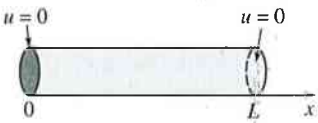


Figura 5.5 Encontrar la temperatura u presente en una varilla finita

En el análisis que se realizará a continuación, demostraremos cómo resolver estos problemas de valores en la frontera utilizando el método de separación de variables que se presentó en la sección 5.1.

Solución del problema de valores en la frontera Se utiliza el producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ y $-\lambda$ como la constante de separación para llegar a

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \tag{4}$$

y

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$

$$T' + k\lambda T = 0. \tag{6}$$

Ahora las condiciones de frontera dadas en (2) se convierten en $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$ y $u(L, t) = X(L)T(t) = 0$. Puesto que las últimas igualdades deben ser válidas para todo tiempo t, debemos tener $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. Estas condiciones de frontera homogéneas, junto con la ecuación diferencial ordinaria homogénea (5), constituyen un problema habitual de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{7}$$

La solución a este problema de valores en la frontera se estudió en el ejemplo 2 de la sección 3.9 y en las páginas 294 y 295 de la sección 10.5. En ese ejemplo consideramos tres posibles casos para el parámetro λ: cero, negativo y positivo. Las soluciones generales correspondientes de las ecuaciones diferenciales son

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0 \tag{8}$$

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x, \quad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{9}$$

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x \qquad \lambda = \alpha^2 > 0. \tag{10}$$

Recuerde que al aplicar las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ a las ecuaciones (8) y (9), estas soluciones nos dan solamente $X(x) = 0$, por ello nos quedamos con el resultado $u = 0$. Aplicando la primera condición de frontera $X(0) = 0$ a la solución dada en (10), obtenemos $c_1 = 0$. Por lo tanto, $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La segunda condición de frontera $X(L) = 0$ implica ahora

$$X(L) = c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0. \tag{11}$$

Si $c_2 = 0$, entonces $X = 0$, por lo que $u = 0$. Sin embargo, la ecuación (11) puede satisfacerse para $c_2 \neq 0$ cuando $\operatorname{sen} \alpha L = 0$. Esta última ecuación implica que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$. En consecuencia, (7) tiene soluciones no triviales cuando $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Los valores λ_n y las soluciones correspondientes

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12}$$

son los **valores propios** y las **funciones propias**, respectivamente, del problema planteado en (7).

La solución general de (6) es $T = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$, por lo que

$$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x, \tag{13}$$

donde hemos reemplazado la constante c_2c_3 por A_n. Los productos $u_n(x, t)$ dados en (13) satisfacen la ecuación diferencial parcial (1) tanto como las condiciones de frontera (2) para cada valor del entero positivo n. Sin embargo, con la finalidad de que las funciones de (13) satisfagan la condición inicial (3), podríamos seleccionar el coeficiente A_n de tal manera que

$$u_n(x, 0) = f(x) = A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{14}$$

En general, no esperaríamos que la condición (14) quedara satisfecha mediante una selección arbitraria, pero razonable, de f. Por lo tanto, estamos obligados a admitir que $u_n(x, t)$ *no es una solución del problema dado en* (1), (2) y (3). Ahora, mediante el principio de superposición, la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{15}$$

también debe satisfacer, aunque formalmente, la ecuación (1) y las condiciones dadas en (2). Si sustituimos $t = 0$ en (15), entonces

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Se puede reconocer que esta última expresión es la expansión de medio intervalo de f en una serie seno. Si hacemos la identificación $A_n = b_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, a partir de la ecuación (5) dada en la sección 4.3 se deduce que,

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{16}$$

Concluimos que una solución al problema de valores en la frontera descrito en (1), (2) y (3) está dada por la serie infinita

$$u(x, t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx\right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{17}$$

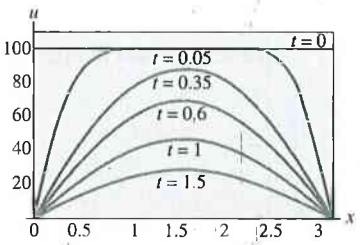
Para el caso especial en que la temperatura inicial es $u(x, 0) = 100$, $L = \pi$ y $k = 1$, el lector debe comprobar que los coeficientes de (16) estén dados por

$$A_n = \frac{200}{\pi}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n}\right],$$

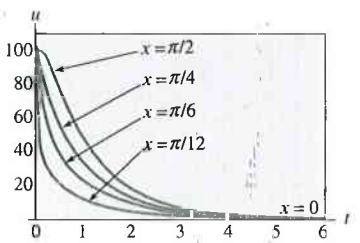
y que la serie (17) sea

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n}\right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx. \tag{18}$$

■ **Uso de la computadora** La solución u encontrada para (18) es una función de dos variables y, como tal, en el espacio tridimensional su gráfica es una superficie. Pudimos haber utilizado la aplicación gráfica 3D de un sistema algebraico de cómputo para aproximar esta superficie mediante la graficación de las sumas parciales $S_n(x, t)$ sobre una región rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le t \le T$. De manera alterna, con ayuda de la aplicación gráfica 2D de un CAS, graficamos la solución $u(x, t)$ en el intervalo x $[0, \pi]$ para valores incrementales de tiempo t. Observe la figura 5.6*a*). En la figura 5.6*b*), la solución $u(x, t)$ se grafica en el intervalo t $[0, 6]$ para valores incrementales de x ($x = 0$ es el extremo izquierdo y $x = \pi/2$ es el punto medio de la varilla de longitud $L = \pi$). Ambos conjuntos de gráficas confirman lo que es evidente en (18), a saber: $u(x, t) \to 0$ a medida que $t \to \infty$.



a) $u(x, t)$ graficada como una función de x para diversos tiempos específicos



b) $u(x, t)$ graficada como una función de t para diversos tiempos específicos

Figura 5.6 Gráficas obtenidas mediante sumas parciales de (18).

EJERCICIOS 5.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas. Suponga una varilla de longitud L.

1. $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}$$

2. $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = x(L - x)$$

3. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ en toda su longitud y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

4. Resuelva el problema 3 si $L = 2$ y

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

5. Suponga que se libera calor desde la superficie lateral de una varilla delgada de longitud L hacia el medio circun-

dante que tiene temperatura de cero. Si aplicamos la ley lineal de transferencia de calor, entonces la ecuación de calor toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde h es una constante. Determine la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial es $f(x)$ y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados. Vea la figura 5.7.

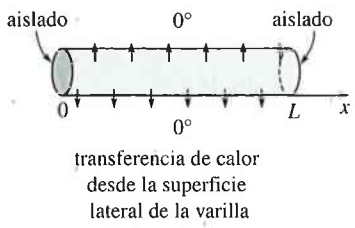


Figura 5.7 Varilla del problema 5.

6. Resuelva el problema 5 si los extremos $x = 0$ y $x = L$ se mantienen a una temperatura de cero.

Tareas para el laboratorio de cómputo

7. *a*) Resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a,

$$u(0, t) = 0, \quad u(100, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100. \end{cases}$$

b) Utilice la aplicación gráfica 3D de su CAS para graficar la suma parcial $S_5(x, t)$ que consiste en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución dada en el inciso *a*) para $0 \le x \le 100$, $0 \le t \le 200$. Suponga que $k = 1.6352$. Trate con diferentes perspectivas de vistas tridimensionales de la superficie (en *Mathematica*, es la opción llamada **ViewPoint**).

Problemas de análisis

8. En la figura 5.6*b*) se tienen las gráficas de $u(x, t)$ en el intervalo $0 \le t \le 6$ para $x = 0$, $x = \pi/12$, $x = \pi/6$, $x = \pi/4$ y $x = \pi/2$. Describa o bosqueje las gráficas de $u(x, t)$ en el mismo intervalo pero para los valores $x = 3\pi/4$, $x = 5\pi/6$, $x = 11\pi/12$ y $x = \pi$.

5.4 La ecuación de onda

■ **Introducción** Ahora estamos en una posición favorable para resolver el problema de valores en la frontera (11) analizado en la sección 5.2. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda de longitud L que se encuentra vibrando libremente en el plano vertical ilustrado en la figura 5.2*a*) está determinado por

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L. \tag{3}$$

■ **Solución del problema de valores en la frontera** Con la suposición común de que $u(x, t) = X(x)T(t)$, mediante la separación de variables en (1) obtenemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

por lo que

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Tal como en la sección 5.3, las condiciones de frontera (2) se traducen en $X(0) = 0$ y $X(L) = 0$. La ecuación diferencial ordinaria dada en (4) junto con estas condiciones de frontera forman el problema habitual de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = 0, X(L) = 0. \tag{6}$$

De las tres posibilidades usuales del parámetro λ: $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, solamente la última nos lleva a soluciones no triviales. La solución general de (4), correspondiente a $\lambda = \alpha^2$, $\alpha > 0$, es

$$X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x.$$

$X(0) = 0$ y $X(L) = 0$ indican que $c_1 = 0$ y $c_2 \operatorname{sen} \alpha L = 0$. La última ecuación implica de nuevo que $\alpha L = n\pi$ o $\alpha = n\pi/L$. Los valores propios y las correspondientes funciones propias de (6) son $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{L} x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. La solución general de la ecuación de segundo orden (5) es entonces

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t$$

Al volver a escribir c_2c_3 como A_n y c_2c_4 como B_n, las soluciones que satisfacen tanto a la ecuación de onda (1) como a las condiciones de frontera (2) son

$$u_n = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

y

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x. \tag{8}$$

En (8), se fija el valor $t = 0$ y utilizando la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$ obtenemos

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Puesto que la última serie es un desarrollo de medio intervalo de f en una serie seno, podemos escribir $A_n = b_n$:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{9}$$

Para determinar B_n, diferenciamos (8) respecto a t y, después, fijamos el valor $t = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{n\pi a}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x.$$

Con la finalidad de que esta última serie sea el desarrollo en serie de senos de medio intervalo de la velocidad inicial g presente en el intervalo, el coeficiente *total* $B_n n\pi a/L$ debe estar dado mediante la forma b_n en la expresión (5) de la sección 4.3, esto es:

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

a partir de la cual obtenemos

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx. \tag{10}$$

La solución del problema de valores en la frontera de la ecuación (1) a la (3) consta de la serie (8) con los coeficientes A_n y B_n definidos en las ecuaciones (9) y (10), respectivamente.

Podemos observar que, en el momento que se libera la cuerda a partir del *reposo*, entonces $g(x) = 0$ para toda x en el intervalo $0 \le x \le L$ y, en consecuencia, $B_n = 0$.

Cuerda pulsada Un caso especial del problema de valores en la frontera planteado en (1), (2) y (3) es un modelo de **cuerda pulsada**. Podemos observar el movimiento de la cuerda graficando la solución o el desplazamiento $u(x, t)$ para valores incrementales de tiempo t y utilizando la herramienta de animación que proporciona un CAS. En la figura 5.8 se proporcionan algunos de los cuadros de una película generados de esta forma. Se le pide al

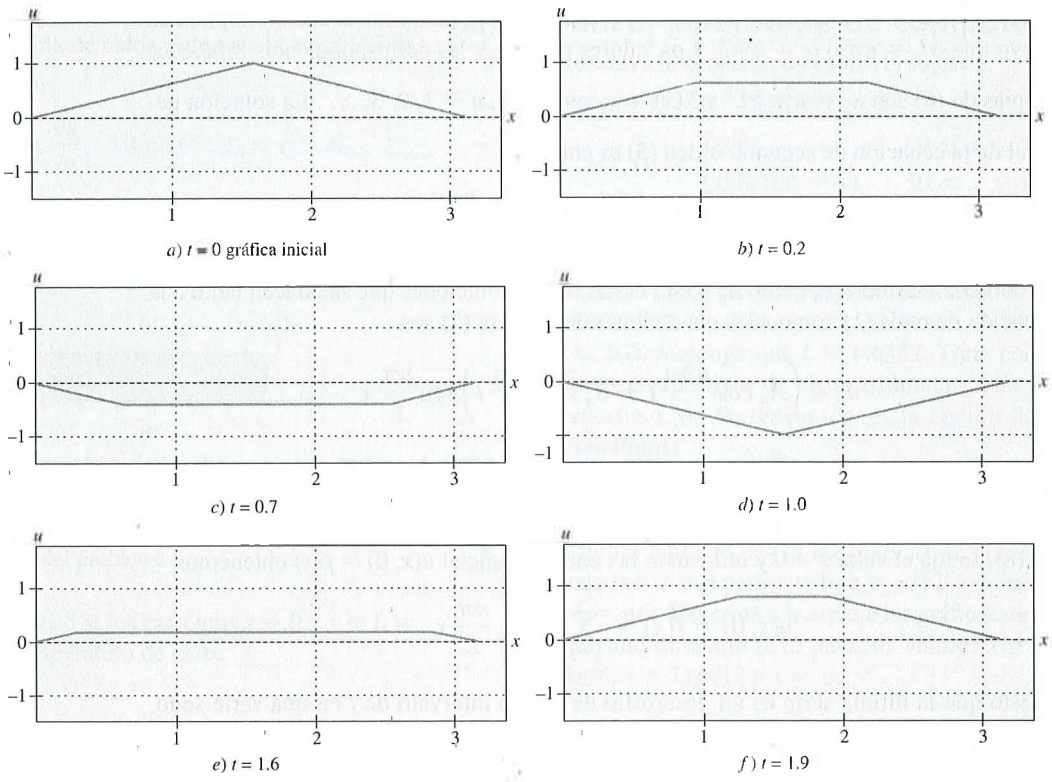


Figura 5.8 Cuadros de una película de cuerda pulsada

lector emular los resultados que se proporcionan en la figura mediante la graficación de una secuencia de sumas parciales de (8). Consulte los problemas 7 y 21 en los ejercicios 5.4.

■ **Ondas estacionarias** De la deducción de la ecuación de onda examinada en la sección 5.2, recuerde que la constante a mostrada en la solución del problema de valores en la frontera en (1), (2) y (3) está dada por $\sqrt{T/\rho}$, donde ρ es masa por unidad de longitud y T es la magnitud de la tensión en la cuerda. Cuando T es lo suficientemente grande, la cuerda vibratoria genera un sonido musical como resultado de las ondas permanentes. La solución (5) es una superposición de las soluciones producto llamadas **ondas estacionarias** o **modos normales**:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \cdots.$$

En vista de (6) y (7) de la sección 3.8 del tomo I para el movimiento no amortiguado, las soluciones producto (4) pueden escribirse como

$$u_n(x, t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x, \tag{11}$$

donde $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ y ϕ_n se definen como $\operatorname{sen}\phi_n = A_n/C_n$ y $\cos\phi_n = B_n/C_n$. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ las ondas estacionarias son, en esencia, las gráficas de $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, con una amplitud variable en el tiempo dada por

$$C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}t + \phi_n\right).$$

De manera alterna, en (11) podemos observar que en un valor fijo de x, cada función producto $u_n(x, t)$ representa el movimiento armónico simple de amplitud $C_n|\operatorname{sen}(n\pi x/L)|$ y frecuencia $f_n = na/2L$. En otras palabras, en una onda estacionaria, cada punto vibra con distinta amplitud pero a la misma frecuencia. Cuando $n = 1$,

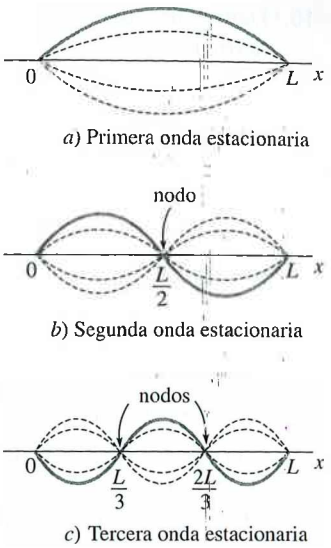
$$u_1(x, t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{L}t + \phi_1\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x$$

es llamada **primera onda estacionaria**, **primer modo normal** o **modo fundamental de vibración**. Las primeras tres ondas estacionarias, o modos normales, se muestran en la figura 5.9. Las líneas discontinuas representan las ondas estacionarias en diversos puntos en el tiempo. Los puntos en el intervalo $(0, L)$, para los cuales $\operatorname{sen}(n\pi/L)x = 0$, corresponden a los puntos localizados en una onda estacionaria donde no existe movimiento. A estos puntos se les llama **nodos**. Por ejemplo, en las figuras 5.9*b*) y *c*), podemos observar que la segunda onda estacionaria tiene un nodo en $L/2$ y la tercera tiene dos nodos, en $L/3$ y $2L/3$. En general, el n-ésimo modo normal de vibración tiene $n - 1$ nodos.

La frecuencia

$$f_1 = \frac{a}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

del primer modo normal se llama **frecuencia fundamental**, o **primer armónico**, y está relacionado directamente con el tono generado por un instrumento de cuerdas. Es evidente que conforme la tensión sobre la cuerda sea mayor, el tono del sonido lo será también. Las frecuencias f_n de los demás modos normales, los cuales son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, se llaman **sobretonos**. El segundo armónico es el primer sobretono, y así sucesivamente.



a) Primera onda estacionaria

b) Segunda onda estacionaria

c) Tercera onda estacionaria

Figura 5.9 Primeras tres ondas estacionarias

EJERCICIOS 5.4 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-15.

En los problemas del 1 al 8, resuelva la ecuación de onda (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

   $u(x, 0) = \frac{1}{4}x(L - x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

2. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

   $u(x, 0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x(L - x)$

3. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

   $u(x, 0) = f(x)$, f mostrado en la figura 5.10, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

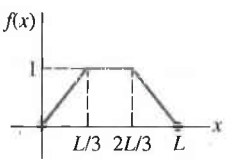


Figura 5.10 Desplazamiento para el problema 3

4. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

   $u(x, 0) = \frac{1}{6}x(\pi^2 - x^2), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

5. $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

   $u(x, 0) = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} x$

6. $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$

   $u(x, 0) = 0.01 \operatorname{sen} 3\pi x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

7. $u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < L/2 \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & L/2 < x < L, \end{cases} \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

8. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

   $u(x, 0) = x, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$

Este problema podría describir el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de una barra elástica vibratoria. Las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = L$ se llaman **condiciones de extremo libre**. Vea la figura 5.11.

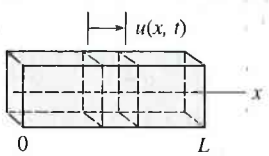


Figura 5.11 Barra elástica del problema 8

9. Una cuerda estirada está anclada en el eje x en $x = 0$ y $x = \pi$ en $t > 0$. Si las vibraciones transversales tienen lugar en un medio que ejerce una resistencia proporcional a la velocidad instantánea, entonces la ecuación de onda toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \beta < 1, \quad t > 0.$$

Encuentre el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo desde el desplazamiento inicial $f(x)$.

10. Demuestre que una solución al problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < \pi$$

es

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\operatorname{sen}(2k-1)x\cos\sqrt{(2k-1)^2+1}\,t.$$

11. Considere el problema de valores en la frontera dado en (1), (2) y (3) de esta sección. Si $g(x) = 0$ en $0 < x < L$, demuestre que la solución al problema puede escribirse como

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)].$$

[*Sugerencia:* Utilice la identidad

$$2\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 = \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2).]$$

12. El desplazamiento vertical $u(x, t)$ de una cuerda infinitamente larga se determina mediante el problema de valor inicial

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ -\infty < x < \infty,\ t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x). \tag{12}$$

Este problema puede resolverse sin separar variables.

a) Demuestre que la ecuación de onda puede expresarse en la forma $\partial^2 u/\partial\eta\partial\xi = 0$ mediante las sustituciones $\xi = x + at$ y $\eta = x - at$.

b) Integre la ecuación diferencial parcial de la parte *a*), primero respecto a η y después respecto a ξ, para demostrar que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$, donde F y G son funciones arbitrarias diferenciables dos veces, es una solución de la ecuación de onda. Utilice esta solución y las condiciones iniciales dadas para demostrar que

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds + c$$

y

$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds - c,$$

donde x_0 es arbitraria y c una constante de integración.

c) Utilice los resultados del inciso *b*) para demostrar que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds. \tag{13}$$

Observe que cuando la velocidad inicial $g(x) = 0$ obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)],\ -\infty < x < \infty.$$

La última solución puede interpretarse como una superposición de dos **ondas viajeras**, una moviéndose hacia la derecha (esto es, $\frac{1}{2}f(x - at)$) y la otra moviéndose hacia la izquierda ($\frac{1}{2}f(x + at)$). Ambas ondas tienen velocidad a y la misma forma básica que el desplazamiento inicial $f(x)$. La forma de $u(x, t)$ dada en (13) se llama **solución de d'Alembert**.

En los ejercicios del 13 al 15, utilice la solución de d'Alembert (13) para resolver el problema de valor inicial del problema 12 sujeto a las condiciones iniciales dadas.

13. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = 1$

14. $f(x) = \operatorname{sen} x,\ g(x) = \cos x$

15. $f(x) = 0,\ g(x) = \operatorname{sen} 2x$

16. Suponga $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $g(x) = 0$ y $a = 1$ para el problema de valor inicial planteado en el problema 12. Grafique la solución de d'Alembert, en este caso en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 3$.

17. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de una barra vibratoria de longitud L se determina a partir de la ecuación diferencial parcial de cuarto orden

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0.$$

Si la barra está **simplemente apoyada**, como ilustra la figura 5.12, las condiciones de frontera e iniciales son

$$u(0, t) = 0,\quad u(L, t) = 0,\quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=L} = 0,\quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x),\quad 0 < x < L.$$

Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Por comodidad, utilice $\lambda = \alpha^4$ cuando separe las variables.]

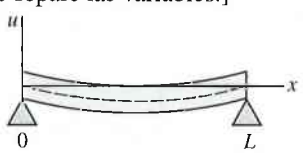


Figura 5.12 Barra simplemente apoyada del problema 17

Tareas para el laboratorio de cómputo

18. Si los extremos de la barra del problema 17 se encuentran **incrustados** en $x = 0$ y $x = L$, las condiciones de frontera se convierten en, para $t > 0$,

$$u(0, t) = 0,\quad u(L, t) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0.$$

a) Demuestre que los valores propios del problema son $\lambda = x_n^2/L^2$ donde x_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, son las raíces positivas de la ecuación $\cosh x\cos x = 1$.

b) Muestre gráficamente que la ecuación del inciso *a*) tiene una cantidad infinita de raíces.

c) Utilice un CAS para encontrar las aproximaciones de los primeros cuatro valores propios. Use cuatro cifras decimales.

19. El modelo para una cuerda infinitamente larga que se sujeta inicialmente en los tres puntos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$ y después se libera simultáneamente en dichos puntos en el tiempo $t = 0$, está dado por (12) con

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = 0.$$

a) Grafique la posición inicial de la cuerda en el intervalo $[-6, 6]$.

b) Utilice un CAS para graficar la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

c) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda en el tiempo.

20. Una cuerda infinitamente larga que coincide con el eje x es golpeada en el origen con un martillo cuya cabeza mide 0.2 pulgadas de diámetro. El modelo del movimiento de la cuerda puede expresarse mediante la ecuación (12) donde

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 0.1 \\ 0, & |x| > 0.1. \end{cases}$$

a) Utilice un CAS para graficar la solución de d'Alembert (13) en $[-6, 6]$ para $t = 0.2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 25$. Suponga que $a = 1$.

b) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución. Describa el movimiento de la cuerda en el tiempo.

21. El modelo de la cuerda vibratoria del problema 7 se llama **cuerda pulsada**. La cuerda está unida al eje x en $x = 0$ y $x = L$, y se mantiene en $x = L/2$ a h unidades por encima del eje x. Observe la figura 5.4. Comenzando en $t = 0$, la cuerda se libera desde el reposo.

a) Utilice un CAS para graficar la suma parcial $S_6(x, t)$, esto es, los primeros seis términos diferentes de cero de su solución, para $t = 0.1k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$. Suponga que $a = 1$, $h = 1$ y $L = \pi$.

b) Utilice la herramienta de animación de su sistema algebraico por computadora para realizar un video de la solución del problema 7.

5.5 La ecuación de Laplace

Introducción Suponga que deseamos encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa rectangular cuyas orillas verticales $x = 0$ y $x = a$ se encuentran aisladas, mientras las orillas superior e inferior $y = b$ y $y = 0$ se mantienen a temperaturas $f(x)$ y 0, respectivamente. Consulte la figura 5.13. Cuando no escapa calor desde las superficies laterales de la placa, resolvemos el siguiente problema de valores en la frontera:

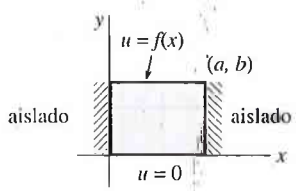


Figura 5.13 Cálculo de la temperatura u en una placa rectangular

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \quad 0 < y < b \tag{2}$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a. \tag{3}$$

Solución del problema de valores en la frontera Con $u(x, y) = X(x)Y(y)$, la separación de variables en (1) conduce a

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \tag{5}$$

En (2) y (3), las tres condiciones de frontera homogéneas se traducen en $X'(0) = 0$, $X'(a) = 0$ y $Y(0) = 0$. El problema de Sturm-Liouville asociado con la ecuación (4) es entonces

$$X'' + \lambda X = 0, \; X'(0) = 0, X'(a) = 0. \tag{6}$$

El análisis de los casos correspondientes a $\lambda = 0, \lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, donde $\alpha > 0$, ya se llevó a cabo en el ejemplo 1 de la sección 4.5. Por comodidad, a continuación presentamos una versión sintetizada de dicho análisis.

Para $\lambda = 0$, (6) se convierte en

$$X'' = 0,\ X'(0) = 0,\ X'(a) = 0.$$

La solución de la ecuación diferencial ordinaria es $X = c_1 + c_2x$. La condición de frontera $X'(0) = 0$ entonces, implica que $c_2 = 0$, por lo que $X = c_1$. Observe que para cualquier c_1, esta solución constante satisface la segunda condición de frontera $X'(a) = 0$. Haciendo que $c_1 \neq 0$, $X = c_1$ es una solución no trivial del problema de valores en la frontera (6). Para $\lambda = -\alpha^2 < 0$, (6) no tiene una solución no trivial. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, (6) se convierte en

$$X'' + \alpha^2 X = 0,\ X'(0) = 0, X'(a) = 0.$$

Al aplicar la condición de frontera $X'(0) = 0$, la solución $X = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ implica que $c_2 = 0$, por lo que $X = c_1 \cos \alpha x$. La segunda condición de frontera $X'(a) = 0$ aplicada a esta última expresión nos da entonces $-c_1\alpha \operatorname{sen} \alpha a = 0$. Debido a que $\alpha > 0$, la última ecuación se satisface cuando $\alpha a = n\pi$ o $\alpha = n\pi/a$, $n = 1, 2, \ldots$. Los valores propios de (6) son entonces λ_0 y $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/a^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Por la correspondiente $\lambda_0 = 0$ con $n = 0$, las funciones propias de (6) son

$$X = c_1,\ n = 0, \quad \text{y} \quad X = c_1 \cos \frac{n\pi}{a} x,\quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ahora debemos resolver la ecuación (5) sujeta a la única condición de frontera homogénea $Y(0) = 0$. Primero, para $\lambda_0 = 0$, la ecuación diferencial en (5) es simplemente $Y'' = 0$ y, por lo tanto, su solución es $Y = c_3 + c_4y$. Sin embargo, $Y(0) = 0$ implica que $c_3 = 0$, en consecuencia, $Y = c_4y$. Segundo, para $\lambda_n = n^2\pi^2/a^2$, la ecuación diferencial en (5) es $Y'' - \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$. Como $0 < y < b$ es un intervalo finito, escribimos la solución general en términos de las funciones hiperbólicas:

¿Por qué funciones hiperbólicas? Consulte la página 294.

$$Y = c_3 \cosh(n\pi y/a) + c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a).$$

A partir de esta solución podemos observar que $Y(0) = 0$ de nuevo implica $c_3 = 0$, en consecuencia $Y = c_4 \operatorname{senh}(n\pi y/a)$.

Las soluciones producto $u_n = X(x)Y(y)$ que satisfacen la ecuación de Laplace (1) y las tres condiciones de frontera homogéneas dadas en (2) y (3) son

$$A_0 y, \quad n = 0, \quad \text{y} \quad A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

donde hemos escrito nuevamente c_1c_4 como A_0 para $n = 0$ y como A_n para $n = 1, 2, \ldots$.

El principio de superposición da otro resultado

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \cos \frac{n\pi}{a} x. \tag{7}$$

Por último, sustituyendo $y = b$ en (7) observamos que

$$u(x, b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b \right) \cos \frac{n\pi}{a} x,$$

es el desarrollo de semintervalo de f en una serie coseno de Fourier. Si establecemos las identificaciones $A_0b = a_0/2$ y $A_n \operatorname{senh} (n\pi b/a) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, a partir de (2) y (3) de la sección 4.3 es posible deducir que

$$2A_0b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x)\, dx$$

$$A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x)\, dx \tag{8}$$

y

$$A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$A_n = \frac{2}{a\operatorname{senh}\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}x\,dx. \tag{9}$$

La solución de los problemas de valores en la frontera (1), (2) y (3) consta de la serie dada en (7) con coeficientes A_0 y A_n definidos en (8) y (9), respectivamente.

Problema de Dirichlet Un problema de valores en la frontera en el que buscamos una solución a una ecuación diferencial parcial elíptica como la de Laplace $\nabla^2 u = 0$ dentro de la región R (en el plano o espacio tridimensional), tal que u tome valores preestablecidos en toda la frontera de la región, recibe el nombre de **problema de Dirichlet**. En el problema 1 de los ejercicios 5.5 se le solicita al lector demostrar que la solución del problema de Dirichlet para una región rectangular,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

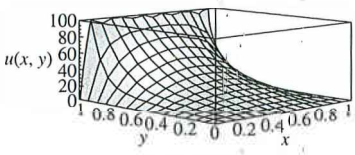
$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, b) = f(x)$$

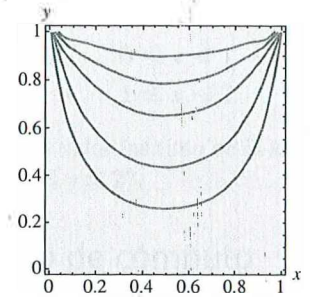
es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh}\frac{n\pi}{a}y \operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x \quad \text{donde} \quad A_n = \frac{2}{a\operatorname{senh}\dfrac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{a}x\,dx. \tag{10}$$

Para el caso especial en que $f(x) = 100$, $a = 1$, $b = 1$, los coeficientes A_n están dados por $A_n = 200\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi \operatorname{senh} n\pi}$. Con ayuda de un CAS, la gráfica de la superficie definida mediante $u(x, y)$ sobre la región R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ está dada en la figura 5.14*a*). Usted puede observar en esta figura que se satisfacen las condiciones de frontera; advierta especialmente que a lo largo de $y = 1$, $u = 100$ para $0 \le x \le 1$. Las isotermas, o curvas, en la región rectangular a lo largo de la cual la temperatura $u(x, y)$ es constante, pueden obtenerse utilizando las herramientas de graficación de contornos de un CAS y se ilustran en la figura 5.14*b*). Las isotermas también pueden visualizarse como las curvas de intersección (proyectadas en el plano xy) de los planos horizontales $u = 80$, $u = 60$, etc., con la superficie de la figura 5.14*a*). Observe que en toda la región la temperatura máxima es $u = 100$ y se presenta en la porción de la frontera correspondiente a $y = 1$. Esto no es coincidencia. Existe un **principio del máximo** que establece que una solución u de la ecuación de Laplace dentro de una región acotada R con frontera B (tal como un rectángulo, un círculo, una esfera, etc.) toma sus valores máximo y mínimo en B. Además, es posible demostrar que u puede no tener extremo relativo (máximo o mínimo) en el interior de R. Este último argumento está respaldado por la superficie ilustrada en la figura 5.14*a*).



a) Superficie



b) Isotermas

Figura 5.14 La superficie es una gráfica de sumas parciales cuando $f(x) = 100$ y $a = b = 1$ en la ecuación (10)

El valor máximo de u se encuentra en la frontera de la región R.

Principio de superposición El problema de Dirichlet para un rectángulo puede resolverse fácilmente por separación de variables cuando las condiciones homogéneas de frontera están especificadas en dos fronteras *paralelas*. Sin embargo, el método de separación de variables no se aplica al problema de Dirichlet cuando las condiciones de frontera son no homogéneas en los cuatro lados del rectángulo. Para salvar esta dificultad, dividimos el problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$u(0, y) = F(y), \qquad u(a, y) = G(y), \quad 0 < y < b \tag{11}$$

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u(x, b) = g(x), \quad 0 < x < a$$

en dos problemas, cada uno de los cuales tiene condiciones de frontera homogéneas en fronteras paralelas, como se ilustra.

Problema 1

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$u_1(0, y) = 0, \qquad u_1(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \qquad u_1(x, b) = g(x), \qquad 0 < x < a$$

Problema 2

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$u_2(0, y) = F(y), \qquad u_2(a, y) = G(y), \qquad 0 < y < b$$

$$u_2(x, 0) = 0, \qquad u_2(x, b) = 0, \qquad 0 < x < a$$

Suponga que u_1 y u_2 son las soluciones de los problemas 1 y 2, respectivamente. Si definimos $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, vemos que u satisface todas las condiciones de frontera del problema original (11). Por ejemplo:

$$u(0, y) = u_1(0, y) + u_2(0, y) = 0 + F(y) = F(y)$$

$$u(x, b) = u_1(x, b) + u_2(x, b) = g(x) + 0 = g(x)$$

y así sucesivamente. Además, por el teorema 5.1, u es una solución de la ecuación de Laplace. En otras palabras, hemos resuelto el problema original al resolver los problemas 1 y 2 y sumando sus soluciones. Esta propiedad aditiva de las soluciones se conoce como principio de superposición. Vea la figura 5.15.

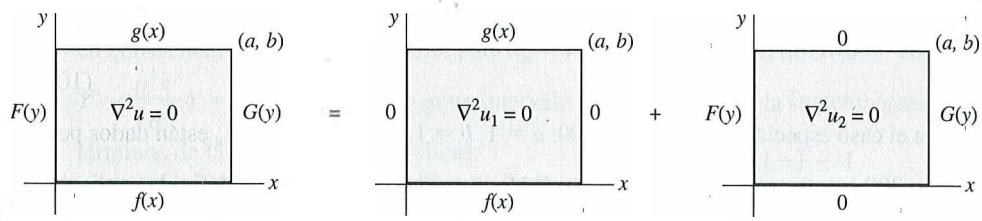


Figura 5.15 La solución u = solución u_1 del problema 1 + solución u_2 del problema 2

Se deja al lector como ejercicio (consulte los problemas 13 y 14 de los ejercicios 5.5) demostrar que una solución al problema 1 es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \, dx$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh} \dfrac{n\pi}{a} b} \left(\frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \, dx - A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \right),$$

y que una solución al problema 2 es

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cosh \frac{n\pi}{b} x + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{b} x \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y,$$

donde

$$A_n = \frac{2}{b} \int_0^b F(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dy$$

$$B_n = \frac{1}{\operatorname{senh} \dfrac{n\pi}{b} a} \left(\frac{2}{b} \int_0^b G(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dy - A_n \cosh \frac{n\pi}{b} a \right).$$

EJERCICIOS 5.5 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

En los problemas del 1 al 10, resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

1. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$
   $u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = f(x)$
2. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ u(x, b) = f(x)$
3. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$
   $u(x, 0) = f(x),\ u(x, b) = 0$
4. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$
   $u(x, 0) = x,\ u(x, b) = 0$
5. $u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 1 - y$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$
6. $u(0, y) = g(y),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = 0$
7. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, y),\ u(\pi, y) = 1$
   $u(x, 0) = 0,\ u(x, \pi) = 0$
8. $u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = u(x, 0),\ u(x, 1) = f(x)$
9. $u(0, y) = 0,\ u(1, y) = 0$
   $u(x, 0) = 100,\ u(x, 1) = 200$
10. $u(0, y) = 10y,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -1$
    $u(x, 0) = 0,\ u(x, 1) = 0$

En los problemas 11 y 12, resuelva la ecuación de Laplace (1) para la placa seminfinita que se extiende en la dirección positiva de y. En cada caso, suponga que $u(x, y)$ está acotada en $y \to \infty$.

11.

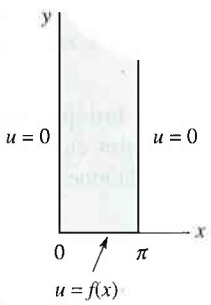


Figura 5.16 Placa seminfinita para el problema 11

12.

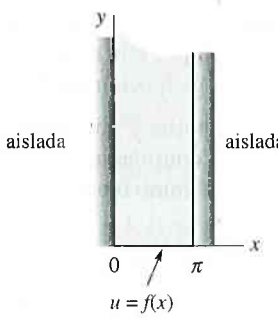


Figura 5.17 Placa seminfinita para el problema 12

En los problemas 13 y 14, resuelva la ecuación de Laplace (1) para una placa rectangular sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

13. $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$
    $u(x, 0) = f(x),\ u(x, b) = g(x)$
14. $u(0, y) = F(y),\ u(a, y) = G(y)$
    $u(x, 0) = 0,\ u(x, b) = 0$

En los problemas 15 y 16, utilice el principio de superposición para resolver la ecuación de Laplace (1) para una placa cuadrada sujeta a las condiciones de frontera que se proporcionan.

15. $u(0, y) = 1,\ u(\pi, y) = 1$
    $u(x, 0) = 0,\ u(x, \pi) = 1$
16. $u(0, y) = 0,\ u(2, y) = y(2 - y)$
    $u(x, 0) = 0,\ u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
17. En el problema 16, ¿cuál es el valor máximo de la temperatura u para $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2$?

Tareas para el laboratorio de cómputo

18. *a*) En el problema 1, suponga que $a = b = \pi$ y $f(x) = 100x(\pi - x)$. Sin utilizar el bosquejo de la solución $u(x, y)$, a mano, ¿cómo se vería la superficie sobre la región rectangular definida por $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

    b) ¿Cuál es el valor máximo de la temperatura u para $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$?

    c) Utilice la información del inciso *a*) para calcular los coeficientes de su respuesta al problema 1. Después, mediante la aplicación gráfica 3D de su CAS, trace la suma parcial $S_5(x, y)$ consistente en los primeros cinco términos de la solución encontrada en el inciso *a*) para $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$. Emplee diferentes perspectivas y después compárelas con el inciso *a*).

19. *a*) Utilice la aplicación gráfica de contorno de su CAS para graficar las isotermas $u = 170, 140, 110, 80, 60, 30$ para la solución del problema 9. Utilice la suma parcial $S_5(x, y)$ consistente en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución.

    b) Mediante la aplicación gráfica de contorno de su CAS, grafique la suma parcial $S_5(x, y)$.

20. Utilice la aplicación gráfica de contorno de su CAS para graficar las isotermas $u = 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0, -0.05$ para la solución del problema 10. Emplee la suma parcial $S_5(x, y)$ que consiste en los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución.

Problemas de análisis

21. Resuelva el problema de Newmann para un rectángulo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \quad 0 < x < a$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = g(y), \quad 0 < y < b.$$

Explique por qué una condición necesaria para que la solución u exista es que g satisfaga

$$\int_0^b g(y)dy = 0.$$

Con frecuencia, a esto se le conoce como la **condición de compatibilidad**. Investigue más a fondo a este respecto y explique dicha condición con fundamentos físicos.

5.6 Problemas de valores en la frontera no homogéneos

Introducción Se dice que un problema de valores en la frontera es **no homogéneo** cuando la ecuación diferencial parcial o las condiciones de frontera son no homogéneas. Por ejemplo, un problema característico de valores en la frontera no homogéneo de la ecuación de calor es

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = u_0(t), \quad u(L,t) = u_1(t), \quad t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos interpretar este problema como un modelo desarrollado para investigar la distribución de temperatura u dentro de una varilla de longitud L cuando se está generando calor internamente a velocidad $F(x, t)$; la temperatura en los extremos de la varilla varía respecto al tiempo t. El método de separación de variables puede no ser aplicable a un problema de valores en la frontera si la ecuación diferencial parcial o las condiciones de frontera son no homogéneas. Por ejemplo, cuando se genera calor a velocidad constante r dentro de la varilla, la ecuación de calor dada en (1) toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2}$$

Se puede observar fácilmente que la ecuación (2) no es separable. Por otro lado, suponga que deseamos resolver la ecuación de calor usual $ku_{xx} = u_t$ cuando las fronteras $x = 0$ y $x = \mathbf{L}$ se mantienen a las temperaturas u_0 y u_1 que son diferentes de cero. Aunque la sustitución $u(x, t) = X(x)T(t)$ separa la ecuación diferencial parcial, nos vemos imposibilitados para determinar los valores propios y las funciones propias, ya que no se puede llegar a ninguna conclusión respecto a $X(0)$ y $X(L)$ a partir de $u(0, t) = X(0)T(t) = u_0$ y $u(L, t) = X(L)T(t) = u_1$.

Cambio de variable dependiente En esta sección consideramos diversos tipos de problemas de valores en la frontera no homogéneos que pueden resolverse mediante el cambio de la variable dependiente u por una nueva variable dependiente v aplicando la sustitución $u = v + \psi$, donde ψ es una función por determinar.

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo En primera instancia, consideramos un problema de valores en la frontera no homogéneo como (1), donde el término fuente de calor F y las condiciones de frontera son independientes del tiempo:

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ &u(0,t) = u_0, \quad u(L,t) = u_1, \quad t > 0 \\ &u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L. \end{aligned} \tag{3}$$

En la ecuación (3), u_0 y u_1 expresan constantes. Mediante el cambio de la variable dependiente u por una nueva variable dependiente v empleando la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, (3) puede reducirse a dos problemas:

$$\text{Problema 1: } \{k\psi'' + F(x) = 0,\ \psi(0) = u_0, \psi(L) = u_1$$

$$\text{Problema 2: } \begin{cases} k\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ v(0, t) = 0,\ v(L, t) = 0 \\ v(x, 0) = f(x) - \psi(x). \end{cases}$$

Observe que la ecuación diferencial ordinaria del problema 1 puede resolverse directamente por separación de variables. Una solución del problema original es, por lo tanto,

$$\text{solución } u = \text{solución } \psi \text{ del problema 1} + \text{solución } v \text{ del problema 2.}$$

En los dos problemas anteriores no se proporciona nada que deba ser memorizado, sin embargo, lleve a cabo la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$ como se indica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1 Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo

Resuelva la ecuación (2) sujeta a

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = u_0, \qquad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

Solución Tanto la ecuación diferencial parcial como la condición en la frontera derecha $x = 1$ son no homogéneas. Si establecemos $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \psi'' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \tag{4}$$

puesto que $\psi_t = 0$. Sustituyendo los resultados de (4) en (3) obtenemos

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\psi'' + r = \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{5}$$

La ecuación (5) se reduce a una ecuación diferencial parcial homogénea si demandamos que ψ sea una función que satisfaga la ecuación diferencial ordinaria

$$k\psi'' + r = 0 \quad \text{o} \quad \psi'' = -\frac{r}{k}.$$

Integrar la última ecuación dos veces da como resultado

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + c_1 x + c_2. \tag{6}$$

Además,

$$u(0, t) = v(0, t) + \psi(0) = 0$$

$$u(1, t) = v(1, t) + \psi(1) = u_0.$$

Tenemos $v(0, t) = 0$ y $v(1, t) = 0$, siempre y cuando seleccionemos

$$\psi(0) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(1) = u_0.$$

Aplicar las dos últimas condiciones a (6) nos da, a su vez, $c_2 = 0$ y $c_1 = r/2k + u_0$. En consecuencia,

$$\psi(x) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x.$$

Por último, la condición inicial $u(x, 0) = v(x, 0) + \psi(x)$ implica que $v(x, 0) = u(x, 0) - \psi(x) = f(x) - \psi(x)$. Entonces, para determinar $v(x, t)$, resolvemos el nuevo problema de valores en la frontera homogéneo

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$v(x, 0) = f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x, \quad 0 < x < 1$$

mediante separación de variables. De la manera acostumbrada obtenemos

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$$

donde la condición inicial $v(x, 0)$ determina los coeficientes senoidales de Fourier:

$$A_n = 2\int_0^1 \left[f(x) + \frac{r}{2k}x^2 - \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x\right] \operatorname{sen} n\pi x\, dx. \tag{7}$$

Al sumar $\psi(x)$ y $v(x, t)$, obtenemos una solución del problema original:

$$u(x, t) = -\frac{r}{2k}x^2 + \left(\frac{r}{2k} + u_0\right)x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x, \tag{8}$$

donde los coeficientes A_n se encuentran definidos en (7). ❑

Observe en (8) que $u(x, t) \to \psi(x)$ conforme $t \to \infty$. En el contexto del problema de valores en la frontera dado, ψ se denomina **solución de estado estable**. Puesto que $v(x, t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, v se llama **solución transitoria**.

■ **Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo** Regresemos al problema planteado en (1), donde el término fuente de calor F y las condiciones de frontera dependen del tiempo. De manera intuitiva, esperaríamos que el modo de enfrentar este problema fuera una extensión natural del procedimiento realizado en el ejemplo 1, es decir, la búsqueda de una solución de la forma $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$. Mientras que esta última forma de la solución es correcta, en general, no es posible encontrar una función de dos variables $\psi(x, t)$ que reduzca el problema planteado en $v(x, t)$ a uno homogéneo. Para comprender por qué esto es así, veamos lo que sucede cuando $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$ se sustituye en (1). Como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{9}$$

(1) se convierte en

$$k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$v(0, t) + \psi(0, t) = u_0(t), \quad v(L, t) + \psi(L, t) = u_0(t) \tag{10}$$

$$v(x, 0) = f(x) - \psi(x, 0).$$

En (10), las condiciones de frontera de v serán homogéneas si demandamos que

$$\psi(0, t) = u_0(t), \ \psi(L, t) = u_0(t). \tag{11}$$

Si, en este punto, fuéramos a seguir los mismos pasos aplicados en el método del ejemplo 1, trataríamos de forzar a que el problema en (10) fuera homogéneo resolviendo $k\psi_{xx} + F(x, t) = \psi_t$ y, posteriormente, imponiendo las condiciones de (11) en la solución ψ. En vista de que la ecuación definida por ψ es, en sí misma, una ecuación diferencial parcial no homogénea, ese enfoque sería una expectativa poco realista. Trataremos con una táctica diferente por completo diseñando simplemente una función ψ que satisfaga ambas condiciones de (11). Una de tales funciones está dada por

$$\psi(x, t) = u_0(t) + \frac{x}{L}[u_1(t) - u_0(t)]. \tag{12}$$

Volvemos a inspeccionar la ecuación (10) y observamos que haber seleccionado el valor de ψ como se hizo, representó alguna simplificación adicional ya que $\psi_{xx} = 0$. Ahora comenzamos de nuevo. En esta ocasión, si sustituimos

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(t) + \frac{x}{L}[u_1(t) - u_0(t)] \tag{13}$$

el problema (1) se convierte en

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}, \ 0 < x < L, \ t > 0 \\ &v(0, t) = 0, \ v(L, t) = 0, \ t > 0 \\ &v(x, 0) = f(x) - \psi(x, 0), \ 0 < x < L, \end{aligned} \tag{14}$$

donde $G(x, t) = F(x, t) - \psi_t$. Mientras el problema (14) aún sea no homogéneo (las condiciones de frontera son homogéneas pero la ecuación diferencial parcial es no homogénea) resulta factible de resolver. El método de solución de (14) está ligeramente involucrado, por lo que antes de mostrarlo con un ejemplo específico, delinearemos primero la estrategia básica:

Suponga que los coeficientes dependientes del tiempo $v_n(t)$ y $G_n(t)$ pueden ser tales que en (14) $v(x, t)$ y $G(x, t)$ puedan desarrollarse en la serie

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x \quad \text{y} \quad G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x, \tag{15}$$

donde $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ son las funciones propias de $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X(L) = 0$ correspondientes a los valores propios $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2/L^2$. Este problema de Sturm-Liouville se habría obtenido de haber aplicado la separación de variables a los problemas de valores en la frontera asociados de (14). En la ecuación (15) observe que la serie supuesta para $v(x, t)$ ya satisface las condiciones de frontera de (14). Ahora sustituya la primera serie de (15) en la ecuación diferencial parcial no homogénea (14), agrupe los términos, e iguale la serie resultante con el desarrollo en serie real calculada para $G(x, t)$.

Este método se ilustra mediante el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo

Resuelva

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \ 0 < x < 1, \ t > 0 \\ &u(0, t) = \cos t, \ u(1, t) = 0, \ t > 0 \\ &u(x, 0) = 0, \ 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Solución Comparamos este problema con (1) mediante la identificación de $k = 1, L = 1$, $F(x, t) = 0, u_0(t) = \cos t, u_1(t) = 0$ y $f(x) = 0$. Iniciamos con la construcción de ψ. A partir de (12) obtenemos

$$\psi(x, t) = \cos t + x\,[0 - \cos t\,] = (1 - x)\cos t,$$

y después utilizamos la sustitución tal como se indica en (13)

$$u(x, t) = v(x, t) + (1 - x)\cos t \tag{16}$$

para obtener el problema de valores en la frontera para $v(x, t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 - x)\operatorname{sen} t = \frac{\partial v}{\partial t},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ &v(0, t) = 0,\ v(1, t) = 0, t > 0 \\ &v(x, 0) = x - 1,\ 0 < x < 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Los valores propios y las funciones propias del problema de Sturm-Liouville

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X(1) = 0$$

se calculan como $\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2$ y sen $n\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Con $G(x, t) = (1 - x)$ sen t suponemos que para un valor fijo de t, a partir de (15), v y G pueden escribirse como la serie seno de Fourier:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\operatorname{sen} n\pi x, \tag{18}$$

y

$$(1 - x)\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\operatorname{sen} n\pi x. \tag{19}$$

Al manejar a t como un parámetro, los coeficientes G_n de (19) pueden ser calculados:

$$G_n(t) = \frac{2}{1}\int_0^1 (1 - x)\operatorname{sen} t \operatorname{sen} n\pi x\,dx = 2\operatorname{sen} t \int_0^1 (1 - x)\operatorname{sen} n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} t.$$

Por lo tanto,

$$(1 - x)\operatorname{sen} t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen} t \operatorname{sen} n\pi x. \tag{20}$$

Podemos determinar los coeficientes $v_n(t)$ sustituyendo (19) y (20) en la ecuación diferencial parcial (17). Con este objetivo en mente, las derivadas parciales de v son

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)(-n^2\pi^2)\operatorname{sen} n\pi x \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(t)\operatorname{sen} n\pi x. \tag{21}$$

Escribimos la ecuación diferencial parcial como $v_t - v_{xx} = (1 - x)$ sen t y utilizamos las ecuaciones (20) y (21) para obtener

$$\sum_{n=1}^{\infty} [v_n'(t) + n^2\pi^2 v_n(t)]\operatorname{sen} n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen} t}{n\pi}\operatorname{sen} n\pi x.$$

Enseguida igualamos los coeficientes de sen $n\pi x$ en cada miembro de la igualdad y resulta

$$v_n'(t) + n^2\pi^2 v_n(t) = \frac{2\operatorname{sen} t}{n\pi}.$$

Para cada n, la última ecuación es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden cuya solución general es

$$v_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left(\frac{n^2\pi^2\operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1}\right) + C_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

donde C_n representa la constante arbitraria. Por lo tanto, la forma supuesta para $v(x, t)$ en (18) puede escribirse como

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n e^{-n^2\pi^2 t} \right\} \operatorname{sen} n\pi x. \tag{22}$$

C_n puede calcularse aplicando la condición inicial $v(x, 0)$ a la ecuación (22). A partir de la serie seno de Fourier

$$x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n \right\} \operatorname{sen} n\pi x$$

podemos observar que la cantidad entre corchetes representa los coeficientes seno de Fourier b_n para $x - 1$. Esto es,

$$\frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n = 2\int_0^1 (x - 1)\operatorname{sen} n\pi x\, dx \quad \text{o} \quad \frac{-2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} + C_n = \frac{-2}{n\pi}.$$

Por lo tanto,

$$C_n = \frac{2}{n\pi(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{2}{n\pi}.$$

Sustituimos el último resultado en (22) para obtener una solución de la ecuación (17),

$$v(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t + e^{-n^2\pi^2 t}}{n(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n} \right\} \operatorname{sen} n\pi x.$$

Por último, a partir de la ecuación (16) se deduce que la solución $u(x, t)$ deseada es

$$u(x, t) = (1 - x)\cos t + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t + e^{-n^2\pi^2 t}}{n(n^4\pi^4 + 1)} - \frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n} \right\} \operatorname{sen} n\pi x. \quad \square$$

Comentarios

i) Si el problema de valores en la frontera tiene condiciones de frontera homogéneas y un término dependiente del tiempo $F(x, t)$ en la ecuación diferencial parcial, entonces no es necesario cambiar la variable dependiente sustituyendo $u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t)$. Por ejemplo, si u_0 y u_1 son 0 en un problema tal como el (1), entonces podemos deducir a partir de (12) que $\psi(x, t) = 0$. El método de solución es básicamente un ataque frontal contra la ecuación diferencial parcial suponiendo los desarrollos en series ortogonales apropiadas para $u(x, t)$ y $F(x, t)$. De nuevo, si u_0 y u_1 son 0 en (1), la solución comienza con los supuestos dados en (15), donde los símbolos v y G se reemplazan naturalmente por u y F, respectivamente. Consulte los problemas del 13 al 16 de los ejercicios 5.6. En los problemas 17 y 18 de los ejercicios 5.6, usted tendrá que construir $\psi(x, t)$ tal como se ilustra en el ejemplo 2. Vea también el problema 20 de los ejercicios 5.6.

ii) No enfatice especialmente el hecho de que utilizamos la ecuación de calor a lo largo del análisis anterior. El método examinado en el ejemplo 1 puede aplicarse tanto a la ecuación de onda como a la de Laplace. Consulte los problemas del 1 al 12 de los ejercicios 5.6. El método presentado en el ejemplo 2 se fundamenta en la dependencia del tiempo en el problema, por ello no es aplicable a problemas de valores en la frontera que involucren la ecuación de Laplace.

EJERCICIOS 5.6 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-16.

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera independientes del tiempo

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$ sujeta a las condiciones que se proporcionan.

1. $u(0, t) = 100$, $u(1, t) = 100$
   $u(x, 0) = 0$

2. $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = 0$
   $u(x, 0) = f(x)$

En los problemas 3 y 4, resuelva la ecuación de calor (2) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, t) = u_0$, $u(1, t) = u_0$
   $u(x, 0) = 0$

4. $u(0, t) = u_0,\ u(1, t) = u_1$

   $u(x, 0) = f(x)$

5. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ae^{-\beta x} = \frac{\partial u}{\partial t},\ \beta > 0, 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0, t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < 1,$$

   donde A es una constante. La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando éste se genera dentro de una varilla delgada debido al decaimiento radiactivo del material.

6. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = u_0, t > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

   La ecuación diferencial parcial es una forma de la ecuación de calor cuando éste se pierde por radiación proveniente de la superficie lateral de una varilla delgada en un medio que se encuentra a temperatura de cero.

7. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0) = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(0, t) = u_0,\ u(1, t) = 0, t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x),\ 0 < x < 1.$$

8. Encuentre una solución de estado estable $\psi(x)$ si la varilla del problema 7 es seminfinita y se extiende en la dirección positiva de x, radia desde su cara lateral hacia un medio con temperatura de cero, y

$$u(0, t) = u_0,\ \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), x > 0.$$

9. Cuando una cuerda vibratoria está sujeta a una fuerza vertical externa que varía con la distancia horizontal a partir del extremo izquierdo, la ecuación de onda toma la forma

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Ax = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

   donde A es constante. Resuelva esta ecuación diferencial parcial sujeta a

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < 1.$$

10. Una cuerda inicialmente en reposo sobre el eje x está anclada en los puntos $x = 0$ y $x = 1$ en el eje x. Si se permite que la cuerda caiga por su propio peso en $t > 0$, el desplazamiento $u(x, t)$ satisface

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

    donde g es la aceleración de la gravedad. Despeje $u(x, t)$.

11. Determine la temperatura constante $u(x, y)$ en la placa seminfinita ilustrada en la figura 5.18. Suponga que la temperatura se acota cuando $x \to \infty$. [*Sugerencia:* Utilice $u(x, y) = v(x, y) + \psi(y)$.]

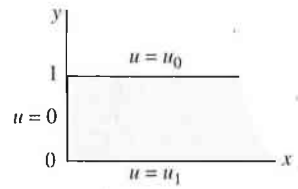


Figura 5.18 Placa seminfinita del problema 11

12. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -h,\ h > 0,$$

    se presenta en muchos problemas que involucran potencial eléctrico y es conocida como **ecuación de Poisson**. Resuelva la ecuación anterior sujeta a las condiciones

$$u(0, y) = 0,\ u(\pi, y) = 1,\ y > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

Ecuaciones diferenciales parciales y condiciones de frontera dependientes del tiempo

En los ejercicios del 13 al 18, resuelva el problema de valores en la frontera dado.

13. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi, t > 0$$
$$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

14. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-3t} = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < \pi.$$

15. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 1 + x - x\cos t = \frac{\partial u}{\partial t},\ 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = x(1 - x),\ 0 < x < 1$$

16. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x\cos t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0 < x < \pi,\ t > 0$$
$$u(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x, 0) = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,\ 0 < x < \pi$$

17. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$

$u(0, t) = \operatorname{sen} t, \quad u(1, t) = 0, t > 0$

$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$

18. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2t + 3tx = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$

$u(0, t) = t^2, \quad u(1, t) = 1, t > 0$

$u(x, 0) = x^2, \quad 0 < x < 1$

Problemas de análisis

19. Considere el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \ t > 0$$
$$u(0, t) = u_0, \ u(L, t) = u_1$$
$$u(x, 0) = f(x),$$

éste es un modelo para la temperatura u de una varilla de longitud L. Si u_0 y u_1 son constantes diferentes de cero, ¿cuál esperaría, de manera intuitiva, que fuera la temperatura en el centro de la varilla después de un largo periodo? Demuestre su argumento.

20. Lea el inciso *i*) de los *Comentarios* incluidos al final de esta sección. Después, analice cómo resolver

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \ t > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, \ t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L.$$

Ponga en práctica sus ideas resolviendo el problema de valores en la frontera dado en este ejercicio y cuyos valores son $k = 1, L = 1, F(x, t) = tx$ y $f(x) = 0$.

5.7 Desarrollos en series ortogonales

Introducción Para ciertos tipos de condiciones de frontera, el método de separación de variables y el principio de superposición conducen al desarrollo de una función en una serie infinita que *no* es una serie de Fourier. Para resolver los problemas de esta sección, vamos a utilizar el concepto de desarrollos en series ortogonales o el de series de Fourier generalizadas que se desarrolló en la sección 4.1.

Ejemplo 1 Uso de desarrollos en series ortogonales

La temperatura de una varilla de longitud unitaria en la que existe transferencia de calor desde su frontera derecha hacia un medio circundante que se mantiene a una temperatura constante de cero se determina a partir de

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -hu(1, t), \quad h > 0, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

Despeje $u(x, t)$.

Solución Procedemos exactamente igual que en la sección 5.3, con $u(x, t) = X(x)T(t)$ y $-\lambda$ como la constante de separación, y calculamos las ecuaciones diferenciales ordinarias y las condiciones de frontera, respectivamente,

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{1}$$

$$T' + k\lambda T = 0 \tag{2}$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = -hX(1). \tag{3}$$

La ecuación (1) junto con las condiciones de frontera homogéneas (3) conforman un problema habitual de Sturm-Liouville:

$$X'' + \lambda X = 0,\ X(0) = 0,\ X'(1) + hX(1) = 0. \tag{4}$$

Excepto por la presencia del símbolo h, el problema de valores en la frontera planteado en (4) es, en esencia, el problema resuelto en el ejemplo 2 de la sección 4.5. Tal como en dicho ejemplo, (4) posee las soluciones no triviales solamente en el caso de que $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. La solución general de la ecuación diferencial (4) es $X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \operatorname{sen} \alpha x$. La primera condición de frontera de (4) da inmediatamente $c_1 = 0$. Aplicando la segunda condición de frontera de (4) a $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha x$ tenemos

$$\alpha \cos\alpha + h \operatorname{sen}\alpha = 0 \quad \text{o} \quad \tan\alpha = -\frac{\alpha}{h}. \tag{5}$$

Debido a que las gráficas de $y = \tan x$ y $y = -x/h$, $h > 0$, tienen un número infinito de puntos de intersección para $x > 0$ (la figura 4.20 ilustra el caso cuando $h = 1$), la última ecuación dada en (5) tiene un número infinito de raíces. Desde luego, estas raíces dependen del valor de h. Si las raíces positivas consecutivas se expresan mediante α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces los valores propios del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2$, y las correspondientes funciones propias son $X(x) = c_2 \operatorname{sen} \alpha_n x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. La solución de la ecuación diferencial de primer orden (2) es $T(t) = c_3 e^{-k\alpha_n^2 t}$ por lo que

$$u_n = XT = A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x \quad \text{y} \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen} \alpha_n x.$$

Ahora, en $t = 0$, $u(x, 0) = 1$, $0 < x < 1$, en consecuencia

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \alpha_n x. \tag{6}$$

La serie mostrada en (6) no es una serie seno de Fourier; en vez de eso, es un desarrollo de $u(x, 0) = 1$ en términos de las funciones ortogonales que surgen a partir del problema de Sturm-Liouville (4). Se puede deducir que el conjunto de funciones propias $\{\operatorname{sen}\alpha_n x\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las α están definidas por $\tan \alpha = -\alpha/h$ es ortogonal respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Con $f(x) = 1$ y $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\alpha_n x$, a partir de la ecuación (8) de la sección 4.1 es posible deducir que en (6) los coeficientes A_n son

$$A_n = \frac{\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x\, dx}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x\, dx}. \tag{7}$$

Para evaluar la norma cuadrada de cada una de las funciones propias utilizamos la identidad trigonométrica:

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - \cos 2\alpha_n x)\, dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\alpha_n} \operatorname{sen} 2\alpha_n\right). \tag{8}$$

Con ayuda de la fórmula del ángulo doble $\operatorname{sen} 2\alpha_n = 2 \operatorname{sen} \alpha_n \cos \alpha_n$ y la primera ecuación en (5) dada en la forma $\alpha_n \cos \alpha_n = -h \operatorname{sen} \alpha_n$, podemos simplificar (8) hasta llegar a

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2 \alpha_n x\, dx = \frac{1}{2h}(h + \cos^2 \alpha_n).$$

Asimismo, $$\int_0^1 \operatorname{sen} \alpha_n x\, dx = -\frac{1}{\alpha_n} \cos \alpha_n x \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha_n}(1 - \cos \alpha_n).$$

En consecuencia, la ecuación (7) se convierte en

$$A_n = \frac{2h(1 - \cos\alpha_n)}{\alpha_n(h + \cos^2 \alpha_n)}.$$

Por último, una solución del problema de valores en la frontera es

$$u(x, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\alpha_n}{\alpha_n(h + \cos^2\alpha_n)} e^{-k\alpha_n^2 t} \operatorname{sen}\alpha_n x. \qquad \square$$

Ejemplo 2 Uso de desarrollos en series ortogonales

El ángulo de torsión $\theta(x, t)$ de una barra vibratoria torcida de longitud unitaria está determinado por

$$a^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$\theta(x, 0) = x, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

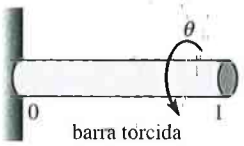


Figura 5.19 Calcule el ángulo de torsión θ

Vea la figura 5.19. La condición de frontera presentada en $x = 1$ se llama condición de extremo libre. Despeje $\theta(x, t)$.

Solución Procedemos igual que en la sección 5.4 con $\theta(x, t) = X(x)T(t)$ y utilizando $-\lambda$ una vez más como la constante de separación, las ecuaciones separadas y las condiciones de frontera son

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{9}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{10}$$

$$X(0) = 0 \quad \text{y} \quad X'(1) = 0. \tag{11}$$

La ecuación (9), junto con las condiciones de frontera homogéneas dadas en (11),

$$X'' + \lambda X = 0, \; X(0) = 0, \; X'(1) = 0, \tag{12}$$

producen un problema habitual de Sturm-Liouville. Se exhorta al lector a comprobar que para $\lambda = 0$ y $\lambda = -\alpha^2$, $\alpha > 0$, la única solución de (12) es $X = 0$. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, las condiciones de frontera $X(0) = 0$ y $X'(1) = 0$ aplicadas a la solución general $X(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \operatorname{sen}\alpha x$ nos dan, a su vez, $c_1 = 0$ y $c_2 \cos\alpha = 0$. Puesto que $\cos\alpha$ es cero solamente cuando α es un múltiplo entero impar de $\pi/2$, escribimos $\alpha_n = (2n - 1)\pi/2$. Los valores propios de (12) son $\lambda_n = \alpha_n^2 = (2n - 1)^2\pi^2/4$, y las correspondientes funciones propias son $X(x) = c_2 \operatorname{sen}\alpha_n x = c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Como la varilla es liberada a partir del reposo, la condición inicial $\theta_t(x, 0) = 0$ se traduce en $X(x)T'(0) = 0$ o $T'(0) = 0$. Cuando ésta se aplica a la solución general $T(t) = c_3 \cos a\alpha_n t + c_4 \operatorname{sen} a\alpha_n t$ de la ecuación diferencial de segundo orden (10), $T'(0) = 0$ implica que $c_4 = 0$ dejando a $T(t) = c_3 \cos a\alpha_n t = c_3 \cos a\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi t$. Por lo tanto,

$$\theta_n = XT = A_n \cos a\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi x.$$

Con la finalidad de satisfacer la condición inicial restante, formamos la superposición de θ_n,

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos a\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi x. \tag{13}$$

Cuando $t = 0$ debemos tener, para $0 < x < 1$,

$$\theta(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n - 1}{2}\right)\pi x. \tag{14}$$

Como en el ejemplo 1, el conjunto de funciones propias $\left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x \right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, es ortogonal con respecto a la función peso $p(x) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Aunque la serie trigonométrica dada en (14) se parece más a la serie de Fourier que a (6), no es la serie seno de Fourier, pues el argumento de la función seno no es un entero múltiplo de $\pi x/L$ (donde $L = 1$). La serie es de nuevo un desarrollo de la serie ortogonal o serie generalizada de Fourier. Entonces, a partir de la ecuación (8) de la sección 4.1, los coeficientes A_n de (14) están dados por

$$A_n = \frac{\int_0^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x \, dx}{\int_0^1 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x \, dx}.$$

Realizamos las dos integraciones y llegamos a

$$A_n = \frac{8(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

Por lo tanto, el ángulo de torsión es

$$\theta(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos a\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x. \quad \square$$

EJERCICIOS 5.7

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

1. En el ejemplo 1, determine la temperatura $u(x, t)$ cuando el extremo de la varilla está aislado.
2. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -h(u(1, t) - u_0), \quad h > 0, t > 0$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1.$$

3. Determine la temperatura de estado estable de una placa rectangular para la que las condiciones de frontera son

$$u(0, y) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = -hu(a, y), \quad h > 0, 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 < x < a.$$

4. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x > 0, 0 < y < 1$$
$$u(0, y) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, y) = 0, 0 < y < 1$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = -hu(x, 1), h > 0, x > 0.$$

5. Determine la temperatura $u(x, t)$ de una varilla de longitud L si la temperatura inicial es $f(x)$ a todo lo largo, el extremo $x = 0$ se mantiene a una temperatura de cero y el extremo $x = L$ está aislado.
6. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < L.$$

La solución $u(x, t)$ representa el desplazamiento longitudinal de una barra elástica vibratoria anclada en su extremo izquierdo y sujeta a una fuerza constante F_0 en su extremo derecho. Consulte la figura 5.11 en la página 325. Al parámetro E se le denomina módulo de elasticidad.

7. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(1, y) = u_0, 0 < y < 1$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0, 0 < x < 1.$$

8. La temperatura inicial de una varilla de longitud unitaria es $f(x)$. Existe transferencia de calor desde ambos extremos, $x = 0$ y $x = 1$, hacia un medio circundante que se mantiene a una temperatura constante de cero. Demuestre que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\alpha_n^2 t}(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{(\alpha_n^2 + 2h + h^2)}\int_0^1 f(x)(\alpha_n \cos \alpha_n x + h \operatorname{sen} \alpha_n x)\, dx.$$

Los valores propios son $\lambda_n = \alpha_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde las α_n son las raíces positivas consecutivas de $\tan \alpha = 2\alpha h/(\alpha^2 - h^2)$.

9. Utilice el método que inicia en (15) de la sección 5.6 para resolver el problema de valores en la frontera no homogéneo

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xe^{-2t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = -u(1, t), \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

[*Sugerencia:* Consulte *i*) en los *Comentarios* de la página 337.]

Tareas para el laboratorio de cómputo

10. Una viga vibratoria en voladizo está empotrada en su extremo izquierdo ($x = 0$) y libre en su extremo derecho ($x = 1$). Vea la figura 5.20. El desplazamiento transversal $u(x, t)$ de la viga se determina a partir de

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad t > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|_{x=1} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Este problema de valores en la frontera podría servir como un modelo para los desplazamientos del ala vibratoria de un avión.

a) Demuestre que los valores propios del problema están determinados a partir de la ecuación $\cos \alpha \cosh \alpha = -1$.

b) Utilice un CAS para calcular las aproximaciones de los dos primeros valores propios positivos del problema. [*Sugerencia:* Consulte el problema 11 de los ejercicios 5.4.]

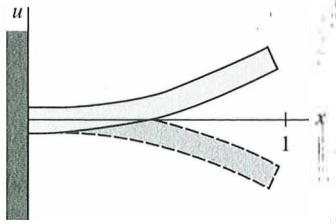


Figura 5.20 Viga en voladizo del problema 10

11. *a*) Determine una ecuación que defina los valores propios cuando los extremos de la viga del problema 10 se encuentren empotrados en $x = 0$ y $x = 1$.

b) Utilice un CAS para calcular las aproximaciones de los dos primeros valores propios del problema.

[*Sugerencia:* Consulte el problema 12 de los ejercicios 5.4.]

5.8 Serie de Fourier con dos variables

■ **Introducción** En el capítulo anterior resolvimos formas unidimensionales de las ecuaciones de calor y de onda. En esta sección vamos a hacer extensivo el método de separación de variables a ciertos problemas que involucran a ecuaciones de calor y de onda en dos dimensiones.

■ **Ecuaciones de calor y de onda en dos dimensiones** Suponga que la región rectangular de la figura 5.21*a*) es una placa delgada donde la temperatura u es una función del tiempo t y de la posición (x, y). Entonces, En las condiciones adecuadas, puede demostrarse que la expresión $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación bidimensional del calor**

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1}$$

Por otro lado, suponga que la figura 5.21*b*) representa un marco rectangular sobre el que se encuentra estirada una delgada membrana flexible (un tambor rectangular). Si la membrana se pone en movimiento, entonces su desplazamiento u, medido a partir del plano xy (vibraciones transversales), es también una función del tiempo t y de la posición (x, y). Cuando los desplazamientos son pequeños, libres y no amortiguados, $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación bidimensional de onda**

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Tal como ilustra el ejemplo siguiente, las soluciones de problemas de valores en la frontera que involucran (1) y (2) nos llevan al concepto de una serie de Fourier en dos

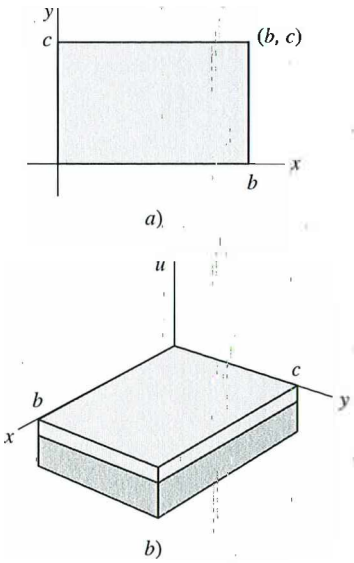


Figura 5.21 *a*) Determine la temperatura u en una placa rectangular, y *b*) calcule el desplazamiento vertical u de una membrana rectangular

variables. Debido a que los análisis de problemas que involucran (1) y (2) son muy similares, solamente ilustramos la solución para el caso de la ecuación de calor.

Ejemplo 1 Temperatura de una placa

Encuentre la temperatura $u(x, y, t)$ de la placa mostrada en la figura 5.21*a*) si la temperatura inicial es $f(x, y)$ en todo momento y las fronteras se mantienen a una temperatura de cero en el tiempo $t > 0$.

Solución Debemos resolver

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < b, \; 0 < y < c, \; t > 0$$

sujeta a

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = 0, && u(b, y, t) = 0, && 0 < y < c, && t > 0 \\ &u(x, 0, t) = 0, && u(x, c, t) = 0, && 0 < x < b, && t > 0 \\ &u(x, y, 0) = f(x, y), && 0 < x < b, && 0 < y < c. \end{aligned}$$

Con el fin de separar variables en la ecuación diferencial parcial en tres variables independientes x, y y t, tratemos de encontrar la solución producto $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$. Sustituyendo, obtenemos

$$k(X''YT + XY''T) = XYT' \quad \text{o} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT}. \tag{3}$$

Puesto que en (3) el primer miembro de la última ecuación depende solamente de x y el segundo miembro depende solamente de y y t, debemos igualar ambos miembros a una constante de $-\lambda$:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} + \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

y así

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$\frac{Y''}{Y} = \frac{T'}{kT} + \lambda. \tag{5}$$

Por el mismo razonamiento, si introducimos otra constante de separación $-\mu$ en (5), entonces

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu \quad \text{y} \quad \frac{T'}{kT} + \lambda = -\mu$$

$$Y'' + \mu Y = 0 \quad \text{y} \quad T' + k(\lambda + \mu)T = 0. \tag{6}$$

Ahora las condiciones homogéneas de frontera

$$\left.\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(b, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, c, t) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ implica } \begin{cases} X(0) = 0, & X(b) = 0 \\ Y(0) = 0, & Y(c) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos dos problemas de Sturm-Liouville, uno en la variable x,

$$X'' + \lambda X = 0, \; X(0) = 0, \; X(b) = 0 \tag{7}$$

y el otro en la variable y,

$$Y'' + \mu Y = 0, \; Y(0) = 0, \; Y(c) = 0. \tag{8}$$

La consideración usual de casos ($\lambda = 0, \lambda = -\alpha^2 < 0, \lambda = \alpha^2 > 0, \mu = 0, \lambda = -\beta^2 < 0$, y así sucesivamente) nos lleva a dos conjuntos independientes de valores propios definidos por sen $\lambda b = 0$ y sen $\mu c = 0$. Estas ecuaciones, a la vez, implican

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{y} \quad \mu_n = \frac{n^2\pi^2}{c^2}. \tag{9}$$

Las funciones propias correspondientes son

$$X(x) = c_2 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x,\ m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{y} \quad Y(y) = c_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y,\ n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Después de sustituir los valores de (9) en la ecuación diferencial de primer orden de (6), su solución general es $T(t) = c_5 e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t}$. Una solución producto de la ecuación de calor en dos dimensiones que satisface las cuatro condiciones homogéneas de frontera es, por lo tanto,

$$u_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y,$$

donde A_{mn} es una constante arbitraria. Debido a que contamos con dos conjuntos de valores propios, ello invita a probar con el principio de superposición en la forma de una doble suma

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k[(m\pi/b)^2 + (n\pi/c)^2]t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \tag{11}$$

Se desea que en $t = 0$ la temperatura $f(x, y)$ esté representada por

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y. \tag{12}$$

El cálculo de los coeficientes A_{mn} incluidos en (12) no representa en realidad problema alguno; simplemente multiplicamos la doble suma (12) por el producto sen $(m\pi x/b)$ sen $(n\pi y/c)$ e integramos sobre el rectángulo definido por $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$. Se puede deducir que

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy. \tag{13}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valores en la frontera consta de (11) con A_{mn} definida por (13). ❑

La serie (11) con coeficientes (13) se llama **serie seno en dos variables**, o **serie doble seno**. La **serie coseno en dos variables** de una función $f(x, y)$ es un poco más compleja. Si la función f se define sobre una región rectangular determinada por $0 \le x \le b$, $0 \le y \le c$, entonces la **serie doble coseno** está dada por

$$f(x, y) = A_{00} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{m0} \cos \frac{m\pi}{b} x + \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \cos \frac{n\pi}{c} y$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y,$$

donde

$$A_{00} = \frac{1}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \, dx \, dy$$

$$A_{m0} = \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \, dx \, dy$$

$$A_{0n} = \frac{2}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy$$

$$A_{mn} = \frac{4}{bc} \int_0^c \int_0^b f(x, y) \cos \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{n\pi}{c} y \, dx \, dy.$$

Consulte el problema 2 de los ejercicios 5.8 para encontrar un problema de valores en la frontera que implica el uso de una serie doble coseno.

EJERCICIOS 5.8

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2, resuelva la ecuación de calor (1) sujeta a las condiciones dadas.

1. $u(0, y, t) = 0,\ u(\pi, y, t) = 0$
   $u(x, 0, t) = 0,\ u(x, \pi, t) = 0$
   $u(x, y, 0) = u_0$
2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = 0$
   $u(x, y, 0) = xy$

En los problemas 3 y 4, resuelva la ecuación de onda (2) sujeta a las condiciones dadas.

3. $u(0, y, t) = 0,\ u(\pi, y, t) = 0$
   $u(x, 0, t) = 0,\ u(x, \pi, t) = 0$
   $u(x, y, 0) = xy(x - \pi)(y - \pi)$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$
4. $u(0, y, t) = 0,\ u(b, y, t) = 0$
   $u(x, 0, t) = 0,\ u(x, c, t) = 0$
   $u(x, y, 0) = f(x, y)$
   $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x, y)$

En los problemas del 5 al 7, resuelva la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{14}$$

para la temperatura de estado estable $u(x, y, z)$ del paralelepípedo rectangular mostrado en la figura 5.22.

5. La parte superior ($z = c$) del paralelepípedo se mantiene a una temperatura $f(x, y)$ y los lados restantes conservan temperatura de cero.
6. La parte inferior ($z = 0$) del paralelepípedo se mantiene a una temperatura $f(x, y)$ y los lados restantes conservan temperatura de cero.

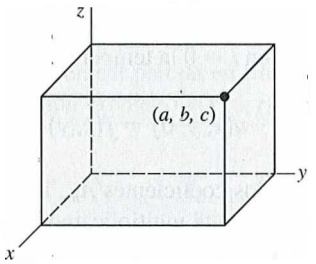


Figura 5.22 Paralelepípedo rectangular para los problemas del 5 al 7.

7. El paralelepípedo es un cubo unitario ($a = b = c = 1$) en el que el lado superior ($z = 1$) y el lado inferior ($z = 0$) se mantienen a las temperaturas constantes u_0 y $-u_0$, respectivamente, y los lados restantes conservan temperatura de cero.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas 1 y 2, mediante separación de variables, encuentre las soluciones producto $u = X(x)Y(y)$ de la ecuación diferencial que se proporciona.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. Encuentre la solución de estado estable $\psi(x)$ del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u_0, \quad -\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = u(\pi, t) - u_1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \qquad 0 < x < \pi.$$

4. Proporcione una interpretación física de las condiciones de frontera del problema 3.
5. En $t = 0$, una cuerda de longitud unitaria se estira sobre el eje positivo x. Los extremos de la cuerda, $x = 0$ y $x = 1$, están anclados al eje x en $t > 0$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la velocidad inicial $g(x)$ es la que se expresa en la figura 5.23.

Figura 5.23 Velocidad inicial, problema 5

6. La ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

es una forma de la ecuación de onda cuando, desde el extremo izquierdo, se aplica a la cuerda una fuerza vertical externa que es proporcional al cuadrado de la distancia horizontal. La cuerda se encuentra anclada en $x = 0$ una unidad por arriba del eje x y sobre el eje x en $x = 1$ en $t > 0$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la cuerda parte del reposo con un desplazamiento inicial $f(x)$.

7. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa cuadrada que ilustra la figura 5.24.

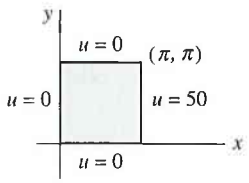


Figura 5.24 Placa cuadrada para el problema 7

8. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa seminfinita que se muestra en la figura 5.25.

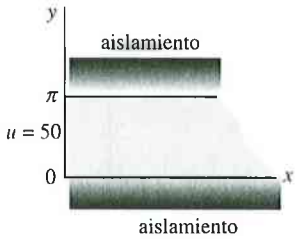


Figura 5.25 Placa seminfinita para el problema 8

9. Resuelva el problema 8 si las fronteras $y = 0$ y $y = \pi$ se mantienen a temperatura de cero en todo momento.

10. Encuentre la temperatura $u(x, t)$ de la placa infinita de ancho $2L$ mostrada en la figura 5.26 si la temperatura inicial es u_0 en toda la placa. [*Sugerencia:* $u(x, 0) = u_0$, $-L < x < L$ es una función par de x.]

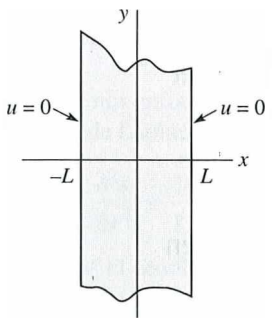


Figura 5.26 Placa infinita para el problema 10

11. *a*) Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(\pi, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi.$$

b) ¿Cuál es la solución del problema de valores en la frontera del inciso *a*), si la temperatura inicial es

$$u(x, 0) = 100 \operatorname{sen} 3x - 30 \operatorname{sen} 5x?$$

12. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 400, \quad u(\pi, t) = 200, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 400 + \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < \pi.$$

13. Calcule una solución en forma de serie del problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < \pi.$$

No trate de evaluar los coeficientes de la serie.

14. La concentración $c(x, t)$ de una sustancia que se difunde en un medio y se calienta mediante las corrientes de dicho medio satisface la ecuación diferencial parcial

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - h\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

donde k y h son constantes. Resuelva la ecuación diferencial parcial sujeta a

$$c(0, t) = 0, \quad c(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$c(x, 0) = c_0, \quad 0 < x < 1,$$

donde c_0 es una constante.

Por Dayet

CAPÍTULO

6

Problemas de valores en la frontera en otros sistemas coordenados

Estructura del capítulo

6.1 Problemas en coordenadas polares
6.2 Problemas en coordenadas polares y cilíndricas: funciones de Bessel
6.3 Problemas en coordenadas esféricas: polinomios de Legendre
Ejercicios de repaso del capítulo 6

En el capítulo anterior utilizamos las series de Fourier para resolver problemas de valores en la frontera descritos mediante el sistema coordenado cartesiano, o rectangular. En este capítulo, finalmente pondremos en práctica la teoría de la serie de Fourier-Bessel (sección 6.2) y de la serie de Fourier-Legendre (sección 6.3) para resolver problemas de valores en la frontera descritos en coordenadas cilíndricas o en coordenadas esféricas.

6.1 Problemas en coordenadas polares

Introducción Todos los problemas de valores en la frontera estudiados hasta el momento se han expresado en términos de coordenadas rectangulares. Sin embargo, si deseáramos calcular la temperatura presente en un disco circular, en un disco cilíndrico o en una esfera, naturalmente que trataríamos de describir los problemas en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas, respectivamente.

Como en esta sección solamente consideramos problemas que involucran temperaturas en estado estable en coordenadas polares, lo primero que debemos hacer es convertir la ya familiar ecuación de Laplace dada en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Laplaciano en coordenadas polares Las relaciones que existen entre las coordenadas polares en el plano y las coordenadas rectangulares están dadas por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{y} \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

Vea la figura 6.1. El primer par de ecuaciones transforma las coordenadas polares (r, θ) en coordenadas rectangulares (x, y); el segundo par de ecuaciones nos permite transformar coordenadas rectangulares en coordenadas polares. Estas ecuaciones también hacen posible la conversión del laplaciano bidimensional de la función u, $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, a coordenadas polares. Se invita al lector a desarrollar detalladamente los cálculos de la regla de la cadena y demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{sen}^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} \tag{2}$$

Mediante la suma de (1) y (2) y la simplificación obtenemos el laplaciano de u en coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

En esta sección solamente nos enfocaremos en los problemas de valores en la frontera que involucren a la ecuación de Laplace en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{3}$$

Nuestro primer ejemplo es el problema de Dirichlet aplicado a un disco. Deseamos resolver la ecuación de Laplace (3) para encontrar la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en un disco o placa circular de radio c cuando la temperatura de la circunferencia es $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. Consulte la figura 6.2. Se supone que dos lados de la placa se encuentran aislados. Este problema aparentemente simple es diferente a cualquiera de los ejemplos estudiados en el capítulo anterior.

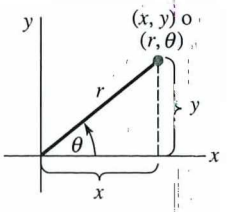


Figura 6.1 Las coordenadas polares de un punto (x, y) son (r, θ)

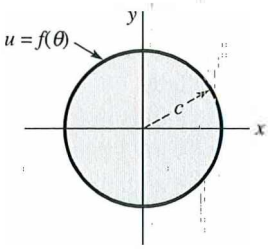


Figura 6.2 El problema de Dirichlet aplicado a un círculo

Ejemplo 1 Temperaturas estables en una placa circular

Resuelva la ecuación de Laplace (3) sujeta a $u(c, \theta) = f(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$.

Solución Antes de intentar la separación de variables, podemos observar que la única condición de frontera es no homogénea. En otras palabras, no existen condiciones explícitas en el enunciado del problema que nos permitan determinar los coeficientes de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias por separado o los valores propios requeridos. Sin embargo, hay algunas condiciones implícitas.

En primera instancia, nuestra intuición nos lleva a esperar que la temperatura $u(r, \theta)$ sea continua y, por ende, acotada dentro de un círculo $r = c$. Además, la temperatura $u(r, \theta)$ debe tener un solo valor, lo cual significa que el valor de u debe ser el mismo en un punto específico del círculo sin importar la descripción polar de dicho punto. Como $(r; \theta + 2\pi)$ es una descripción equivalente del punto (r, θ), debemos tener $u(r; \theta) = u(r; \theta + 2\pi)$. Esto es, $u(r, \theta)$ debe ser periódica en θ con periodo de 2π. Si estamos buscando una solución producto $u = R(r)\Theta(\theta)$, entonces es necesario que $\Theta(\theta)$ sea periódica en 2π.

Con todo lo anterior en mente, optamos por escribir la constante de separación en la separación de variables como λ:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

Las ecuaciones separadas son, por lo tanto,

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{4}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{5}$$

Estamos buscando una solución al problema

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi). \tag{6}$$

A pesar de que (6) no es un problema normal de Sturm-Liouville, el problema genera valores propios y funciones propias. Estas últimas forman un conjunto ortogonal en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De las tres soluciones generales posibles de (5),

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta, \qquad \lambda = 0 \tag{7}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cosh \alpha\theta + c_2 \operatorname{senh} \alpha\theta, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{8}$$

$$\Theta(\theta) = c_1 \cos \alpha\theta + c_2 \operatorname{sen} \alpha\theta, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0 \tag{9}$$

podemos eliminar (8) como inherentemente no periódica a menos que $c_1 = c_2 = 0$. De manera similar, la solución (7) es no periódica a menos que definamos $c_2 = 0$. A la solución constante que permanece $\Theta(\theta) = c_1$, $c_1 \neq 0$, puede asignársele cualquier periodo; y así $\lambda = 0$ es un valor propio. Por último, la solución (9) será periódica en 2π si tomamos $\alpha = n$, donde $n = 1, 2, \ldots$.* Los valores propios de (6) son entonces $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Si hacemos que $\lambda_0 = 0$ corresponda con $n = 0$, las funciones propias de (6) son

$$\Theta(\theta) = c_1, \ n = 0 \quad \text{y} \quad \Theta(\theta) = c_1 \cos n\theta + c_2 \operatorname{sen} n\theta, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Cuando $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ las soluciones de la ecuación diferencial de Cauchy-Euler (4) son

$$R(r) = c_3 + c_4 \ln r, \ n = 0, \tag{10}$$

$$R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Ahora observe en (11) que $r^{-n} = 1/r^n$. En cualquiera de las soluciones (10) y (11) debemos definir $c_4 = 0$ con la finalidad de garantizar que la solución u esté acotada en el centro de la placa (el cual es $r = 0$). Así, las soluciones producto $u_n = R(r)\Theta(\theta)$ para la ecuación de Laplace en coordenadas polares son

$$u_0 = A_0, \ n = 0 \quad \text{y} \quad u_n = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta), \ n = 1, 2, \ldots,$$

*Por ejemplo, observe que $\cos n(\theta + 2\pi) = \cos(n\theta + 2n\pi) = \cos n\theta$.

donde hemos sustituido c_3c_1 por A_0 para $n = 0$ y por A_n para $n = 1, 2, \ldots$; la combinación c_3c_2 se ha sustituido por B_n. Por lo tanto, a partir del principio de superposición obtenemos

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{12}$$

Al aplicar la condición de frontera en $r = c$ al resultado de (12), es posible reconocer

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c^n(A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$$

como una expansión de f en una serie de Fourier completa. En consecuencia, podemos expresar las igualdades

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c^n A_n = a_n \quad \text{y} \quad c^n B_n = b_n.$$

Esto es,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \tag{13}$$

$$A_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta \tag{14}$$

$$B_n = \frac{1}{c^n \pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} \theta\, d\theta. \tag{15}$$

La solución al problema consta de la serie dada en (12), donde los coeficientes A_0, A_n y B_n se definen en (13), (14) y (15). ❑

En el ejemplo 1 observe que, correspondiendo a cada valor propio *positivo*, $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, \ldots$, existen dos funciones propias diferentes, las cuales son $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$. En este caso, los valores propios a veces son denominados **valores propios dobles**.

Ejemplo 2 Temperaturas estables en una placa semicircular

Encontrar la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ en la placa semicircular que se muestra en la figura 6.3.

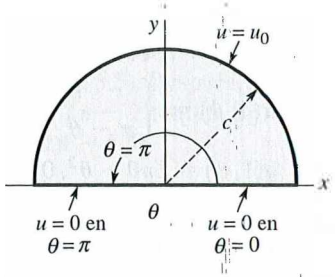


Figura 6.3 Placa semicircular del ejemplo 2

Solución El problema de valores en la frontera es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \pi) = 0, \quad 0 < r < c.$$

Al definir $u = R(r)\Theta(\theta)$ y separar variables obtenemos

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

y

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{16}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{17}$$

Las condiciones homogéneas que se especifican en las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ se trasladan a $\Theta(0) = 0$ y $\Theta(\pi) = 0$. Estas condiciones junto con la ecuación (17) constituyen un problema normal de Sturm-Liouville:

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \ \Theta(0) = 0, \ \Theta(\pi) = 0. \tag{18}$$

Este problema tan conocido* tiene valores propios $\lambda_n = n^2$ y funciones propias $\Theta(\theta) = c_2 \operatorname{sen} n\theta$, $n = 1, 2, \ldots$. Asimismo, al reemplazar λ por n^2 la solución de (16) es $R(r) = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$. En el razonamiento utilizado en el ejemplo 1, esperábamos que una solución u del problema que estuviera acotada en $r = 0$ nos sugiriera definir $c_4 = 0$. Por lo tanto, $u_n = R(r)\Theta(\theta) = A_n r^n \operatorname{sen} n\theta$ y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \operatorname{sen} n\theta.$$

La condición de frontera que permanece en $r = c$ nos da la serie seno

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n c^n \operatorname{sen} n\theta.$$

En consecuencia,

$$A_n c^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0 \operatorname{sen} n\theta \, d\theta,$$

y, por lo tanto,

$$A_n = \frac{2u_0}{\pi c^n} \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

De modo que la solución del problema está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \left(\frac{r}{c}\right)^n \operatorname{sen} n\theta. \qquad \square$$

*El problema (18) es el mismo del ejemplo 2 tratado en la sección 3.9 del tomo I con $L = \pi$.

EJERCICIOS 6.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-17.

En los problemas del 1 al 4, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa circular de radio $r = 1$ si la temperatura de la circunferencia es la que se proporciona.

1. $u(1, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$
2. $u(1, \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < \theta < \pi \\ \pi - \theta, & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$
3. $u(1, \theta) = 2\pi\theta - \theta^2, 0 < \theta < 2\pi$
4. $u(1, \theta) = \theta, 0 < \theta < 2\pi$
5. Resuelva el problema exterior de Dirichlet de una placa circular de radio c si $u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < 2\pi$. En otras palabras, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa que coincide con todo el plano xy en el cual se ha recortado un agujero de radio c alrededor del origen, y la temperatura en la circunferencia del agujero es $f(\theta)$. [*Sugerencia:* Suponga que la temperatura u está acotada por $r \to \infty$.]
6. Resuelva el problema de Neumann para el caso de un disco:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < r < c$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=c} = f(\theta), 0 < \theta < 2\pi.$$

Proporcione la condición de compatibilidad. [*Sugerencia:* Consulte el problema 21 de los ejercicios 5.5.]

7. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ del anillo que muestra la figura 6.4. [*Sugerencia:* Proceda igual que en el ejemplo 1.]

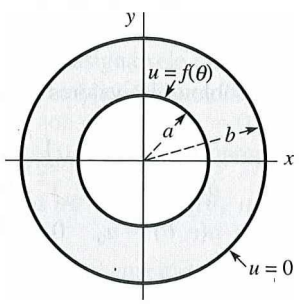


Figura 6.4 Anillo del problema 7

8. Si las condiciones de frontera para el anillo de la figura 6.4 son $u(a, \theta) = u_0$, $u(b, \theta) = u_1$, $0 < \theta < 2\pi$, u_0 y u_1 son constantes, demuestre que la temperatura de estado estable está dada por

$$u(r, \theta) = \frac{u_0 \ln(r/b) - u_1 \ln(r/a)}{\ln(a/b)}$$

[*Sugerencia:* Pruebe con una solución de la forma $u(r, \theta) = v(r, \theta) + \psi(r)$.]

9. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ del anillo circular que muestra la figura 6.4 si las condiciones de frontera son

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, u(b, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < 2\pi.$$

10. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa de cuarto de círculo que muestra la figura 6.5.

11. Si las fronteras $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ de la figura 6.5 están aisladas, tenemos entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

Determine la temperatura de estado estable si

$$u(c, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi/4 \\ 0, & \pi/4 < \theta < \pi. \end{cases}$$

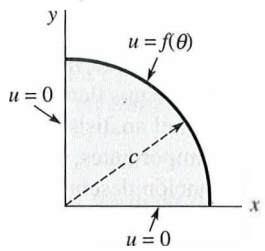


Figura 6.5 Placa de cuarto de círculo para el problema 10

12. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa infinita en forma de cuña que muestra la figura 6.6. [*Sugerencia:* Suponga que la temperatura está acotada a medida que $r \to 0$ y $r \to \infty$.]

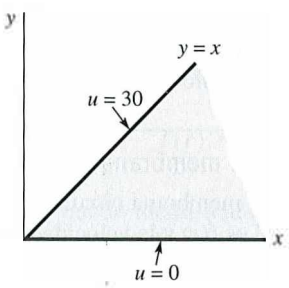


Figura 6.6 Placa infinita para el problema 12

13. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de un anillo semicircular si

$$u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta), \; u(b, \theta) = 0, \; 0 < \theta < \pi$$
$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \; a < r < b.$$

14. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio $r = 1$ si

$$u(1, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi$$
$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = u_0, \quad 0 < r < 1,$$

donde u_0 es una constante.

15. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio $r = 2$ si

$$u(2, \theta) = \begin{cases} u_0, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi, \end{cases}$$

donde u_0 es una constante y las orillas $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ están aisladas.

Tareas para el laboratorio de cómputo

16. *a*) Encuentre la solución de la serie para $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 cuando

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(Consulte el problema 1.)

b) Utilice un CAS, o una herramienta de graficación, para elaborar la gráfica de la suma parcial $S_5(r, \theta)$ que consta de los primeros cinco términos diferentes de cero de la solución encontrada en el inciso *a*) para $r = 0.9$, $r = 0.7$, $r = 0.5$, $r = 0.3$ y $r = 0.1$. Sobreponga las gráficas en los mismos ejes coordenados.

c) Aproxime las temperaturas $u(0.9, 1.3)$, $u(0.7, 2)$, $u(0.5, 3.5)$, $u(0.3, 4)$, $u(0.1, 5.5)$. Después, aproxime $u(0.9, 2\pi - 1.3)$, $u(0.7, 2\pi - 2)$, $u(0.5, 2\pi - 3.5)$, $u(0.3, 2\pi - 4)$, $u(0.1, 2\pi - 5.5)$.

d) ¿Cuál es la temperatura en el centro de la placa circular? ¿Por qué es apropiado llamarle a este valor temperatura promedio de la placa? [*Sugerencia:* Considere las gráficas del inciso *b*) y los números del inciso *c*).]

Problema de análisis

17. Considere el anillo que muestra la figura 6.4. Analice cómo puede calcularse la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ cuando las condiciones de frontera son $u(a, \theta) = f(\theta)$, $u(b, \theta) = g(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

6.2 Problemas en coordenadas polares y cilíndricas: funciones de Bessel

Introducción En esta sección vamos a considerar problemas de valores en la frontera que involucran las formas de las ecuaciones de calor y de onda en coordenadas polares y una forma de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas. Existe algo en común entre los ejemplos y ejercicios de esta sección: cada problema de valor en la frontera posee simetría radial.

Simetría radial Las ecuaciones bidimensionales de calor y de onda

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

expresadas en coordenadas polares son, a su vez,

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

donde $u = u(r, \theta, t)$. Para resolver un problema de valor en la frontera, donde se involucre cualquiera de estas ecuaciones, mediante la separación de variables debemos definir $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$. Como en la sección 5.8, este supuesto nos lleva a series infinitas múltiples. Observe el problema 15 de los ejercicios 6.2. En el análisis desarrollado a continuación se considerarán los más simples, pero también importantes, problemas que poseen **simetría radial**, esto es, problemas en los que la función desconocida u es independiente de la coordenada angular θ. En este caso, las ecuaciones de calor y de onda presentadas en (1) toman a su vez las formas

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{y} \quad a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{2}$$

donde $u = u(r, t)$. Se dice que las vibraciones descritas mediante la segunda ecuación de (2) son **vibraciones radiales**.

El primer ejemplo tiene que ver con las vibraciones radiales no amortiguadas de una membrana circular delgada. Suponemos desplazamientos pequeños y el movimiento es tal que cada punto de la membrana se mueve en dirección perpendicular al plano xy (vibraciones transversales), esto es, el eje u es perpendicular al plano xy. Un modelo físico a tener en mente durante el análisis de este ejemplo es un tambor vibratorio.

Ejemplo 1 Vibraciones radiales de una membrana circular

Encontrar el desplazamiento $u(r, t)$ de una membrana circular de radio c, sujeta por su circunferencia, si el desplazamiento inicial es $f(r)$ y la velocidad inicial $g(r)$. Consulte la figura 6.7.

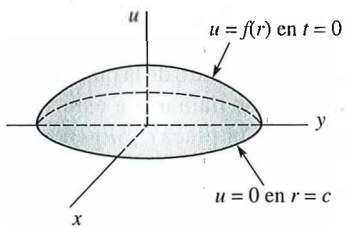


Figura 6.7 Desplazamiento inicial de la membrana circular del ejemplo 1

Solución El problema de valores en la frontera a resolver es

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0<r<c, t>0$$

$$u(c, t) = 0, \qquad t>0$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), \quad 0<r<c.$$

Al sustituir $u = R(r)T(t)$ en la ecuación diferencial parcial y separando variables obtenemos

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=\frac{T''}{a^2T}=-\lambda. \tag{3}$$

Observe en (3) que regresamos a nuestra acostumbrada constante de separación $-\lambda$. Las dos ecuaciones obtenidas a partir de (3) son

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{4}$$

y

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{5}$$

Debido a la naturaleza vibratoria del problema, la ecuación (5) sugiere que usemos solamente $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$. Ahora (4) no es una ecuación de Cauchy-Euler, pero es la ecuación diferencial paramétrica de Bessel de orden $\nu = 0$, esto es, $rR'' + R' + \alpha^2 rR = 0$. A partir de la expresión (13) dada en la sección 5.3, la solución general de la última ecuación es

$$R = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r). \tag{6}$$

La solución general de la ya conocida ecuación (5) es

$$T = c_3 \cos a\alpha t + c_4 \operatorname{sen} a\alpha t.$$

Recuerde que la función de Bessel del segundo tipo de orden cero tiene la propiedad de que $Y_0(\alpha r) \to -\infty$ conforme $r \to 0^+$, por ello el supuesto implícito de que el desplazamiento $u(r, t)$ debe estar acotado en $r = 0$ nos obliga a definir $c_2 = 0$ en (6). Por lo tanto, $R = c_1 J_0(\alpha r)$.

Como la condición de frontera $u(c, t) = 0$ es equivalente a $R(c) = 0$, debemos tener $c_1 J_0(\alpha c) = 0$. Descartamos $c_1 = 0$ (porque nos llevaría a una solución trivial de la ecuación diferencial parcial), en consecuencia

$$J_0(\alpha c) = 0. \tag{7}$$

Si $x_n = \alpha_n c$ son las raíces positivas de (7), entonces $\alpha_n = x_n/c$ y los valores propios del problema son $\lambda_n = \alpha_n^2 = x_n^2/c^2$ y las funciones propias son $c_1 J_0(\alpha_n r)$. Las soluciones producto que satisfacen la ecuación diferencial parcial y la condición limítrofe son

$$u_n = R(r)T(t) = (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t) J_0(\alpha_n r), \tag{8}$$

donde se ha llevado a cabo la acostumbrada reasignación de constantes. Por lo tanto, el principio de superposición nos da

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t) J_0(\alpha_n r). \tag{9}$$

Las condiciones iniciales dadas determinan los coeficientes A_n y B_n.

Fijamos el valor de $t = 0$ en (9) y utilizando $u(r, 0) = f(r)$ obtenemos

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\alpha_n r). \tag{10}$$

Este último resultado puede identificarse como el desarrollo de Fourier-Bessel de la función f en el intervalo $(0, c)$. De modo que mediante una comparación directa de las expresiones (7) y (10) con (7) y (15) de la sección 4.6, podemos identificar los coeficientes A_n con aquellos proporcionados en (16) de la sección 4.6:

$$A_n = \frac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)} \int_0^c r J_0(\alpha_n r) f(r)\, dr. \tag{11}$$

A continuación, diferenciamos (9) respecto a t, fijamos el valor de $t = 0$ y utilizamos $u_t(r, 0) = g(r)$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a\alpha_n B_n J_0(\alpha_n r).$$

Ésta es ahora el desarrollo de Fourier-Bessel de la función g. Por identificación del coeficiente total $a\alpha_n B_n$ con (16) de la sección 4.6 podemos escribir

$$B_n = \frac{2}{a\alpha_n c^2 J_1^2(\alpha_n c)} \int_0^c r J_0(\alpha_n r) g(r)\, dr. \tag{12}$$

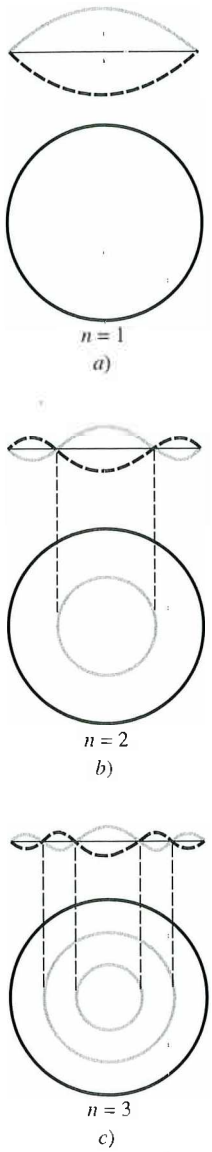


Figura 6.8 Ondas estacionarias

Por último, la solución del problema de valores en la frontera dado es la serie (9) con los coeficientes A_n y B_n definidos en (11) y (12). ❑

■ **Ondas estacionarias** De manera análoga a (8) de la sección 5.4, las soluciones producto (8) se llaman **ondas estacionarias**. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, las ondas estacionarias son, en esencia, la gráfica de $J_0(\alpha_n r)$ con la amplitud variante en el tiempo

$$A_n \cos a\alpha_n t + B_n \operatorname{sen} a\alpha_n t.$$

Las ondas estacionarias a distintos valores de tiempo se representan mediante las gráficas en línea discontinua de la figura 6.8. En el intervalo $(0, c)$, los ceros de cada onda estacionaria son las raíces de $J_0(\alpha_n r) = 0$ y corresponden al conjunto de puntos de una onda estacionaria donde no hay movimiento. A este conjunto de puntos se le llama **línea nodal**. Si (como en el ejemplo 1) las raíces positivas de $J_0(\alpha_n c) = 0$ se expresan mediante x_n, entonces $x_n = \alpha_n c$ que implica $x_n = \alpha_n / c$ y, en consecuencia, los ceros de las ondas estacionarias son determinados a partir de

$$J_0(\alpha_n r) = J_0\left(\frac{x_n}{c} r\right) = 0.$$

Ahora, en la tabla 5.2, de la página 265 del tomo I, donde se presentan los valores numéricos de J_0, J_1, Y_0 y Y_1, se observa que los primeros tres ceros positivos de J_0 son (de manera aproximada) $x_1 = 2.4$, $x_2 = 5.5$ y $x_3 = 8.7$. Por lo tanto, $n = 1$, la primera raíz positiva de

$$J_0\left(\frac{x_1}{c} r\right) = 0 \quad \text{es} \quad \frac{2.4}{c} r = 2.4 \quad \text{o} \quad r = c.$$

Como estamos buscando ceros de las ondas estacionarias en el intervalo abierto $(0, c)$, el último resultado significa que la primera onda estacionaria no tiene línea nodal. Para $n = 2$, las primeras dos raíces positivas de

$$J_0\left(\frac{x_2}{c} r\right) = 0 \text{ están determinadas a partir de } \frac{5.5}{c} r = 2.4 \text{ y } \frac{5.5}{c} r = 5.5.$$

Por lo tanto, la segunda onda estacionaria tiene una línea nodal definida por $r = x_1 c / x_2 = 2.4c/5.5$. Observe que $r \approx 0.44c < c$. Para $n = 3$, un análisis similar muestra la existencia de dos líneas nodales definidas por $r = x_1 c / x_3 = 2.4c/8.7$ y $r = x_2 c / x_3 = 5.5c/8.7$. En general, la n-ésima onda estacionaria tiene $n - 1$ líneas nodales $r = x_1 c / x_n$, $r = x_2 c / x_n, \ldots, r = x_{n-1} c / x_n$. Como $r = constante$ es la ecuación de un círculo en coordenadas polares, en la figura 6.8 vemos que las líneas nodales de una onda estacionaria son círculos concéntricos.

■ **Uso de la computadora** En el modelo resuelto en el ejemplo 1, mediante el uso de la herramienta de animación de un CAS, es posible observar el efecto de un solo tambor. En el problema 14 de los ejercicios 6.2 se pide al lector calcular la solución dada en (6) cuando

$$c = 1, f(r) = 0 \quad \text{y} \quad g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1 \end{cases}$$

Algunas tomas de la "película" del tambor vibrador se muestran en la figura 6.9.

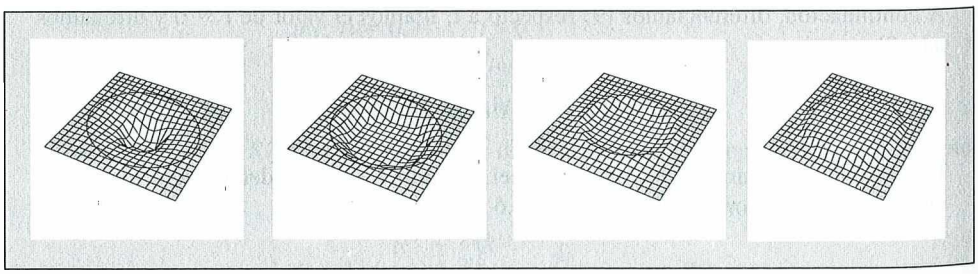


Figura 6.9 Tomas de "película" en un CAS

■ **El laplaciano en coordenadas cilíndricas** En la figura 6.10 podemos observar que la relación entre las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio y sus coordenadas rectangulares está dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = z.$$

A partir de la deducción del laplaciano en coordenadas polares (vea la sección 6.1), de inmediato es posible deducir que el laplaciano de una función u en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

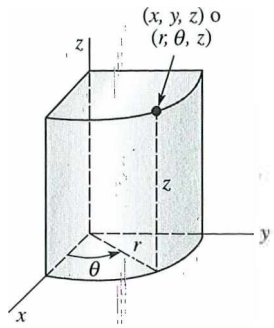


Figura 6.10 Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son (r, θ, z)

Ejemplo 2 Temperaturas estables en un cilindro circular

Encontrar la temperatura de estado estable en el cilindro circular que muestra la figura 6.11.

Solución Las condiciones de frontera sugieren que la temperatura u posee simetría radial. De acuerdo con eso, $u(r, z)$ se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 2, 0 < z < 4$$

$$u(2, z) = 0, \quad 0 < z < 4$$

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, 4) = u_0, \quad 0 < r < 2.$$

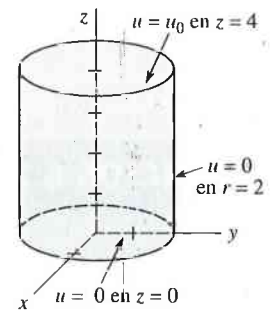


Figura 6.11 Cilindro finito del ejemplo 2

Utilizamos $u = R(r)Z(z)$ y separamos variables para obtener

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda. \tag{13}$$

y

$$rR'' + R' + \lambda rR = 0 \tag{14}$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \tag{15}$$

Mediante la selección de $\lambda = \alpha^2 > 0$, $\alpha > 0$, la solución de (14) es

$$R(r) = c_1 J_0(\alpha r) + c_2 Y_0(\alpha r),$$

y, puesto que la solución de (15) está definida en el intervalo finito $[0, 2]$, escribimos su solución general como

$$Z(z) = c_3 \cosh \alpha z + c_4 \operatorname{senh} \alpha z.$$

Así como en el ejemplo 1, el supuesto de que la temperatura u está acotada en $r = 0$ obliga a que $c_2 = 0$. La condición $u(2, z) = 0$ implica que $R(2) = 0$. Esta ecuación,

$$J_0(2\alpha) = 0, \tag{16}$$

define los valores propios positivos $\lambda_n = \alpha_n^2$ del problema. Por último, $Z(0) = 0$ implica que $c_3 = 0$. Entonces tenemos $R = c_1 J_0(\alpha_n r)$, $Z = c_4 \operatorname{senh} \alpha_n z$,

$$u_n = R(r)Z(z) = A_n \operatorname{senh} \alpha_n z J_0(\alpha_n r)$$

y

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \alpha_n z J_0(\alpha_n r).$$

La condición de frontera restante en $z = 4$ nos da entonces la serie de Fourier-Bessel

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_0(\alpha_n r),$$

de tal forma que, en vista de (16), los coeficientes están definidos por la expresión (16) de la sección 4.6,

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{2u_0}{2^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^2 r J_0(\alpha_n r)\, dr.$$

Para evaluar la última integral, primero utilizamos la sustitución $t = \alpha_n r$; seguida de $\frac{d}{dt}[tJ_1(t)] = tJ_0(t)$. A partir de

$$A_n \operatorname{senh} 4\alpha_n = \frac{u_0}{2\alpha_n^2 J_1^2(2\alpha_n)} \int_0^{2\alpha_n} \frac{d}{dt}[tJ_1(t)]dt = \frac{u_0}{\alpha_n J_1(2\alpha_n)},$$

obtenemos

$$A_n = \frac{u_0}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}.$$

Por último, la temperatura del cilindro es

$$u(r, z) = u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh} \alpha_n z}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)} J_0(\alpha_n r). \qquad \square$$

EJERCICIOS 6.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

1. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ del ejemplo 1 si $f(r) = 0$ y a la membrana circular se le imprime una velocidad inicial con dirección hacia arriba.
2. Una membrana circular de radio unitario está sujeta a lo largo de su circunferencia. Encuentre el desplazamiento $u(r, t)$ si la membrana se empieza a mover desde el reposo con un desplazamiento inicial $f(r) = 1 - r^2$, $0 < r < 1$. [*Sugerencia:* Consulte el problema 10 de los ejercicios 4.6.]
3. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ en el cilindro del ejemplo 2 si las condiciones de frontera son $u(2, z) = 0$, $0 < z < 4$, $u(r; 0) = u_0$, $u(r; 4) = 0$, $0 < r < 2$.
4. Si la cara lateral del cilindro del ejemplo 2 está aislada, entonces

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2} = 0, \quad 0 < z < 4.$$

   a) Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, z)$ cuando $u(r; 4) = f(r)$, $0 < r < 2$.

   b) Demuestre que la temperatura de estado estable determinada en el inciso *a*) se simplifica a $u(r; z) = u_0 z/4$ cuando $f(r) = u_0$. [*Sugerencia:* Utilice (11) de la sección 4.6.]
5. La temperatura de una placa circular con radio c está determinada a partir del problema de valor en la frontera

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < c, t > 0$$
$$u(c, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(r; 0) = f(r), \quad 0 < r < c.$$

   Despeje $u(r; t)$.
6. Resuelva el problema 5 si la orilla $r = c$ de la placa se encuentra aislada.
7. Cuando existe transferencia de calor desde la pared lateral de un cilindro infinito de radio unitario (vea la figura 6.12) hacia el medio circundante con temperatura de cero, la temperatura dentro del cilindro está determinada por

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -hu(1, t), \quad h > 0, t > 0$$
$$u(r; 0) = f(r), \quad 0 < r < 1.$$

   Despeje $u(r; t)$.

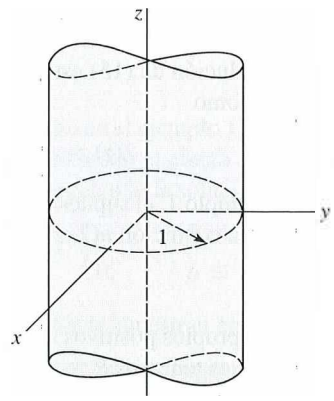


Figura 6.12 Cilindro infinito del problema 7

8. Determine la temperatura de estado estable $u(r; z)$ para un cilindro semiinfinito de radio unitario ($z \geq 0$) cuando existe transferencia de calor desde la cara lateral hacia el medio circundante con temperatura de cero y si la temperatura de la base $z = 0$ se mantiene constante como u_0.

9. Una placa circular está compuesta por dos materiales distintos en forma de círculos concéntricos. Consulte la figura 6.13. En la placa, la temperatura está determinada por el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 2, t > 0$$

$$u(2, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = \begin{cases} 200, & 0 < r < 1 \\ 100, & 1 < r < 2. \end{cases}$$

Encuentre el valor de $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Sea $u(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$.]

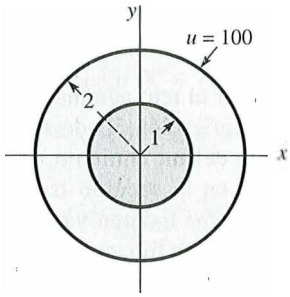


Figura 6.13 Placa circular del problema 9

10. Resuelva el problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \beta = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0, \quad \beta \text{ es una constante}$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

11. El desplazamiento horizontal $u(x, t)$ de una pesada cadena de longitud L que oscila en un plano vertical satisface la ecuación diferencial parcial

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \; 0 < x < L, t > 0.$$

Vea la figura 6.14.

a) Utilice $-\lambda$ como constante de separación para demostrar que la ecuación diferencial ordinaria en la variable espacial x es $xX'' + X' + \lambda X = 0$. Resuelva esta ecuación mediante la sustitución $x = \tau^2/4$.

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para resolver la ecuación diferencial parcial dada y sujeta a

$$u(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

[*Sugerencia:* Suponga que las oscilaciones en el extremo libre $x = 0$ son finitas.]

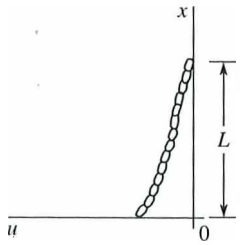


Figura 6.14 Cadena oscilatoria del problema 11

12. En este problema consideramos el caso general (esto es, dependiente de θ) de una membrana circular vibratoria de radio c:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < c, t > 0$$

$$u(c, \theta, t) = 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, t > 0$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta), 0 < r < c, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r, \theta), \quad 0 < r < c, 0 < \theta < 2\pi.$$

a) Suponga que $u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ y las constantes de separación son $-\lambda$ y $-\nu$. Demuestre que las ecuaciones diferenciales separadas son

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \; \Theta'' + \nu\Theta = 0$$

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - \nu)R = 0.$$

b) Con $\lambda = \alpha^2$ y $\nu = \beta^2$ resuelva las ecuaciones separadas del inciso *a*).

c) Demuestre que los valores propios y las funciones propias del problema son los siguientes:

Valores propios: $\nu = n, n = 0, 1, 2, \ldots$;

funciones propias: $1, \cos n\theta, \text{sen } n\theta$.

Valores propios: $\lambda_{ni} = x_{ni}/c, i = 1, 2, \ldots$, donde, para cada n, x_{ni} son las raíces positivas de $J_n(\lambda c) = 0$; funciones propias: $J_n(\lambda_{ni} r) = 0$.

d) Utilice el principio de superposición para determinar la solución de series múltiples. No evalúe los coeficientes.

Tareas para el laboratorio de cómputo

13. *a*) Considere el ejemplo 1 con $a = 1, c = 10, g(r) = 0$, y $f(r) = 1 - r/10, 0 < r < 10$. Utilice un CAS como ayuda para encontrar los valores numéricos de los primeros tres valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ del problema de valor en la frontera y los primeros tres coeficientes A_1, A_2, A_3 de la solución $u(r, t)$ dada en (6). Escriba la tercera suma parcial $S_3(r, t)$ de la solución serie.

b) Utilice un CAS para trazar la gráfica de $S_3(r, t)$ para $t = 0, 4, 10, 12, 20$.

14. Resuelva el problema 5 bajo las condiciones de frontera $u(c, t) = 200$, $u(r, 0) = 0$. En estas condiciones esperaríamos de manera intuitiva que en cualquier punto interior de la placa, $u(r, t) \to 200$ conforme $t \to \infty$. Suponga $c = 10$ y que la placa es de hierro fundido, entonces $k = 0.1$ (aproximadamente). Utilice un CAS como ayuda para encontrar los valores numéricos de los primeros cinco valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ del problema de valor en la frontera y de los cinco coeficientes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en la solución $u(r, t)$. Exprese la solución aproximada correspondiente por medio de $S_5(r, t)$. Grafique $S_5(5, t)$ y $S_5(0, t)$ en un intervalo lo suficientemente grande $0 \le t \le T$. Utilice las gráficas de $S_5(5, t)$ y $S_5(0, t)$ para estimar los tiempos (en segundos) para los cuales $u(5, t) \approx 100$ y $u(0, t) \approx 100$. Repita para $u(5, t) \approx 200$ y $u(0, t) \approx 200$.

15. Considere un tambor idealizado que consista en una delgada membrana estirada sobre un marco circular de radio unitario. Cuando se golpea el tambor en su centro, escuchamos un sonido descrito con frecuencia como un ruido sordo más que como un tono melódico. Podemos modelar un golpe del tambor utilizando el problema de valor en la frontera resuelto en el ejemplo 1.

   a) Encuentre la solución $u(r, t)$ dada en (6) cuando $c = 1$, $f(r) = 0$, y

$$g(r) = \begin{cases} -v_0, & 0 \le r < b \\ 0, & b \le r < 1. \end{cases}$$

   b) Demuestre que la frecuencia de la onda estacionaria $u_n(r, t)$ es $f_n = a\lambda_n/2\pi$, es λ_n donde λ_n es el n-ésimo cero positivo de $J_0(x)$. A diferencia del resultado de la ecuación de onda unidimensional estudiada en la sección 5.4, las frecuencias no son enteros múltiplos de la frecuencia fundamental f_1. Demuestre que $f_2 \approx 2.295 f_1$ y $f_3 \approx 3.598 f_1$. Decimos que el sonido producido por el tambor genera **sobretonos no armónicos**. Como consecuencia, la función de desplazamiento $u(r, t)$ es no periódica, y así nuestro tambor ideal no puede generar un tono sostenido.

   c) Sean $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$ y $v_0 = 1$ en la solución del inciso *a*). Utilice un CAS para graficar la quinta suma parcial $S_5(r, t)$ para los tiempos $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 5.9, 6.0$ en el intervalo $-1 \le r \le 1$. Use la herramienta de animación de su sistema de cómputo para generar una "película" de estas vibraciones.

   d) Para hacer el reto aún mayor, utilice las herramientas de graficación 3D de su CAS para realizar una película del movimiento del tambor circular que aparece en la sección transversal del inciso *c*). [*Sugerencia:* Existen varias maneras de proceder. Para un tiempo fijo, grafique ya sea u en función de x y y utilizando $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ o utilice la función equivalente en el programa *Mathematica* llamada **CylindricalPlot3D**.]

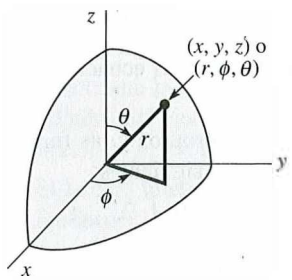


Figura 6.15 Las coordenadas esféricas del punto (x, y, z) son (r, θ, ϕ)

6.3 Problemas en coordenadas esféricas: polinomios de Legendre

Introducción En esta sección continuamos nuestro análisis de los problemas de valores en la frontera en diferentes sistemas coordenados. Aquí vamos a analizar problemas que involucren las ecuaciones de calor, de onda y de Laplace en coordenadas esféricas.

Laplaciano en coordenadas esféricas Tal como indica la figura 6.15, un punto en el espacio tridimensional se describe en términos de coordenadas rectangulares y esféricas. Las coordenadas rectangulares x, y y z del punto se encuentran relacionadas con sus coordenadas esféricas r, θ y ϕ mediante las ecuaciones

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = r\cos\theta. \tag{1}$$

Si utilizamos las ecuaciones incluidas en (1), es posible demostrar que en el sistema de coordenadas esféricas el laplaciano $\nabla^2 u$ es

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{2}$$

Como usted se podrá imaginar, los problemas involucrados con la ecuación (1) pueden resultar muy complejos. En consecuencia, solamente se considerarán algunos de los problemas más sencillos que sean independientes del ángulo azimutal ϕ.

Nuestro primer ejemplo es el problema de Dirichlet para una esfera.

Ejemplo 1 Temperaturas estables en una esfera

Calcular la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ para la esfera que se muestra en la figura 6.16.

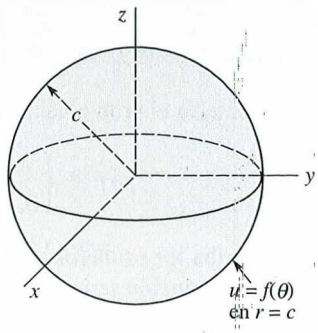


Figura 6.16 Problema de Dirichlet para la esfera del ejemplo 1

Solución La temperatura está determinada a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \; 0 < r < c, \; 0 < \theta < \pi$$

$$u(c, \theta) = f(\theta), \qquad 0 < \theta < \pi.$$

Si $u = R(r)\Theta(\theta)$, la ecuación diferencial parcial se separa como

$$\frac{r^2R'' + 2rR'}{R} = -\frac{\Theta'' + \cot\theta\,\Theta'}{\Theta} = \lambda,$$

por lo que

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0 \tag{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta\,\Theta'' + \cos\theta\,\Theta' + \lambda \operatorname{sen}\theta\,\Theta = 0. \tag{3}$$

Después de sustituir $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, (3) se convierte en

$$(1 - x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \lambda\Theta = 0, \; -1 \le x \le 1. \tag{4}$$

Esta última ecuación es una forma de la ecuación de Legendre (consulte el problema 36 de los ejercicios 5.3). Ahora las únicas soluciones de (4) que son continuas y tienen derivadas continuas en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ son los polinomios de Legendre $P_n(x)$ correspondientes a $\lambda^2 = n(n + 1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Por lo tanto, hacemos que las soluciones de (3) sean

$$\Theta = P_n(\cos\theta).$$

Además, cuando $\lambda = n(n + 1)$, la solución general de la ecuación de Cauchy-Euler (2) es

$$R = c_1r^n + c_2r^{-(n+1)}.$$

Como de nuevo esperamos que $u(r, \theta)$ esté acotada en $r = 0$, definimos $c_2 = 0$. Entonces $u_n = A_nr^nP_n(\cos\theta)$, y

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nr^nP_n(\cos\theta).$$

En $r = c$,

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nc^nP_n(\cos\theta).$$

Por lo tanto, A_nc^n son los coeficientes de la serie de Fourier-Legendre (23) de la sección 4.5:

$$A_n = \frac{2n + 1}{2c^n}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta.$$

Se deduce que la solución es

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n + 1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad \square$$

EJERCICIOS 6.3

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

1. Resuelva el problema del ejemplo 1 si

$$f(\theta) = \begin{cases} 50, & 0 < \theta < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

Escriba los primeros cuatro términos diferentes de cero de la solución serie. [*Sugerencia:* Vea el ejemplo 3 de la sección 4.6.]

2. La solución $u(r, \theta)$ del ejemplo 1 pudo interpretarse también como el potencial dentro de la esfera debido a una distribución de carga $f(\theta)$ en su superficie. Calcule el potencial fuera de la esfera.

3. Encuentre la solución del problema del ejemplo 1 si $f(\theta) = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia:* $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. Utilice la ortogonalidad.]

4. Encuentre la solución del problema del ejemplo 1 si $f(\theta) = 1 - \cos 2\theta$, $0 < \theta < \pi$. [*Sugerencia:* Consulte el problema 16, ejercicios 4.6.]

5. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ dentro de una esfera hueca $a < r < b$ si la superficie interna $r = a$ se mantiene a temperatura $f(\theta)$ y su superficie externa $r = b$ se mantiene a cero grados. El primer octante de la esfera aparece en la figura 6.17.

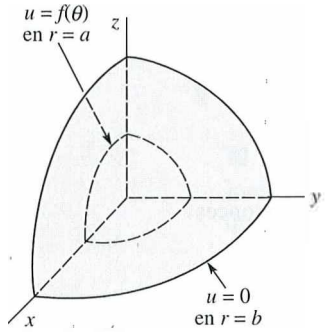


Figura 6.17 Esfera hueca del problema 5

6. La temperatura de estado estable para un hemisferio de radio $r = c$ se determina mediante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, 0 < r < c, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$u\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, 0 < r < c$$

$$u(c, \theta) = f(\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Despeje $u(r, \theta)$. [*Sugerencia:* $P_n(0) = 0$ solamente cuando n es impar. También consulte el problema 18 de los ejercicios 4.6.]

7. Resuelva el problema 6 cuando la base de la semiesfera se encuentra aislada; esto es,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\theta = \pi/2} = 0, 0 < r < c.$$

8. Resuelva el problema 6 para $r > c$.

9. La temperatura en función del tiempo dentro de una esfera con radio unitario se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$u(1, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 < r < 1.$$

Despeje $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Compruebe que el lado izquierdo de la ecuación diferencial parcial puede escribirse como $\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $ru(r, t) = v(r, t) + \psi(r)$. Utilice únicamente funciones acotadas conforme $r \to 0$.]

10. Una esfera sólida uniforme de radio 1 que tiene temperatura inicial constante u_0 se deja caer en un recipiente de grandes dimensiones que contiene un fluido a temperatura constante u_1 ($u_1 > u_0$) en todo momento. Vea la figura 6.18. Puesto que existe transferencia de calor a través de la frontera $r = 1$, la temperatura $u(r, t)$ de la esfera se determina a partir del problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = -h(u(1, t) - u_1), \quad 0 < h < 1$$

$$u(r, 0) = u_0, \quad 0 < r < 1.$$

Despeje $u(r, t)$. [*Sugerencia:* Proceda como en el problema 9.]

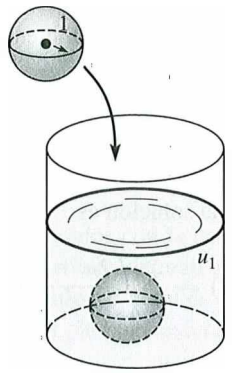


Figura 6.18 Recipiente del problema 10

11. Resuelva el problema de valores en la frontera que involucre vibraciones esféricas:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<r<c, t>0$$

$$u(c, t)=0,\quad t>0$$

$$u(r, 0)=f(r), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(r),\quad 0<r<c.$$

[*Sugerencia:* Escriba el miembro izquierdo de la ecuación diferencial parcial como $a^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$. Sea $v(r; t)=ru(r; t)$.]

12. Una esfera conductora, de radio $r=c$, está aterrizada y puesta en un campo eléctrico uniforme de intensidad E en la dirección z. El potencial $u(r, \theta)$ fuera de la esfera está determinado a partir del problema de valor en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}=0,\quad r>c, 0<\theta<\pi$$

$$u(c, \theta)=0,\quad 0<\theta<\pi$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \theta)=-Ez=-Er\cos\theta.$$

Demuestre que $u(r; \theta)=-Er\cos\theta+E\frac{c^3}{r^2}\cos\theta$.

[*Sugerencia:* Explique por qué $\int_0^{\pi}\cos\theta\, P_n(\cos\theta)\,\text{sen}\,\theta\, d\theta=0$ para todos los enteros no negativos excepto $n=1$. Consulte la expresión (24) en la sección 4.6.]

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

En los problemas 1 y 2, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa circular de radio c cuando la temperatura de la circunferencia es como se indica.

1. $u(c, \theta)=\begin{cases} u_0, & 0<\theta<\pi \\ -u_0, & \pi<\theta<2\pi \end{cases}$

2. $u(c, \theta)=\begin{cases} 1, & 0<\theta<\pi/2 \\ 0, & \pi/2<\theta<3\pi/2 \\ 1, & 3\pi/2<\theta<2\pi \end{cases}$

En los problemas 3 y 4, determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio 1 cuando las condiciones de frontera son como se indica.

3. $u(1, \theta)=u_0(\pi\theta-\theta^2), 0<\theta<\pi$

   $u(r, 0)=0, u(r, \pi)=0, 0<r<1$

4. $u(1, \theta)=\text{sen}\,\theta, 0<\theta<\pi$

   $u(r, 0)=0, u(r, \pi)=0, 0<r<1$

5. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una placa semicircular de radio c cuando las fronteras $\theta=0$ y $\theta=\pi$ están aisladas y $u(c, \theta)=f(\theta), 0<\theta<\pi$.

6. Encuentre la temperatura de estado estable $u(r; \theta)$ de una paca semicircular de radio c cuando la frontera $\theta=0$ se mantiene a cero grados, la frontera $\theta=\pi$ está aislada, y $u(c, \theta)=f(\theta), 0<\theta<\pi$.

En los problemas 7 y 8, encuentre la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$.

7.

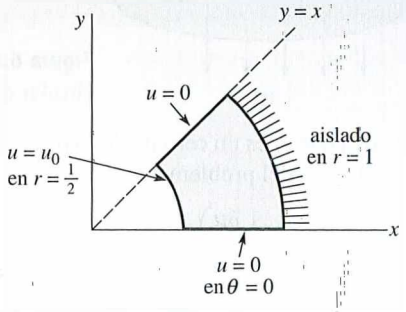


Figura 6.19 Placa del problema 7

8.

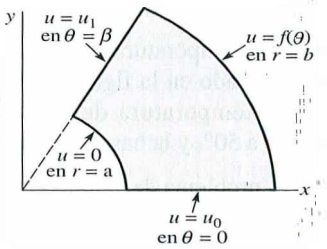


Figura 6.20 Placa del problema 8

9. Si las condiciones de frontera de un anillo definido por $1<r<2$ son

$$u(1, \theta)=\text{sen}^2\theta, \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2}=0, 0<\theta<2\pi,$$

demuestre que la temperatura de estado estable es $u(r, \theta)=\frac{1}{2}-(\frac{1}{34}r^2+\frac{8}{17}r^{-2})\cos 2\theta$. [*Sugerencia:* Consulte la figura 6.6. También, utilice la identidad $\text{sen}^2\theta=1/2(1-\cos 2\theta)$.]

10. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de la placa infinita que se muestra en la figura 6.21.

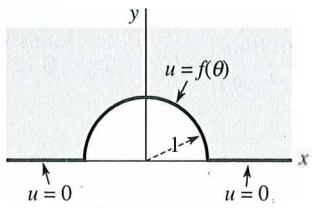


Figura 6.21 Placa infinita del problema 10

11. Suponga que se pierde calor desde las superficies planas de un disco unitario circular muy delgado hacia el ambiente que tiene temperatura de cero. Si la ley lineal de transferencia de calor es aplicada, la ecuación de calor toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, h > 0, 0 < r < 1, t > 0.$$

Vea la figura 6.22. Determine la temperatura $u(r, t)$ si la orilla $r = 1$ se mantiene a temperatura cero y si al principio la temperatura de la placa es unitaria en toda la superficie.

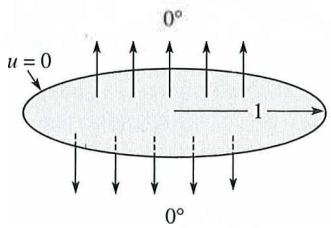


Figura 6.22 Placa circular del problema 11

12. Suponga que x_k es un cero positivo de J_0. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < r < 1, t > 0$$
$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(r, 0) = u_0 J_0(x_k r), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < r < 1$$

es $u(r, t) = u_0 J_0(x_k r) \cos a x_k t$.

13. Determine la temperatura de estado estable $u(r, z)$ del cilindro mostrado en la figura 6.11 si la cara lateral se mantiene a temperatura de cero, la superior $z = 4$ se mantiene a 50°, y la base $z = 0$ está aislada.

14. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < 1, 0 < z < 1$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, \quad 0 < z < 1$$
$$u(r, 0) = f(r), u(r, 1) = g(r), \quad 0 < r < 1.$$

15. Determine la temperatura de estado estable $u(r, \theta)$ de una esfera de radio unitario si la superficie se mantiene a

$$u(1, \theta) = \begin{cases} 100, & 0 < \theta < \pi/2 \\ -100, & \pi/2 < \theta < \pi. \end{cases}$$

[*Sugerencia:* Consulte el problema 22 de los ejercicios 4.5.]

16. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < r < 1, t > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = 0, t > 0$$
$$u(r, 0) = f(r), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(r), 0 < r < 1.$$

[*Sugerencia:* Proceda como en los problemas 9 y 10 de los ejercicios 6.3, pero establezca $v(r, t) = ru(r, t)$. Consulte la sección 5.7.]

17. La función $u(x) = Y_0(\alpha a)J_0(\alpha x) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha x)$, $a > 0$ es una solución de la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} + \alpha^2 x^2 u = 0$$

en el intervalo $a \le x \le b$. Si los valores propios $\lambda_n = \alpha_n^2$ están definidos mediante las raíces positivas de la ecuación

$$Y_0(\alpha a)J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)Y_0(\alpha b) = 0,$$

demuestre que las funciones

$$u_m(x) = Y_0(\alpha_m a)J_0(\alpha_m x) - J_0(\alpha_m a)Y_0(\alpha_m x)$$
$$u_n(x) = Y_0(\alpha_n a)J_0(\alpha_n x) - J_0(\alpha_n a)Y_0(\alpha_n x)$$

son ortogonales con respecto a la función peso $p(x) = x$ en el intervalo $[a, b]$; esto es,

$$\int_a^b x u_m(x) u_n(x)\, dx = 0, m \neq n.$$

[*Sugerencia:* Lleve a cabo el procedimiento de la página 296.]

18. Utilice los resultados del ejercicio 17 para resolver el siguiente problema de valores en la frontera para la temperatura $u(r, t)$ de un anillo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t}, a < r < b, t > 0$$
$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(r, 0) = f(r), \quad a < r < b.$$

19. Analice cómo resolver

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < r < c, 0 < z < L$$

en las condiciones de frontera que se proporcionan en la figura 6.23.

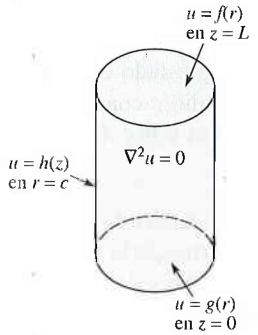


Figura 6.23 Cilindro del problema 19

20. Genere sus propios conceptos y calcule $u(r, z)$ en el problema 19. [*Sugerencia:* Repase (11) en la sección 4.5.]

Por Dayet

CAPÍTULO

7

Método de la transformada integral

Estructura del capítulo

7.1 Función de error
7.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace
7.3 Integral de Fourier
7.4 Transformadas de Fourier
7.5 Transformada rápida de Fourier
Ejercicios de repaso del capítulo 7

El método de separación de variables que empleamos en los capítulos 5 y 6 es poderoso, mas no universalmente aplicable para resolver problemas de valores en la frontera. Si la ecuación diferencial parcial que estamos tratando es no homogénea, si las condiciones de frontera son dependientes del tiempo, o si el dominio de la variable espacial es infinito $(-\infty, \infty)$, o semiinfinito (a, ∞), debemos ser capaces de utilizar una transformada integral para resolver el problema. En la sección 7.2 resolveremos problemas que involucran las ecuaciones de calor y las de onda mediante la ya conocida transformada de Laplace. En la sección 7.4 presentaremos y utilizaremos tres nuevas transformadas integrales: las transformadas de Fourier.

7.1 Función de error

Introducción En matemáticas existe una gran cantidad de funciones que se definen mediante una integral. Por ejemplo, en muchos libros de cálculo tradicionales, el logaritmo natural se define como: $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$. En capítulos anteriores ya hemos visto, aunque de manera breve, la función de error $\operatorname{erf}(x)$, la función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x)$, la función integral seno $\operatorname{Si}(x)$, la integral seno de Fresnel $S(x)$ y la función gamma $\Gamma(\alpha)$; todas estas funciones están definidas en términos de una integral. Antes de aplicar la transformada de Laplace a problemas de valores en la frontera, necesitamos conocer un poco más acerca de la función de error y de la función de error complementaria. En esta sección analizamos las gráficas y algunas de las propiedades más evidentes de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$.

Propiedades y gráficas De la ecuación (14) presentada en la sección 2.3, del tomo I, recuerde que las definiciones de **función de error** $\operatorname{erf}(x)$ y **función de error complementaria** $\operatorname{erfc}(x)$ son, respectivamente,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du \quad \text{y} \quad \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}\,du. \tag{1}$$

Con ayuda de coordenadas polares se puede demostrar que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{o} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = 1.$$

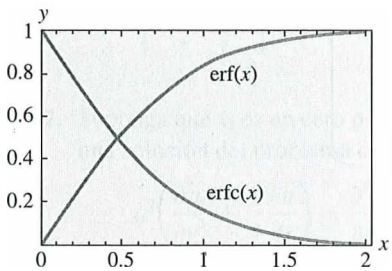


Figura 7.1 Gráficas de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ para $x \geq 0$

Por lo tanto, a partir de la propiedad del intervalo aditivo de las integrales definidas, el último resultado es lo mismo que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^x e^{-u^2}\,du + \int_x^\infty e^{-u^2}\,du\right] = 1$$

Lo anterior demuestra que $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ están relacionadas mediante la identidad

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1. \tag{2}$$

Las gráficas de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ para $x \geq 0$ están dadas en la figura 7.1. Observe que $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erfc}(0) = 1$, y que $\operatorname{erf}(x) \to 1$, $\operatorname{erfc}(x) \to 0$ conforme $x \to \infty$.

Otros valores numéricos de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ pueden obtenerse desde un CAS o mediante el uso de tablas. En las tablas, a menudo la función de error se denomina **integral de probabilidad**. El dominio de $\operatorname{erf}(x)$ y $\operatorname{erfc}(x)$ es $(-\infty, \infty)$. En el problema 11 de los ejercicios 7.1 se le solicita obtener la gráfica de cada función incluida en este intervalo y deducir algunas propiedades adicionales.

La tabla 7.1, transformadas de Laplace, será de utilidad en los ejercicios de la siguiente sección.

Tabla 7.1

$f(t), a > 0$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$f(t), a > 0$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	**4.** $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}e^{-a^2/4t} - a\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}}$
2. $\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	**5.** $e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$
3. $\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	**6.** $-e^{ab}e^{b^2t}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{be^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$

Comentarios

Las demostraciones de los resultados de la tabla 7.1 no se proporcionarán debido a que son extensas y complicadas. Por ejemplo, demostrar los enunciados 2 y 3 requiere de algunos cambios de variables y el uso del teorema de convolución. A quienes son curiosos, les sugerimos consulten *Introduction to the Laplace Transform*, por Holl, Maple y Vinograde, Appleton-Century-Crofts, 1959, páginas 142 y 143. Una variante de este tipo de demostraciones puede obtenerse resolviendo el problema 1 de los ejercicios 7.1.

EJERCICIOS 7.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-18.

1. *a*) Demuestre que $\text{erf}(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{\sqrt{\tau}}\,d\tau$.

   b) Una definición de la **función gamma** está dada por la integral impropia $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$, $\alpha > 0$.

   A partir de esta función, se puede demostrar que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, así como también que $\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \dfrac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$, $\alpha > -1$.

   De la misma manera, si se considera que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ y se utilizan las funciones anteriores se puede encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = t^{-1/2}$, $f(t) = t^{1/2}$ y $f(t) = t^{3/2}$. Los enunciados anteriores corresponden a los problemas 41 y 42 de los ejercicios 4.1 del tomo I. Utilizando el teorema de convolución y los resultados de estos problemas, demuestre que

$$\mathcal{L}\{\text{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}.$$

2. Utilice el resultado del problema 1 para demostrar que

$$\mathcal{L}\{\text{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{s+1}}\right].$$

3. Mediante el uso del problema 1, demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^t\,\text{erf}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}.$$

4. Utilice el resultado del problema 2 para demostrar que

$$\mathcal{L}\{e^t\,\text{erfc}(\sqrt{t})\} = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)}.$$

5. Sean C, G, R y x constantes. Utilice la tabla 7.1 para demostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{Cs+G}\left(1 - e^{-x\sqrt{RCs+RG}}\right)\right\} = e^{-Gt/C}\text{erf}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{RC}{t}}\right).$$

6. Sea a una constante. Demuestre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\text{senh}\,a\sqrt{s}}{s\,\text{senh}\,\sqrt{s}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\text{erf}\left(\frac{2n+1+a}{2\sqrt{t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{2n+1-a}{2\sqrt{t}}\right)\right].$$

   [*Sugerencia:* Utilice la definición exponencial del seno hiperbólico. Expanda $1/(1 - e^{-2\sqrt{s}})$ en una serie geométrica.]

7. Utilice la transformada de Laplace y la tabla 7.1 para resolver la ecuación integral

$$y(t) = 1 - \int_0^t \frac{y(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau.$$

8. Mediante el uso de los enunciados tercero y quinto de la tabla 7.1, demuestre el sexto enunciado de la misma tabla.

9. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}[\text{erf}(b) - \text{erf}(a)]$.

10. Demuestre que $\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}\,\text{erf}(a)$.

Tareas para el laboratorio de cómputo

11. Las funciones erf(x) y erfc(x) están definidas para $x < 0$. Utilice un CAS y sobreponga las gráficas de erf(x) y erfc(x) sobre los mismos ejes en $-10 \le x \le 10$. ¿Las gráficas tienen alguna simetría? Determine $\lim_{x\to-\infty}$ erf(x) y $\lim_{x\to-\infty}$ erfc(x).

7.2 Aplicaciones de la transformada de Laplace

Introducción En el capítulo 4 definimos la transformada de Laplace de una función $f(t)$, $t \ge 0$, como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt,$$

siempre que la integral impropia converja. Esta integral transforma una función $f(t)$ en otra función F del parámetro de transformación s, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. La princi-

pal aplicación de la transformada de Laplace en el capítulo 4 fue la solución de ciertos tipos de problemas de valor inicial que involucraban ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes. Recuerde que en tales ecuaciones la transformada de Laplace reduce la ecuación diferencial ordinaria a una ecuación algebraica. En esta sección vamos a aplicar la transformada de Laplace a ecuaciones diferenciales parciales lineales. Veremos que esta transformada reduce una ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria.

■ **Transformada de derivadas parciales** Los problemas de valores en la frontera que se estudian en esta sección involucran las ecuaciones de calor y las de onda en una dimensión, o ligeras variaciones de estas ecuaciones. Dichas ecuaciones diferenciales parciales involucran una función desconocida de dos variables independientes $u(x, t)$, donde la variable t representa el tiempo $t \geq 0$. Definimos la transformada de Laplace de $u(x, t)$ respecto a t usando la expresión

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-st}u(x, t)\, dt = U(x, s),$$

donde x recibe el tratamiento de un parámetro. A lo largo de esta sección se supondrá que todas las propiedades operativas de las secciones 4.3 y 4.4 del tomo I, se aplican a funciones de dos variables. Por ejemplo, mediante el teorema 4.4, también del tomo I, que habla sobre la transformada de una derivada y que establece que si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0, \infty)$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

A partir de lo anterior, puede establecerse que la transformada de la derivada parcial $\partial u/\partial t$ es

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = s\mathcal{L}\{u(x, t)\} - u(x, 0);$$

esto es,
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x, s) - u(x, 0). \tag{1}$$

De manera similar,
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{2}$$

Como estamos realizando una transformación respecto a t, suponemos que es legítimo intercambiar la integración y la diferenciación en la transformada de $\partial^2u/\partial x^2$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[e^{-st}u(x, t)\right] dt$$
$$= \frac{d^2}{dx^2}\int_0^\infty e^{-st}u(x, t)\, dt = \frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}\{u(x, t)\};$$

esto es,
$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2U}{dx^2}. \tag{3}$$

En vista de (1) y (2) podemos observar que la transformada de Laplace resulta adecuada en problemas con condiciones iniciales, es decir, problemas asociados con la ecuación de calor o la ecuación de onda.

Ejemplo 1 La transformada de Laplace de una ecuación diferencial parcial

Encuentre la transformada de Laplace de la ecuación de onda $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $t > 0$.

Solución A partir de (2) y (3),

$$\mathcal{L}\left\{a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierte en

$$a^2 \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = s^2\mathcal{L}\{u(x, t)\} - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

o bien

$$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -su(x, 0) - u_t(x, 0). \tag{4}$$ ❑

La transformada de Laplace con respecto a t de la ecuación de onda o de la de calor elimina dicha variable; y para las ecuaciones en una dimensión, las ecuaciones transformadas son entonces *ecuaciones diferenciales ordinarias* en la variable espacial x. Al resolver una ecuación transformada, se trata a s como parámetro.

Ejemplo 2 Uso de la transformada de Laplace para resolver un problema de valores en la frontera

Resuelva $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a $$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 < x < 1.$$

Solución La ecuación diferencial parcial se puede reconocer como la ecuación de onda con $a = 1$. A partir de (4) y de las condiciones iniciales dadas, la ecuación transformada es

$$\frac{d^2U}{dx^2} - s^2U = -\operatorname{sen} \pi x, \tag{5}$$

donde $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$. Puesto que las condiciones de frontera son funciones de t, debemos calcular también sus transformadas de Laplace:

$$\mathcal{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{u(1, t)\} = U(1, s) = 0. \tag{6}$$

Los resultados obtenidos en (6) son condiciones de frontera para la ecuación diferencial ordinaria (5). Como (5) está definida en un intervalo finito, su función complementaria es

$$U_c(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx.$$

El método de coeficientes indeterminados nos da una solución particular

$$U_p(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x.$$

De aquí que $$U(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \operatorname{senh} sx + \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x.$$

Sin embargo, las condiciones $U(0, s) = 0$ y $U(1, s) = 0$ dan como resultado, $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, respectivamente. Concluimos que

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x$$

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \pi^2} \operatorname{sen} \pi x\right\} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\pi}{s^2 + \pi^2}\right\}.$$

Por lo tanto, $$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \pi t.$$ ❑

Ejemplo 3 Uso de la transformada de Laplace para resolver un problema de valores en la frontera

Una cadena muy larga se encuentra inicialmente en reposo en el eje x no negativo. La cadena está anclada en $x = 0$ y su lejano extremo derecho se desliza hacia abajo sin fricción sobre un soporte vertical. La cadena se pone en movimiento dejando que caiga por su propio peso. Determine el desplazamiento $u(x, t)$.

Solución Como se toma en cuenta la fuerza de gravedad es posible demostrar que la ecuación de onda tiene la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, t > 0.$$

Las condiciones inicial y de frontera son, respectivamente,

$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

La segunda condición de frontera $\lim_{x\to\infty} \partial u/\partial x = 0$ indica que la cadena es horizontal a una distancia mayor desde el extremo izquierdo. Ahora, a partir de (2) y (3),

$$\mathcal{L}\left\{a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} - \mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}$$

se convierte en $$a^2 \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{g}{s} = s^2U - su(x, 0) - u_t(x, 0)$$

o, en vista de las condiciones iniciales,

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}U = \frac{g}{a^2 s}.$$

Las transformadas de las condiciones de frontera son

$$\mathcal{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\left\{\lim_{x\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{dU}{dx} = 0.$$

Con ayuda de coeficientes indeterminados es posible deducir que la solución general de la ecuación transformada es

$$U(x, s) = c_1 e^{-(x/a)s} + c_2 e^{(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

La condición de frontera $\lim_{x\to\infty} dU/dx = 0$ implica que $c_2 = 0$ y $U(0, s) = 0$ nos da $c_1 = g/s^3$. Por lo tanto,

$$U(x, s) = \frac{g}{s^3} e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}.$$

Ahora, mediante el teorema de la segunda traslación se tiene

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{g}{s^3} e^{-(x/a)s} - \frac{g}{s^3}\right\} = \frac{1}{2} g\left(t - \frac{x}{a}\right)^2 \mathcal{U}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} gt^2$$

o bien $$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} gt^2, & 0 \le t < \frac{x}{a} \\ -\frac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & t \ge \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Para interpretar la solución, supongamos que $t > 0$ es fijo. Para $0 \le x \le at$, la cadena tiene la forma de una parábola que pasa por $(0, 0)$ y $(at, -\frac{1}{2} gt^2)$. Para $x > at$, la cadena se describe mediante la línea horizontal $u = -\frac{1}{2} gt^2$. Consulte la figura 7.2. ❑

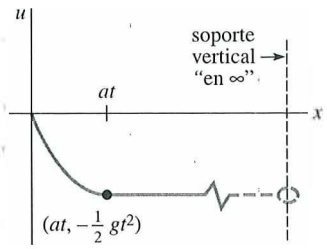


Figura 7.2 Cadena larga cayendo por su propio peso

Observe que el problema del ejemplo siguiente pudo haberse resuelto mediante el procedimiento de la sección 5.6. La transformada de Laplace ofrece una solución alterna.

Ejemplo 4 Una solución en términos de erf(x)

Resuelva la ecuación de calor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

sujeta a $$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Solución De las ecuaciones (1) y (3) y la condición inicial dada,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

se convierte en

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0. \tag{7}$$

Las transformadas de las condiciones de frontera son

$$U(0, s) = 0 \quad \text{y} \quad U(1, s) = \frac{u_0}{s}. \tag{8}$$

Puesto que estamos interesados en un intervalo finito en el eje x, optamos por escribir la solución general de (7) como

$$U(x, s) = c_1 \cosh(\sqrt{s}x) + c_2 \operatorname{senh}(\sqrt{s}x).$$

Aplicar las dos condiciones de frontera en (8) nos da, respectivamente, $c_1 = 0$ y $c_2 = u_0/(s \operatorname{senh} \sqrt{s})$. Por lo tanto,

$$U(x, s) = u_0 \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}}.$$

La transformada inversa de esta última función no se encuentra en la mayoría de las tablas. Sin embargo, escribiendo

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} = \frac{e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x}}{s(e^{\sqrt{s}} - e^{-\sqrt{s}})} = \frac{e^{(x-1)\sqrt{s}} - e^{-(x+1)\sqrt{s}}}{s(1 - e^{-2\sqrt{s}})}$$

y utilizando la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{s}}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\sqrt{s}}$$

encontramos

$$\frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} - \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s} \right].$$

Si suponemos que la transformada inversa de Laplace puede resolverse término por término, a partir del enunciado 3 de la tabla 7.1 puede deducirse que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\operatorname{senh}(\sqrt{s}x)}{s \operatorname{senh} \sqrt{s}} \right\} \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-(2n+1-x)\sqrt{s}}}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-(2n+1+x)\sqrt{s}}}{s} \right\} \right] \\ &= u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{9}$$

La solución (9) puede volverse a escribir en términos de la función de error utilizando $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$:

$$u(x, t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{2n+1+x}{2\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf}\left(\frac{2n+1-x}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \qquad \square$$

La figura 7.3*a*), obtenida con ayuda de la función gráfica 3D de un CAS, muestra la superficie de la región rectangular $0 \le x \le 1, 0 \le t \le 6$ definida mediante la suma parcial $S_{10}(x, t)$ de la solución (10). A partir de la superficie y de las dos gráficas bidimensionales que la acompañan, resulta evidente que para un valor específico de x (la curva de intersección de un plano recortando la superficie perpendicular al eje x en el intervalo $0 \le x \le 1$), la temperatura $u(x, t)$ aumenta considerablemente hacia un valor constante cuando se incrementa el tiempo. Consulte las figuras 7.3*b*) y *c*). Para un tiempo específico (la curva de intersección de un plano recortando la superficie perpendicular en el eje t), la temperatura $u(x, t)$ aumenta de manera natural de 0 a 100. Vea las figuras 7.3*d*) y *e*).

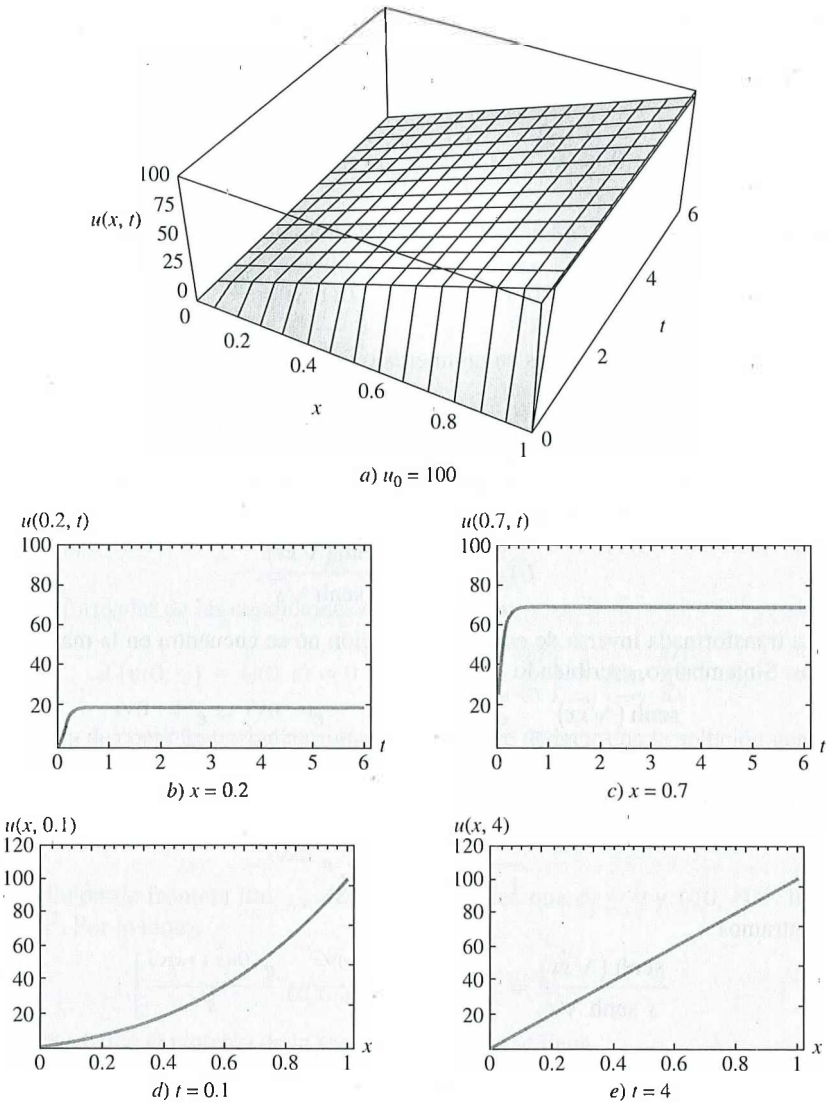


Figura 7.3 Gráfica de la solución dada en (10). En *b*) y *c*), x se mantiene constante. En *d*) y *e*), t se mantiene constante

EJERCICIOS 7.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas siguientes utilice las tablas según sea necesario.

1. Una cadena se estira a lo largo del eje x entre $(0, 0)$ y $(L, 0)$. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ si la cadena parte desde el reposo en la posición inicial $A \operatorname{sen}(\pi x/L)$.
2. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 2 \operatorname{sen} \pi x + 4 \operatorname{sen} 3\pi x.$$

3. El desplazamiento de una cadena elástica semiinfinita se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

Despeje $u(x, t)$.

4. Resuelva el problema de valores en la frontera del ejercicio 3 cuando

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Trace el desplazamiento $u(x, t)$ para $t > 1$.

5. En el ejemplo 3, calcule el desplazamiento $u(x, t)$ cuando al extremo izquierdo de la cadena ubicado en $x = 0$ se le imprime un movimiento oscilatorio descrito por $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t$.

6. El desplazamiento $u(x, t)$ de una cadena accionada por una fuerza externa se determina a partir de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} \omega t = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < 1.$$

Despeje $u(x, t)$.

7. Una barra uniforme está anclada en $x = 0$ y se encuentra inicialmente en reposo. Si una fuerza constante F_0 se aplica al extremo libre localizado en $x = L$, el desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de la sección transversal de la barra se determina a partir de

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad E \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = F_0, \quad E \text{ es una constante},$$
$$t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < L.$$

Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Expanda $1/(1 + e^{-2sL/a})$ en una serie geométrica.]

8. Una viga elástica uniforme semiinfinita que se mueve a lo largo del eje x a velocidad constante $-v_0$ se detiene al golpear una pared en el tiempo $t = 0$. Consulte la figura 7.4. El desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ está determinado por

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -v_0, \quad x > 0.$$

Despeje $u(x, t)$.

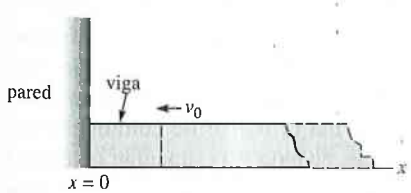


Figura 7.4 Viga elástica en movimiento del problema 8

9. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

10. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 1, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = e^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

En los problemas del 11 al 18, utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $x > 0$, $t > 0$ sujeta a las condiciones dadas.

11. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_1$

12. $u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{u(x, t)}{x} = u_1, \quad u(x, 0) = u_1 x$

13. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = u_0, \quad u(x, 0) = u_0$

14. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u(0, t) - 50, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

15. $u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

[*Sugerencia:* Utilice el teorema de convolución.]

16. $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -f(t), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$

17. $u(0, t) = 60 + 40\,\mathcal{U}(t - 2), \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 60,$
$u(x, 0) = 60$

18. $u(0, t) = \begin{cases} 20, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \to \infty} u(x, t) = 100,$
$u(x, 0) = 100$

19. Resuelva el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < 1, \quad t > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 100 - u(1, t), \quad \lim_{x \to -\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < 1.$$

20. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$

donde r es constante, está dada por

$$u(x, t) = rt - r \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{k\tau}}\right) d\tau.$$

21. Una varilla de longitud L se mantiene a una temperatura constante u_0 en sus extremos $x = 0$ y $x = L$. Si la temperatura inicial de la varilla es $u_0 + u_0 \operatorname{sen}(x\pi/L)$, resuelva la ecuación de calor $u_{xx} = u_t$, $0 < x < L$, $t > 0$ para la temperatura $u(x, t)$.

22. Si hay transferencia de calor desde la superficie lateral de un alambre delgado de longitud L hacia un medio a temperatura constante u_m, entonces la ecuación de calor toma la forma

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_m) = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

donde h es una constante. Determine la temperatura $u(x, t)$ si la temperatura inicial es una constante u_0 en todo el proceso y los extremos $x = 0$ y $x = L$ están aislados.

23. Una varilla de longitud unitaria está aislada en $x = 0$ y se mantiene a temperatura de cero en $x = 1$. Si la temperatura inicial de la varilla es una constante u_0, resuelva $ku_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t > 0$ [para la temperatura $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Expanda $1/(1 + e^{-2\sqrt{s}/k})$ en una serie geométrica.]

24. Una losa porosa infinita de ancho unitario está sumergida en una solución cuya concentración constante es c_0. Una sustancia disuelta en la solución se difunde en la losa. La concentración $c(x, t)$ en la losa está determinada mediante

$$\begin{aligned} &D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0\\ &c(0, t) = c_0, \qquad c(1, t) = c_0, \quad t > 0\\ &c(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \end{aligned}$$

donde D es una constante. Encuentre el valor de $c(x, t)$.

25. Una línea telefónica muy larga se encuentra inicialmente a un potencial constante u_0. Si la línea está aterrizada en $x = 0$ y aislada en su extremo derecho, entonces el potencial $u(x, t)$ en un punto x a lo largo de la línea en el tiempo t está determinado mediante

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - RC\frac{\partial u}{\partial t} - RGu = 0, \qquad x > 0, \quad t > 0\\ &u(0, t) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0\\ &u(x, 0) = u_0, \quad x > 0, \end{aligned}$$

donde R, C y G son constantes conocidas como resistencia, capacitancia y conductancia, respectivamente. Despeje $u(x, t)$. [*Sugerencia:* Vea el problema 5 de los ejercicios 7.1.]

26. A partir de $t = 0$, una carga concentrada de magnitud F_0 se mueve a velocidad constante v_0 por una cadena semiinfinita. En este caso, la ecuación de onda se convierte en

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F_0\delta\left(t - \frac{x}{v_0}\right),$$

donde $\delta(t - x/v_0)$ es la función delta de Dirac. Resuelva la ecuación diferencial parcial sujeta a

$$\begin{aligned} &u(0, t) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \quad t > 0\\ &u(x, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

a) cuando $v_0 \neq a$

b) cuando $v_0 = a$.

27. Demuestre que una solución del problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \, t > 0, \, h \text{ constante}\\ &u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \, t > 0\\ &u(x, 0) = 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

es

$$u(x, t) = \frac{u_0 x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-h\tau - x^2/4\tau}}{\tau^{3/2}}\, d\tau.$$

Tareas para el laboratorio de cómputo

28. *a*) La temperatura en un sólido semiinfinito está modelada mediante el problema de valores en la frontera

$$\begin{aligned} &k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0, \, t > 0\\ &u(0, t) = u_0, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0, \, t > 0\\ &u(x, 0) = 0, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Encuentre el valor de $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$, $x > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ en una región rectangular $0 \le x \le 10$, $0 \le t \le 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$. Indique las dos condiciones de frontera y la condición inicial de su gráfica. Use las gráficas 2D y 3D de $u(x, t)$ para comprobar su respuesta al inciso *a*).

29. *a*) En el problema 28, si existe un flujo constante de calor hacia el sólido en su frontera izquierda, entonces la condición de frontera es $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, A > 0, t > 0.$

Encuentre el valor de $u(x, t)$. Utilice la solución para determinar analíticamente el valor de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$, $x > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ sobre la región rectangular $0 \le x \le 10$, $0 \le t \le 15$. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$. Use las gráficas 2D y 3D de $u(x, t)$ para comprobar su respuesta al inciso *a*).

30. Los humanos captamos la mayor parte de la información que poseemos del mundo exterior mediante la vista y el oído. Sin embargo, muchas criaturas utilizan señales químicas como forma principal de comunicación; por ejemplo, las abejas, cuando experimentan un estado de alarma, emiten cierta sustancia y agitan sus alas para pasar el mensaje a las abejas que atienden a la reina. Estos mensajes moleculares entre miembros de una misma especie se llaman feromonas. Las señales pueden transportarse por el movimiento del aire o del agua, o por un proceso de difusión en el que el movimiento aleatorio de moléculas de gas transporta el químico lejos de su fuente. La figura 7.5 muestra a una hormiga emitiendo una alarma química hacia el aire quieto de un túnel. Si

$c(x, t)$ expresa la concentración del químico a x centímetros de la fuente en el tiempo t, entonces $c(x, t)$ satisface

$$k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t}, \quad x > 0, t > 0,$$

y k es una constante positiva. La emisión de feromonas como pulsos discretos da origen a una condición de frontera de la forma

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A\delta(t),$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

a) Resuelva el problema de valores en la frontera si además se sabe que $c(x, 0) = 0, x > 0$ y $\lim_{x\to\infty} c(x, t) = 0, t > 0$.

b) Utilice un CAS para graficar la solución del inciso *a*) para $x > 0$ en los tiempos $t = 0.1$, $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 5$.

c) Para un determinado tiempo t, demuestre que $\int_0^\infty c(x, t)\, dx = Ak$. Por lo tanto, Ak representa la cantidad total de descarga química.

Figura 7.5 Hormigas del problema 30

7.3 Integral de Fourier

Introducción En los capítulos anteriores, la serie de Fourier se utilizó para representar una función f definida en un intervalo *finito* $(-p, p)$ o $(0, L)$. Cuando f y f' son continuas en dicho intervalo finito, una serie de Fourier representa la función en el intervalo y converge hacia la extensión periódica de f fuera del intervalo. De esta manera, estamos justificados de afirmar que las series de Fourier solamente se asocian con funciones *periódicas*. Ahora procederemos a deducir, aunque no rigurosamente, una forma para representar ciertos tipos de funciones *no periódicas* que estén definidas en un intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ o semiinfinito $(0, \infty)$.

De la serie de Fourier a la integral de Fourier Suponga que una función f está definida en $(-p, p)$. Si utilizamos las definiciones integrales de los coeficientes (9), (10), (11) de la sección 4.2 en la expresión (8) de esa sección, entonces la serie de Fourier de f en el intervalo es

$$f(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\, dt + \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\frac{n\pi}{p}t\, dt\right)\cos\frac{n\pi}{p}x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}t\, dt\right)\text{sen}\,\frac{n\pi}{p}x\right]. \quad (1)$$

Si establecemos $\alpha_n = n\pi/p$, $\Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \pi/p$, entonces (1) se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-p}^{p} f(t)\, dt\right)\Delta\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-p}^{p} f(t)\cos\alpha_n t\, dt\right)\cos\alpha_n x + \left(\int_{-p}^{p} f(t)\,\text{sen}\,\alpha_n t\, dt\right)\text{sen}\,\alpha_n x\right]\Delta\alpha. \quad (2)$$

Ahora vamos a expandir el intervalo $(-p, p)$ haciendo que $p \to \infty$. Como $p \to \infty$ implica que $\Delta\alpha \to 0$, el límite (2) tiene la forma $\lim_{\Delta\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n)\Delta\alpha$, la cual sugiere la definición de la integral $\int_0^\infty F(\alpha)\, d\alpha$. Por lo tanto, si $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ existe, el límite del primer término incluido en (2) es cero y el límite de la suma se convierte en

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\, dt\right)\cos\alpha x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}\,\alpha t\, dt\right)\text{sen}\,\alpha x\right] d\alpha. \quad (3)$$

El resultado que se proporciona en (3) se llama **integral de Fourier** de f en $(-\infty, \infty)$. Tal como señala el resumen siguiente, la estructura básica de la integral de Fourier nos recuerda la forma de una serie de Fourier.

DEFINICIÓN 7.1 Integral de Fourier

La **integral de Fourier** de una función f definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos \alpha x + B(\alpha)\operatorname{sen} \alpha x]\, d\alpha, \tag{4}$$

donde

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx \tag{5}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx. \tag{6}$$

■ **Convergencia de la integral de Fourier** Las condiciones suficientes en las que la integral de Fourier converge hacia $f(x)$ son similares a, pero ligeramente más estrictas que, las condiciones de la serie de Fourier.

TEOREMA 7.1 Condiciones para la convergencia

Sean f y f' continuas en cada intervalo finito, y sea f absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$.* Entonces la integral de Fourier de f en el intervalo converge hacia $f(x)$ en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la integral de Fourier convergerá hacia el promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2},$$

donde $f(x+)$ y $f(x-)$ expresan el límite de f en x desde la derecha y desde la izquierda, respectivamente.

Ejemplo 1 Representación de la integral de Fourier

Encuentre la representación de la integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 < x < 2 \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

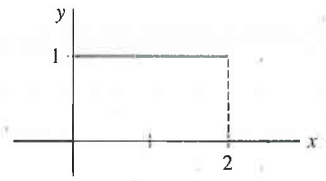


Figura 7.6 Función del ejemplo 1 definida para $(-\infty, \infty)$

Solución La función cuya gráfica se muestra en la figura 7.6 satisface la hipótesis del teorema 7.1. En consecuencia, de (5) y (6), tenemos de una vez

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\cos \alpha x\, dx + \int_0^2 f(x)\cos \alpha x\, dx + \int_2^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx \\ &= \int_0^2 \cos \alpha x\, dx = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx = \int_0^2 \operatorname{sen} \alpha x\, dx = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}.$$

*Esto significa que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ converge.

Por sustitución de estos coeficientes en (4) obtenemos

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\alpha}\right)\cos \alpha x + \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}\right)\operatorname{sen} \alpha x\right] d\alpha.$$

Cuando hacemos uso de identidades trigonométricas, la última integral se simplifica a

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha(x - 1)}{\alpha} d\alpha. \qquad (7)$$ ❑

La integral de Fourier puede utilizarse para evaluar integrales. Por ejemplo, en $x = 1$, se deduce a partir del teorema 7.1 que (7) converge hacia $f(1)$; esto es,

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Vale la pena destacar este último resultado ya que no puede obtenerse de la manera "usual"; el integrando (sen x)/x no tiene una antiderivada que sea función elemental.

Integrales seno y coseno Cuando f es una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$, entonces el producto $f(x)\cos \alpha x$ lo es también, mientras que $f(x)$ sen αx es una función impar. Como una consecuencia de la propiedad g) de la sección 4.3, $B(\alpha) = 0$, por lo que (4) se convierte en

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t\, dt\right)\cos \alpha x\, d\alpha.$$

Aquí también se ha utilizado la propiedad f) de la sección 4.3 para escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t\, dt = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos \alpha t\, dt.$$

De manera similar, cuando f es una función impar en $(-\infty, \infty)$, los productos $f(x)\cos \alpha x$ y $f(x)$ sen αx son funciones impares y pares, respectivamente. Por lo tanto, $A(\alpha) = 0$ y

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\operatorname{sen} \alpha t\, dt\right)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha.$$

Presentamos un resumen de lo anterior en la definición siguiente.

DEFINICIÓN 7.2 Integrales seno y coseno de Fourier

i) La integral de Fourier de una función par en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral coseno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} A(\alpha)\cos \alpha x\, d\alpha, \qquad (8)$$

donde

$$A(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx. \qquad (9)$$

ii) La integral de Fourier de una función impar en el intervalo $(-\infty, \infty)$ es la **integral seno**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} B(\alpha)\operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha, \qquad (10)$$

donde

$$B(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx. \qquad (11)$$

Ejemplo 2 Representación mediante la integral coseno

Encuentre la representación integral de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

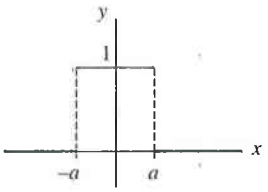


Figura 7.7 Función del ejemplo 2 definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$

Solución A partir de la figura 7.7 resulta evidente que f es una función par. De aquí que representamos f mediante la integral coseno de Fourier (8). A partir de (9) obtenemos

$$A(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx = \int_0^a f(x)\cos\alpha x\, dx + \int_a^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx$$
$$= \int_0^a \cos\alpha x\, dx = \frac{\operatorname{sen} a\alpha}{\alpha},$$

por lo que

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\alpha \cos\alpha x}{\alpha} d\alpha. \tag{12}$$ ❑

Las integrales (8) y (10) pueden utilizarse cuando f no es impar ni par y definirse únicamente a la mitad de la línea $(0, \infty)$. En este caso, (8) representa a f en el intervalo $(0, \infty)$ y a su extensión par (pero no periódica) hacia $(-\infty, 0)$, mientras que (10) representa a f en $(0, \infty)$ y a su extensión impar hacia el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se demuestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 Representaciones mediante las integrales seno y coseno

Representar $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ *a*) mediante la integral coseno; *b*) mediante la integral seno.

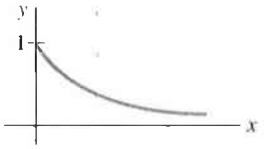


Figura 7.8 Función del ejemplo 3 definida en $(0, \infty)$

Solución La gráfica de la función se proporciona en la figura 7.8.

a) Usamos la integración por partes y encontramos que

$$A(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\cos\alpha x\, dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Por lo tanto, la integral coseno de f es

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha. \tag{13}$$

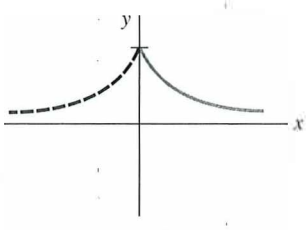
b) De manera similar, tenemos

$$B(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\operatorname{sen}\alpha x\, dx = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

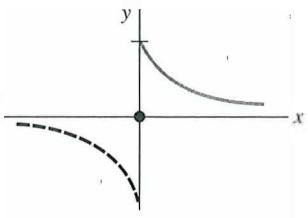
La integral seno de f es entonces

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2} d\alpha. \tag{14}$$

La figura 7.9 muestra las gráficas de las funciones y sus extensiones representadas mediante las dos integrales. ❑



a) Integral coseno



b) Integral seno

Figura 7.9 *a*) es la extensión par de f; *b*) es la extensión impar de f

■ **Forma compleja** La integral de Fourier (4) también tiene una **formulación compleja** equivalente o **formulación exponencial**, esto es análogo a la formulación compleja de una serie de Fourier (consulte la sección 4.4). Cuando (5) y (6) son sustituidas en (4), entonces

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)[\cos\alpha t\cos\alpha x + \operatorname{sen}\alpha t\operatorname{sen}\alpha x]\, dt\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt\,d\alpha \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos\alpha(t-x) + i\,\operatorname{sen}\alpha(t-x)]\,dt\,d\alpha \tag{16}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha(t-x)}\,dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{i\alpha t}dt\right)e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{17}$$

Podemos observar que (15) deriva del hecho de que el integrando es una función par de α. En (16), simplemente hemos sumado un cero al integrando,

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}\alpha(t-x)\,dt\,d\alpha = 0,$$

ya que el integrando es una función impar de α. La integral (17) puede expresarse como

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \tag{18}$$

donde

$$C(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx. \tag{19}$$

Esta última forma de la integral de Fourier se utilizará en la siguiente sección, cuando regresemos al tema de la resolución de problemas de valores en la frontera.

■ **Uso de la computadora** La convergencia de una integral de Fourier puede estudiarse de manera similar a la graficación de las sumas parciales de una serie de Fourier. Para ilustrar esto, vamos a emplear los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3. Por definición de integral impropia, la representación de la integral coseno de Fourier de $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ en (13) puede escribirse como $f(x) = \lim_{b\to\infty} F_b(x)$, donde

$$F_b(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha,$$

y a x se le trata como un parámetro. De modo similar, la representación de la integral seno de Fourier de $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$ en (14) puede escribirse como $f(x) = \lim_{b\to\infty} G_b(x)$, donde

$$G_b(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{\alpha\,\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Debido a que las integrales de Fourier (13) y (14) convergen, las gráficas de las integrales parciales $F_b(x)$ y $G_b(x)$ para un valor específico de $b > 0$ serán una aproximación de la gráfica de f y sus extensiones pares e impares ilustradas en las figuras 7.9*a*) y *b*), respectivamente. Las gráficas de $F_b(x)$ y $G_b(x)$ para $b = 20$ dadas en la figura 7.10 se obtuvieron mediante el uso de *Mathematica* y su aplicación llamada **NIntegrate**. Consulte el problema 21 de los ejercicios 7.3.

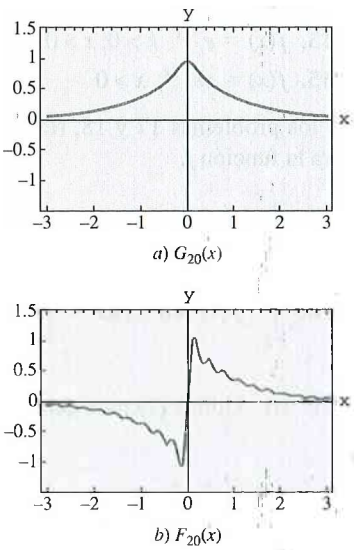


Figura 7.10 Gráficas de las integrales parciales

EJERCICIOS 7.3

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la representación de la integral de Fourier para la función dada.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -1, & -1 < x < 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < \pi \\ 4, & \pi < x < 2\pi \\ 0, & x > 2\pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ 6. $f(x) = \begin{cases} e^{x}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

En los problemas del 7 al 12, utilice la integral seno o la coseno adecuada para representar la función que se proporciona.

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -5, & -1 < x < 0 \\ 5, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \pi, & 1 < |x| < 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$ 10. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| < \pi \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$

11. $f(x) = e^{-|x|}\operatorname{sen} x$ 12. $f(x) = xe^{-|x|}$

En los problemas del 13 al 16, encuentre las representaciones como una integral seno o una coseno de la función dada.

13. $f(x) = e^{-kx},\ k > 0, x > 0$ 14. $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}, x > 0$

15. $f(x) = xe^{-2x},\ x > 0$ 16. $f(x) = e^{-x}\cos x, x > 0$

En los problemas 17 y 18, resuelva la ecuación integral dada para la función f.

17. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\cos \alpha x\, dx = e^{-\alpha}$

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)\operatorname{sen} \alpha x\, dx = \begin{cases} 1, & 0 < \alpha < 1 \\ 0, & \alpha > 1 \end{cases}$

19. *a*) Utilice (7) para demostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

[*Sugerencia:* α es una variable de prueba en la integración.]

b) Demuestre que, en general, para $k > 0$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

20. Utilice la forma compleja (15) para calcular la representación de la integral de Fourier de $f(x) = e^{-|x|}$. Demuestre que el resultado es el mismo obtenido en (8).

Tareas para el laboratorio de cómputo

21. Mientras que la integral (12) pudo graficarse de igual manera a como se estudió en la página 379 para obtener la figura 7.10, ésta puede expresarse también en términos de una función especial que es parte de un CAS.

a) Utilice una identidad trigonométrica para demostrar que una forma alterna de la representación de la integral de Fourier (12) de la función f del ejemplo 2 (con $a = 1$) es

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha(x+1) - \operatorname{sen}\alpha(x-1)}{\alpha}\, d\alpha.$$

b) Como una consecuencia de la parte *a*), $f(x) = \lim_{b\to\infty}$, donde

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{b} \frac{\operatorname{sen}\alpha(x+1) - \operatorname{sen}\alpha(x-1)}{\alpha}\, d\alpha.$$

Demuestre que la última integral puede escribirse como

$$F_b(x) = \frac{1}{\pi}[\operatorname{Si}(b(x+1)) - \operatorname{Si}(b(x-1))],$$

donde $\operatorname{Si}(x)$ es la **función integral seno**. Consulte el problema 49 de los ejercicios 2.3.

c) Utilice un CAS y la forma integral seno que se obtuvo en el inciso *b*) para graficar $F_b(x)$ en el intervalo $-3 \le x \le 3$ para $b = 4$, 6 y 15. Después, grafique $F_b(x)$ para valores mayores de $b > 0$.

7.4 Transformadas de Fourier

Introducción Hasta el momento, sólo hemos estudiado y utilizado una transformada integral: la transformada de Laplace. Sin embargo, en la sección 7.3 estudiamos que la integral de Fourier tenía tres formas alternas: la integral coseno, la integral seno, y la forma compleja o la exponencial. En esta sección consideraremos estas tres formas de la integral de Fourier y las desarrollaremos en tres nuevas transformadas integrales llamadas **transformadas de Fourier**. Además, ampliaremos el concepto de un par de transformación, esto es, una transformada integral y su inversa. Asimismo, se podrá ver que la inversa de una transformada integral es, en sí misma, otra transformada integral.

Pares de transformación La transformada de Laplace $F(s)$ de una función $f(t)$ está definida mediante una integral; sin embargo, hasta el momento, hemos estado usando la representación simbólica $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ para expresar la transformada inversa de

Laplace de $F(s)$. En realidad, la transformada inversa de Laplace también es una transformada *integral*. Si

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = F(s), \tag{1}$$

entonces, la transformada inversa de Laplace es

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s)\,ds = f(t). \tag{2}$$

La última integral se llama **integral de contorno**; su evaluación requiere el uso de variables complejas y su análisis queda más allá del alcance del presente estudio. El tema a tratar aquí es: las transformadas integrales aparecen como **pares de transformación**. Si transformamos $f(x)$ en $F(\alpha)$ mediante la **transformada integral**

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)\,K(\alpha, x)\,dx, \tag{3}$$

entonces la función f puede recuperarse mediante otra transformada integral

$$f(x) = \int_c^b F(\alpha)\,H(\alpha, x)\,d\alpha, \tag{4}$$

llamada **transformada inversa**. Las funciones K y H presentes en el integrando de (3) y (4) se llaman **núcleos** de sus respectivas transformadas. Identificamos a $K(s, t) = e^{-st}$ como el núcleo de la transformada de Laplace, y a $H(s, t) = e^{st}/2\pi i$ como el núcleo de la transformada inversa de Laplace.

■ **Pares de transformación de Fourier** La integral de Fourier es la fuente de tres nuevas transformadas integrales. Las ecuaciones (8) y (9), (10) y (11), y (18) y (19) de la sección anterior nos impulsan a definir los siguientes **pares de transformación de Fourier**.

DEFINICIÓN 7.3 Pares de transformación de Fourier

i) Transformadas de Fourier:
$$\mathscr{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = F(\alpha) \tag{5}$$

Transformada inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = f(x) \tag{6}$$

ii) Transformada seno de Fourier:
$$\mathscr{F}_s\{F(x)\} = \int_0^\infty f(x)\,\operatorname{sen}\alpha x\,dx = F(\alpha) \tag{7}$$

Transformada seno inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}_s^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\,\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha = f(x) \tag{8}$$

iii) Transformada coseno de Fourier:
$$\mathscr{F}_c\{F(x)\} = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\,dx = F(\alpha) \tag{9}$$

Transformada coseno inversa de Fourier:
$$\mathscr{F}_c^{-1}\{F(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha = f(x) \tag{10}$$

■ **Existencia** Las condiciones en las cuales (5), (7) y (9) existen son más estrictas que las de la transformada de Laplace. Por ejemplo, el lector debe comprobar que $\mathcal{F}\{1\}$, $\mathcal{F}_s\{1\}$ y $\mathcal{F}_c\{1\}$ no existan. Las condiciones suficientes para que existan son que f sea absolutamente integrable en el intervalo apropiado y que f y f' sean continuas en cada intervalo finito.

■ **Propiedades de operación** Puesto que el objetivo inmediato es aplicar estas nuevas transformadas a problemas de valores en la frontera, necesitamos examinar las transformadas de derivadas.

Transformada de Fourier

Suponga que f es continua y absolutamente integrable en el intervalo $(-\infty, \infty)$ y que f' es continua en cada intervalo finito. Si $f(x) \to 0$ a medida que $x \to \pm\infty$, entonces la integración por partes nos da

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\, e^{i\alpha x}\, dx \\ &= f(x)e^{i\alpha x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx \\ &= -i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx;\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = -i\alpha F(\alpha). \tag{11}$$

De manera similar, bajo los supuestos adicionales de que f' es continua en $(-\infty, \infty)$, $f''(x)$ es continua en cada intervalo finito, y $f'(x) \to 0$ conforme $x \to \pm\infty$, tenemos

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = (-i\alpha)^2\, \mathcal{F}\{f(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha). \tag{12}$$

Es muy importante estar conscientes de que las transformadas seno y coseno no son apropiadas para transformar la primera derivada (o, para el caso, cualquier derivada de orden *impar*). Se puede demostrar fácilmente que

$$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -\alpha \mathcal{F}_c\{f(x)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \alpha \mathcal{F}_s\{f(x)\} - f(0).$$

La dificultad es evidente; la transformada de $f'(x)$ no está expresada en términos de la transformada integral original.

Transformada seno de Fourier

Suponga que f y f' son continuas, que f es absolutamente integrable en el intervalo $[0, \infty)$, y que f'' es continua en todos los intervalos finitos. Si $f \to 0$ y $f' \to 0$ conforme $x \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s\{f''(x)\} &= \int_0^{\infty} f''(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx \\ &= f'(x) \operatorname{sen} \alpha x\Big|_0^{\infty} - \alpha \int_0^{\infty} f'(x) \cos \alpha x\, dx \\ &= -\alpha\left[f(x) \cos \alpha x\Big|_0^{\infty} + \alpha \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx\right] \\ &= \alpha f(0) - \alpha^2 \mathcal{F}_s\{f(x)\};\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) + \alpha f(0). \tag{13}$$

Transformada coseno de Fourier

Bajo los mismos supuestos que nos llevaron a (9), encontramos que la transformada coseno de Fourier de $f''(x)$ es

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0). \tag{14}$$

Una pregunta natural es: "¿Cómo sabemos cuál transformada utilizar en un determinado problema de valores en la frontera?" Resulta evidente que, para usar una transformada de Fourier, el dominio de la variable a eliminar debe ser $(-\infty, \infty)$. Para utilizar la transformada seno o la coseno, el dominio de al menos una de las variables del problema debe ser $[0, \infty)$. Sin embargo, el factor determinante al optar por la transformada seno o la coseno es el tipo de condición de frontera especificada en el cero.

¿Cómo sabemos qué transformada utilizar?

En los ejemplos dados a continuación supondremos, sin mayor comentario, que tanto u como $\partial u/\partial x$ (o $\partial u/\partial y$) se aproximan a cero a medida que $x \to \pm \infty$. Esto no es una restricción significativa ya que estas condiciones son válidas en la mayoría de las aplicaciones.

Ejemplo 1 Uso de la transformada de Fourier

Resuelva la ecuación de calor $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, sujeta a

$$u(x, 0) = f(x), \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} u_0, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Solución El problema puede interpretarse como el cálculo de la temperatura $u(x, t)$ en una varilla infinita. Como el dominio de x es el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$, utilizamos la transformada de Fourier (5) y definimos

$$\mathcal{F}\{u(x, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)\, e^{i\alpha x}\, dx = U(\alpha, t).$$

Transformar la ecuación diferencial parcial y utilizar (12)

$$\mathcal{F}\left\{k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}$$

nos da $$-k\alpha^2 U(\alpha, t) = \frac{dU}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{dU}{dt} + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0.$$

Resolvemos la última ecuación para obtener $U(\alpha, t) = ce^{-k\alpha^2 t}$. Ahora la transformada de la condición inicial es

$$\mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-1}^{1} u_0 e^{i\alpha x}\, dx = u_0 \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i\alpha}.$$

Este resultado es lo mismo que $U(\alpha, 0) = 2u_0 \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$. Aplicando esta condición a la solución $U(\alpha, t)$ nos da $U(\alpha, 0) = c = (2u_0 \operatorname{sen}\alpha)/\alpha$, por lo que

$$U(\alpha, t) = 2u_0 \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}.$$

A partir de la integral de inversión (6) es posible deducir que

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x}\, d\alpha.$$

La última expresión puede simplificarse de alguna manera mediante la fórmula de Euler $e^{-i\alpha x} = \cos\alpha x - i \operatorname{sen}\alpha x$ y observando que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha = 0$ puesto que el integrando es una función impar de α. Así, por último, tenemos

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha. \qquad (15)$$ ❑

Se deja al lector la demostración de que la solución (15) puede expresarse en términos de la función de error. Consulte el problema 23 de los ejercicios 7.4.

Ejemplo 2 Uso de la transformada coseno

La temperatura constante de una placa semiinfinita está determinada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad y > 0$$
$$u(0, y) = 0, \qquad u(\pi, u) = e^{-y}, \quad y > 0$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad 0 < x < \pi.$$

Encuentre el valor de $u(x, y)$.

Solución El dominio de la variable y la condición prescrita en $y = 0$ indican que se puede aplicar la transformada coseno de Fourier al problema. Definimos,

$$\mathcal{F}_c\{u(x, y)\} = \int_0^\infty u(x, y) \cos \alpha y \, dy = U(x, \alpha).$$

En vista de (14), $$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + \mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right\} = \mathcal{F}_c\{0\}$$

se convierte en

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \alpha^2 U(x, \alpha) - u_y(x, 0) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2 U}{dx^2} - \alpha^2 U = 0.$$

Puesto que el dominio de x es un intervalo finito, optamos por escribir la solución de la ecuación diferencial ordinaria como

$$U(x, \alpha) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x. \tag{16}$$

Ahora, $\mathcal{F}_c\{u(0, y)\} = \mathcal{F}_c\{0\}$ y $\mathcal{F}_c\{u(\pi, y)\} = \mathcal{F}_c\{e^{-y}\}$ son, a la vez, equivalentes a

$$U(0, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad U(\pi, \alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Cuando aplicamos estas últimas condiciones, la solución (16) nos da $c_1 = 0$ y $c_2 = 1/[(1 + \alpha^2) \operatorname{senh} \alpha\pi]$. Por lo tanto,

$$U(x, \alpha) = \frac{\operatorname{senh} \alpha x}{(1 + \alpha^2) \operatorname{senh} \alpha\pi},$$

de modo que, a partir de (10), llegamos al siguiente resultado:

$$u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} \alpha x}{(1 + \alpha^2) \operatorname{senh} \alpha\pi} \cos \alpha y \, d\alpha. \tag{17}$$ ❑

Si en el ejemplo 2 se hubiera dado $u(x, 0)$ en lugar de $u_y(x, 0)$, entonces la transformada seno hubiera resultado más apropiada.

EJERCICIOS 7.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-19.

En los problemas del 1 al 21, utilice las transformadas integrales de Fourier de esta sección para resolver el problema de valores en la frontera que se plantea. Formule supuestos respecto a los acotamientos donde sea necesario.

1. $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$

   $u(x, 0) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$

2. $k \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ -100, & -1 < x < 0 \\ 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

3. Determine la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = u_0$, $t > 0$ y $u(x, 0) = 0$, $x > 0$.

4. Con el resultado $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x > 0$, demuestre que la solución del problema 3 puede escribirse como

$$u(x, t) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha.$$

5. Determine la temperatura $u(x, t)$ en una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 0$, $t > 0$, y

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

6. Resuelva el problema 3 si en la frontera izquierda la condición es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -A, \quad t > 0.$$

7. Resuelva el problema 5 si el extremo $x = 0$ está aislado.

8. Determine la temperatura $u(x, t)$ de una varilla semiinfinita si $u(0, t) = 1$, $t > 0$ y $u(x, 0) = e^{-x}$, $x > 0$.

9. *a)* $\displaystyle a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$

$$u(x, 0) = f(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

b) Si $g(x) = 0$, demuestre que la solución del inciso *a)* puede escribirse como $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$.

10. Calcule el desplazamiento $u(x, t)$ de una cadena semiinfinita si

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = xe^{-x}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad x > 0.$$

11. Resuelva el problema del ejemplo 2 si se invirtieran las condiciones de frontera en $x = 0$ y $x = \pi$:

$$u(0, y) = e^{-y}, \quad u(\pi, y) = 0, \quad y > 0.$$

12. Resuelva el problema del ejemplo 2 si la condición de frontera en $y = 0$ es $u(x, 0) = 1$, $0 < x < \pi$.

13. Determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de una placa definida por $x \geq 0$, $y \geq 0$ si la frontera $x = 0$ está aislada y, en $y = 0$,

$$u(x, 0) = \begin{cases} 50, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

14. Resuelva el problema 13 si la condición de frontera en $x = 0$ es $u(0, y) = 0$, $y > 0$.

15. $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < 2$

$$u(0, y) = 0, \quad 0 < y < 2$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, 2) = 0, x > 0$$

16. $\displaystyle\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \; 0 < y < \pi, \; y > 0$

$$u(0, y) = f(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \; y > 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$$

En los problemas 17 y 18, determine la temperatura de estado estable $u(x, y)$ de la placa mostrada en la figura. [*Sugerencia:* Una forma de proceder es expresar los problemas 17 y 18 como dos o tres problemas de valores en la frontera, respectivamente. Utilice el principio de superposición (consulte la sección 5.5).]

17.

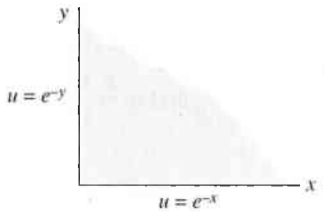


Figura 7.11 Placa del problema 17

18.

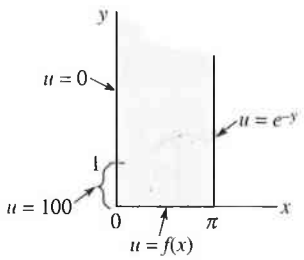


Figura 7.12 Placa del problema 18

19. Utilice el resultado $\mathcal{F}_e\{e^{-x^2/4p^2}\} = 2\sqrt{\pi}pe^{-p^2\alpha^2}$ para resolver el problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$$

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

20. Si $\mathcal{F}_e\{f(x)\} = F(\alpha)$ y $\mathcal{F}_e\{g(x)\} = G(\alpha)$, entonces el **teorema de convolución** para la transformada de Fourier está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(x - \tau)\, d\tau = \mathcal{F}_e^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\}.$$

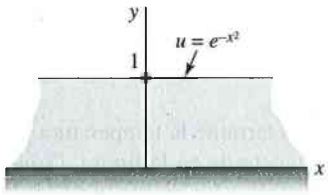
Utilice este resultado y la transformada $\mathcal{F}_e\{e^{-x^2/4p^2}\}$ del problema 19 para demostrar que una solución del problema de valores en la frontera

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \; t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

es $\displaystyle u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-(x-\tau)^2/4kt}\, d\tau.$

21. Utilice la transformada $\mathcal{F}\{e^{-x^2/4p^2}\}$ del problema 19 para encontrar la temperatura de estado estable $u(x, y)$ en la tira infinita que se muestra en la figura 7.13.



aislado

Figura 7.13 Placa del problema 21

22. La solución del problema 14 puede integrarse. Utilice los enunciados 42 y 43 de la tabla del apéndice III para demostrar que

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi}\left[\arctan\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{y} - \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{y}\right].$$

23. Utilice el problema 20, el cambio de variables $v = (x - \tau)/2\sqrt{kt}$, y el problema 9 de los ejercicios 7.1, para demostrar que la solución del ejemplo 1 puede expresarse como

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{kt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

Tareas para el laboratorio de cómputo

24. Suponga que $u_0 = 100$ y $k = 1$ en la solución del problema 23. Utilice un CAS para graficar $u(x, t)$ en la región rectangular $-4 \le x \le 4$, $0 \le t \le 6$. Use una gráfica 2D y sobreponga las gráficas de $u(x, t)$ para $t = 0.05, 0.125, 0.5, 1, 2, 4, 6$ y 15 en el intervalo $-4 \le x \le 4$. Emplee las gráficas para formular un juicio acerca de los valores de $\lim_{t\to\infty} u(x, t)$ y $\lim_{x\to\infty} u(x, t)$. Luego demuestre analíticamente estos resultados utilizando las propiedades de erf(x).

7.5 Transformada rápida de Fourier

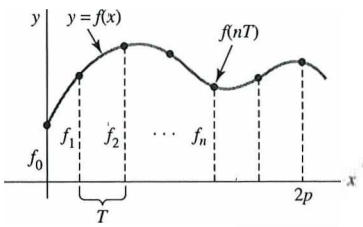


Figura 7.14 Muestreo de una función continua

■ **Introducción** Considere una función f que esté definida y sea continua en el intervalo $[0, 2p]$. Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ son puntos uniformemente espaciados en el intervalo, entonces se dice que los valores funcionales correspondientes $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ mostrados en la figura 7.14 representan un *muestreo* discreto de la función f. La noción de las muestras discretas de una función es importante en el análisis de señales continuas.

En esta sección, la forma compleja o exponencial de la serie de Fourier juega un papel muy importante. Se recomienda efectuar un repaso de la sección 4.4.

■ **Transformada discreta de Fourier** Considere una función f definida en el intervalo $[0, 2p]$. En la sección 4.4, a partir de la expresión (11), estudiamos que f puede escribirse como una serie compleja de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)e^{-in\omega x}\,dx, \tag{1}$$

donde $\omega = 2\pi/2p = \pi/p$ es la frecuencia angular fundamental y $2p$ es el periodo fundamental. Sin embargo, en el *caso discreto*, la entrada es $f_0, f_1, f_2, \ldots$, que son los valores de la función f en puntos uniformemente espaciados $x = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. El número T se llama **velocidad de muestreo** o longitud del intervalo de muestreo.* Si f es continua en T, entonces la **muestra** de f en T está definida como el producto $f(x)\delta(x - T)$, donde $\delta(x - T)$ es la función delta de Dirac (vea la sección 4.5 del tomo I). Podemos entonces representar esta versión discreta de f, o **señal discreta**, como la suma de impulsos unitarios que actúan sobre la función en $x = nT$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - nT). \tag{2}$$

Si aplicamos la transformada de Fourier a la señal discreta (2), tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - nT)e^{i\alpha x}\,dx. \tag{3}$$

*Observe que el símbolo T utilizado aquí no tiene el mismo significado que en la sección 4.4.

Mediante la propiedad de análisis de la función delta de Dirac (vea los *Comentarios* incluidos al final de la sección 4.5 del tomo I), (3) es lo mismo que

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)e^{i\alpha nT}. \tag{4}$$

La expresión $F(\alpha)$ en (4) se llama **transformada discreta de Fourier** (DFT) de la función f. En (4), a menudo escribimos los coeficientes $f(nT)$ como $f(n)$ o f_n. También vale la pena observar que debido a que $e^{i\alpha x}$ es periódica en α y $e^{i\alpha T} = e^{i(\alpha T + 2\pi)} = e^{i(\alpha + 2\pi/T)T}$, solamente es necesario considerar la función para α en $[0, 2\pi/T]$. Sea $N = 2\pi/T$. Esto coloca a x en el intervalo $[0, 2\pi]$. Por lo tanto, debido a que muestreamos sobre un periodo, la suma en (4) es realmente finita.

Ahora considere los valores funcionales $f(x)$ en puntos N uniformemente espaciados, $x = nT$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, en el intervalo $[0, 2\pi]$, esto es, $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$. Usando estos N términos, la serie discreta (finita) de Fourier $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ nos da

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 e^{i1\cdot 0} + c_2 e^{i2\cdot 0} + \cdots + c_{N-1} e^{i(N-1)\cdot 0}\\
f_1 &= c_0 + c_1 e^{i2\pi/N} + c_2 e^{i4\pi/N} + \cdots + c_{N-1} e^{i2(N-1)\pi/N}\\
f_2 &= c_0 + c_1 e^{i4\pi/N} + c_2 e^{i8\pi/N} + \cdots + c_{N-1} e^{i4(N-1)\pi/N}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
f_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{i2(N-1)\pi/N} + c_2 e^{i4(N-1)\pi/N} + \cdots + c_{N-1} e^{i2(N-1)2\pi/N}.
\end{aligned}$$

Si establecemos $\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\dfrac{2\pi}{n}$ y aplicamos las leyes de los exponentes, este sistema de ecuaciones es lo mismo que

$$\begin{aligned}
f_0 &= c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{N-1}\\
f_1 &= c_0 + c_1\omega_N + c_2\omega_N^2 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{N-1}\\
f_2 &= c_0 + c_1\omega_N^2 + c_2\omega_N^4 + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{2(N-1)}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
f_{N-1} &= c_0 + c_1\omega_N^{N-1} + c_2\omega_N^{2(N-1)} + \cdots + c_{N-1}\omega_N^{(N-1)^2}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Al utilizar la notación matricial (vea las secciones 2.1 y 2.2), entonces (5) es

$$\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_{N-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & & \omega_N^{N-1}\\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & & \omega_N^{2(N-1)}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{N-1}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Dejemos que la matriz de $N \times N$ en (6) quede expresada mediante el símbolo $\mathbf{F}_N$. Dadas las entradas $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{N-1}$, ¿existe una forma sencilla de encontrar los coeficientes de Fourier $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}$? Si $\overline{\mathbf{F}}_N$ es la matriz constituida por los complejos conjugados de los elementos de $\mathbf{F}_N$ y si $\mathbf{I}$ expresa la matriz identidad de $N \times N$, entonces tenemos

$$\mathbf{F}_N\overline{\mathbf{F}}_N = \overline{\mathbf{F}}_N\mathbf{F}_N = N\mathbf{I} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{F}_N^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N.$$

A partir de (6) y de la última ecuación es posible deducir que

$$\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_{N-1}\end{pmatrix} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N\begin{pmatrix} f_0\\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_{N-1}\end{pmatrix}.$$

■ **Par de transformadas discretas** De la sección 7.4 recuerde que en el par de transformadas de Fourier utilizamos una función $f(x)$ como entrada y calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia k (c_k en el caso de funciones periódicas con periodo 2π), o calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia α ($F(\alpha)$ en el caso de funciones no periódicas).

Asimismo, dadas estas frecuencias y estos coeficientes, podríamos reconstruir la función original $f(x)$. Para el caso discreto, usamos una muestra de N valores de la función $f(x)$ como entrada y calculamos los coeficientes que proporcionan la amplitud para cada frecuencia de la muestra. Dadas estas frecuencias y estos coeficientes, es posible reconstruir los n valores muestreados de $f(x)$. El par transformado, el **par de la transformada discreta de Fourier**, está dado por

$$\mathbf{c} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{F}}_N\mathbf{f} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = \mathbf{F}_N\mathbf{c}. \tag{7}$$

donde $$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1 Transformada discreta de Fourier

Establecemos $N = 4$ en forma tal que la entrada sea f_0, f_1, f_2, f_3 en los cuatro puntos $x = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$. Como $\omega_4 = e^{i\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$, la matriz $\mathbf{F}_4$ es

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, a partir de (7), los coeficientes de Fourier están dados por $\mathbf{c} = \frac{1}{4}\mathbf{F}_4\mathbf{f}$:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Si establecemos f_0, f_1, f_2, f_3 como 0, 2, 4, 6, respectivamente, podemos deducir, a partir de la matriz producto anterior, que

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + i \\ -1 \\ -1 - i \end{pmatrix}.$$

Observe que obtenemos el mismo resultado utilizando (4), esto es, $F(\alpha) = \sum_{n=0}^{3} f(nT)\, e^{i\alpha nT}$, con $T = \pi/2$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Las gráficas de $|c_n|$, $n = 0, 1, 2, 3$, o, de modo equivalente, $|F(\alpha)|$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$, están dadas en la figura 7.15. ❑

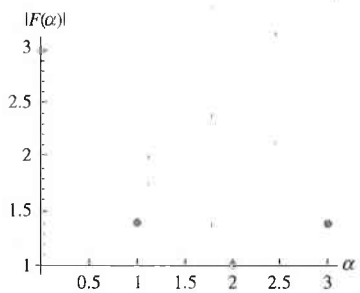


Figura 7.15 Gráfica de $|F(\alpha)|$ para el ejemplo 1

El cálculo de los coeficientes involucra la multiplicación de las matrices $\mathbf{F}_n$ y $\overline{\mathbf{F}}_n$. Debido a la naturaleza de estas matrices, estas multiplicaciones pueden realizarse de manera muy eficiente, desde el punto de vista computacional, mediante el uso de la **transformada rápida de Fourier (TRF)**, la cual se estudia más adelante en esta sección.

■ **Ecuación de calor y serie discreta de Fourier** Si la función f incluida en el problema de valor inicial

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \, t > 0 \tag{8}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

es periódica con periodo 2π, la solución puede escribirse en términos de la serie de Fourier para $f(x)$. También podemos aproximar esta solución con una suma finita

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t) e^{ikx}.$$

Si analizamos ambos miembros de la ecuación unidimensional de calor dada en (8), podemos observar que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{dc_j}{dt} e^{ijx}$$

y

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = k\sum_{j=0}^{n-1} c_j(t)(ij)^2 e^{ijx},$$

puesto que $\dfrac{d^2 e^{ijx}}{dx^2} = (ij)^2 e^{ijx}$.

Se igualan estas dos expresiones para obtener la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dc_j}{dt} = -kj^2 c_j(t) \quad \text{con solución} \quad c_j(t) = c_j(0)\, e^{-kj^2 t}.$$

La tarea final consiste en encontrar los valores $c_j(0)$. Sin embargo, recordemos que $u(x, t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t) e^{ikx}$ y $u(x, 0) = f(x)$, por lo que $c_j(0)$ son los coeficientes de la serie discreta de Fourier de $f(x)$. Compare esto con la sección 5.3.

■ **Ecuación de calor y transformada discreta de Fourier** El problema (8) de valor inicial puede interpretarse como el modelo matemático para la temperatura $u(x, t)$ presente en una barra de longitud infinita. En la sección 7.4 vimos que podemos resolver (8) utilizando la transformada de Fourier, y que la solución $u(x, t)$ depende de la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de $f(x)$ (consulte la página 383). Es posible aproximar $F(\alpha)$ enfocando la transformada discreta de Fourier desde otro punto de vista.

En primera instancia, aproximamos los valores de la transformada discretizando la integral $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x}\, dx$. Considere el intervalo $[a, b]$. Hagamos que $f(x)$ esté dado por los n puntos uniformemente espaciados

$$x_j = a + \frac{b-a}{n} j, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

A continuación, aproximamos:

$$\begin{aligned} F(\alpha) &\approx \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{i\alpha x_j} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) e^{i\alpha x_j} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) e^{i\alpha a} e^{i\alpha \frac{b-a}{n} j} \\ &= \frac{b-a}{n} e^{i\alpha a} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) e^{i\alpha \frac{b-a}{n} j}. \end{aligned}$$

Si ahora seleccionamos un valor apropiado para α, digamos $\dfrac{2\pi M}{b-a}$ donde M es un entero, tenemos

$$F\left(\frac{2\pi M}{b-a}\right) \approx \frac{b-a}{n} e^{i\frac{2\pi M a}{b-a}} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) e^{i\frac{2\pi jM}{n}}$$
$$= \frac{b-a}{n} e^{i\frac{2\pi M a}{b-a}} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} j\right) \omega_n^{jM},$$

donde recordemos que $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. Ésta es una aproximación numérica de la transformada de Fourier de $f(x)$ evaluada en los puntos $\dfrac{2\pi M}{b-a}$ siendo M un entero.

Ejemplo 2 Ejemplo 1, sección 7.4, repaso

Del ejemplo 1 dado en la sección 7.4 (con $u_0 = 1$), recuerde que la transformada de Fourier de un pulso rectangular definido mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

es

$$F(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}.$$

El espectro de frecuencia es la gráfica de $|F(\alpha)|$ contra α dada en la figura 7.16*a*). Utilizando $n = 16$ puntos espaciados uniformemente entre $a = -2$ y $b = 2$ y M con un valor en el rango de -6 a 6, obtenemos la transformada discreta de Fourier de $f(x)$, sobrepuesta en la gráfica de $|F(\alpha)|$ de la figura 7.16*b*). ❑

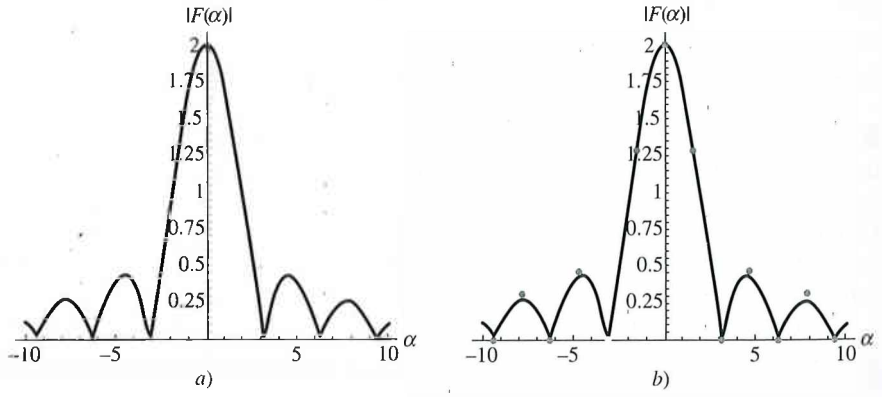
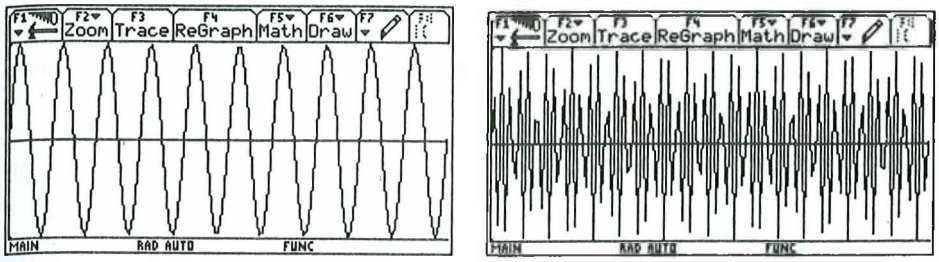


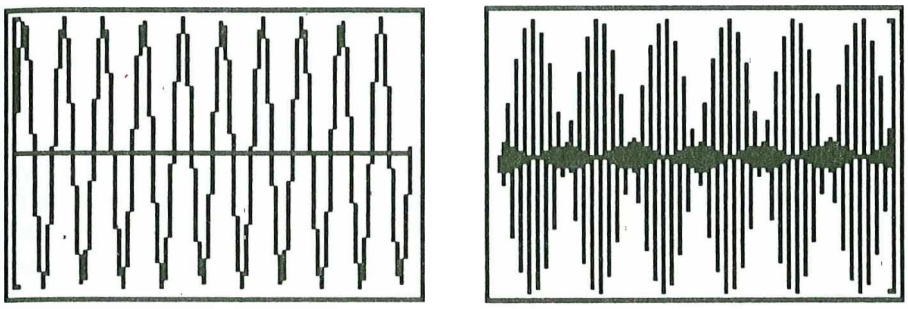
Figura 7.16 *a*) es la gráfica de $|F(\alpha)|$; *b*) es la transformada discreta de Fourier de f

Diente de sierra Un problema conocido como diente de sierra puede presentarse siempre que se generen muestras de datos a intervalos uniformemente espaciados. Si usted alguna vez ha visto una película donde ruedas en movimiento parezcan estar girando más lentamente (o incluso ¡en sentido contrario!), habrá experimentado el fenómeno llamado diente de sierra. Las ruedas pueden girar a velocidad elevada, sin embargo, como en una película las tomas se "muestrean" a intervalos uniformemente espaciados, es posible observar una velocidad de giro baja.

Las calculadoras gráficas también son susceptibles de experimentar este problema debido a la forma en que muestrean los puntos para crear gráficas. Por ejemplo, grafique la función trigonométrica $y = \operatorname{sen} 20\pi x$ con frecuencia de 10 en una calculadora Texas Instruments TI-92 y obtendrá la gráfica ilustrada en la figura 7.17*a*). A frecuencias más elevadas, digamos $y = \operatorname{sen} 100\pi x$ con una frecuencia de 50, se obtiene la cantidad correcta de ciclos, sin embargo, las amplitudes de la gráfica de la figura 7.17*b*) por supuesto que no son iguales a 1.



a) $y = \text{sen } 20\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [−1, 1] *b*) $y = \text{sen } 100\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [−1, 1] **Figura 7.17** TI-92



a) $y = \text{sen } 20\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [−1, 1] *b*) $y = \text{sen } 100\pi x$; x rango: [0, 1]; y rango: [−1, 1] **Figura 7.18** TI-83

En una calculadora como la Texas Instruments TI-83, las gráficas de la figura 7.18 muestran el efecto diente de sierra en forma un tanto más clara.

El problema estriba en el hecho de que $e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \text{ sen } 2n\pi = 1$ para valores enteros de n. La serie discreta de Fourier no puede distinguir e^{imx} de 1, ya que estas funciones son iguales en los puntos de muestreo $x = \dfrac{2k\pi}{n}$. La frecuencia más elevada se ve como la más baja. Considere las funciones $\cos \dfrac{\pi n}{2}$ y $\cos \dfrac{7\pi n}{2}$. Si muestreamos en los puntos $n = 0, 1, 2, \ldots,$ estas dos funciones parecen idénticas, se supone la frecuencia más baja y las amplitudes (coeficientes de Fourier) asociadas con las frecuencias más elevadas se suman con la amplitud de menor frecuencia. Sin embargo, si a altas frecuencias estos coeficientes de Fourier son pequeños, ello no representa un gran problema. En el teorema del muestreo que presentamos más adelante, veremos qué instancia puede hacerse cargo de este problema.

Procesamiento de señales Más allá de la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, como las que hemos estado haciendo con anterioridad, las ideas presentadas en esta sección resultan de gran utilidad en el **procesamiento de señales**. Podremos reconstruir una señal transmitida por el muestreo en sus puntos discretos. Considere a las funciones con que hemos trabajado como **señales** provenientes de una fuente. El problema que representa realizar el cálculo de un número infinito de coeficientes de Fourier y sumar una serie infinita para reconstruir una señal (función) no es práctico. Una suma finita podría ser una aproximación satisfactoria, sin embargo, ciertas señales pueden reconstruirse mediante un número finito de muestras.

TEOREMA DEL MUESTREO

Si una señal $f(x)$ está **limitada en banda**, es decir, si el rango de frecuencias de la señal se encuentra en la banda $-A < k < A$, entonces la señal puede reconstruirse muestreando dos veces cada ciclo de la frecuencia más alta presente; de hecho,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right) \frac{\text{sen } (Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}.$$

Para justificar este **teorema del muestreo** considere a la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de $f(x)$ como una extensión periódica en forma tal que $F(\alpha)$ esté definida para todos los valores de α, no solamente para aquellos incluidos en $-A < k < A$. Utilizando la transformada de Fourier tenemos

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha. \tag{10}$$

A $F(\alpha)$ se le da el tratamiento de una extensión periódica, la serie de Fourier para $F(\alpha)$ es

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\alpha/A}, \tag{11}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-in\pi\alpha/A}\,d\alpha. \tag{12}$$

Usamos (10) y observe que

$$\frac{\pi}{A}f\left(\frac{n\pi}{A}\right) = \frac{\pi}{A}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} F(\alpha)e^{-in\pi\alpha/A}\,d\alpha,$$

la cual, por (12), es igual a c_n. Al sustituir $c_n = \dfrac{\pi}{A}f\left(\dfrac{n\pi}{A}\right)$ en (11) resulta

$$F(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{A}f\left(\frac{n\pi}{A}\right)e^{in\pi\alpha/A}.$$

De nuevo en (10), sustituimos esta expresión de $F(\alpha)$ para tener

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{A}f\left(\frac{n\pi}{A}\right)e^{in\pi\alpha/A}\right)e^{-i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\int_{-A}^{A} e^{in\pi\alpha/A}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\int_{-A}^{A} e^{i\alpha\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{1}{i\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}\left\{e^{iA\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)} - e^{-iA\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{2A}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{1}{i\left(\frac{n\pi}{A}-x\right)}2i\,\text{sen}\,(n\pi - Ax) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{\text{sen}\,(n\pi - Ax)}{n\pi - Ax} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{A}\right)\frac{\text{sen}\,(Ax - n\pi)}{Ax - n\pi}.
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos, de manera sucesiva, un intercambio de suma e integración (no siempre permitida, sin embargo, en esta ocasión es correcto), integración de una función exponencial, $\text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, y el hecho de que $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$.

Por lo tanto, a partir de las muestras en intervalos $\frac{\pi}{A}$ pueden reconstruirse todos los valores de f. Observe que si establecemos e^{iAx} (en otras palabras, si establecemos $k = A$), entonces el teorema del muestreo no procederá. Si, por ejemplo, $f(x) = \operatorname{sen} Ax$, entonces todas las muestras serán 0 y f no podrá ser reconstruida, ya que se presentará el fenómeno de diente de sierra.

■ **Señales limitadas en banda** Una señal que contenga muchas frecuencias puede **filtrarse** de tal manera que solamente queden intactas las frecuencias presentes en un intervalo, por ello la señal se considerará limitada en banda. Considere la señal $f(x)$. Multiplique la transformada de Fourier $F(\alpha)$ de f por una función $G(\alpha)$ que sea 1 en el intervalo que contiene las frecuencias α a conservar, y 0 en cualquier otra frecuencia. Esta multiplicación de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia es una convolución de $f(x)$ y $g(x)$ en el dominio del tiempo. Recuerde que el problema 20 de los ejercicios 7.4 establece que

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)G(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(x - \tau)\, d\tau.$$

La integral que aparece en el segundo miembro de la ecuación se llama **convolución de f y g**, y se expresa como $f*g$. El último enunciado puede escribirse de manera más compacta como

$$\mathcal{F}\{f*g\} = F(\alpha)G(\alpha).$$

La idea análoga para las transformadas de Laplace se encuentra en la sección 4.4 del tomo I. La función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} Ax}{\pi x}$ tiene como su transformada de Fourier la función pulso

$$G(\alpha) = \begin{cases} 1, & -A < \alpha < A \\ 0, & \text{en cualquier otro lugar.} \end{cases}$$

Lo anterior implica que la función $(f*g)(x)$ está limitada en banda, con frecuencias dentro del rango de $-A$ y A.

■ **Cálculos con la transformada rápida de Fourier** Regresemos a la transformada discreta de Fourier de $f(x)$, donde tenemos a f muestreada en n puntos uniformemente espaciados por una distancia T entre ellos, por ejemplo $0, T, 2T, 3T, \ldots, (n-1)T$. (Utilizamos $T = \pi/n$ al comienzo de esta sección.) Sustituyendo lo anterior, la transformada discreta de Fourier

$$F\left(\frac{2\pi M}{b-a}\right) = \frac{b-a}{n}\, e^{i\frac{2\pi Ma}{b-a}} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n}\, j\right)\omega_n^{jM}$$

se convierte en $F\left(\dfrac{2\pi k}{nT}\right) = T\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f(jT)\omega_n^{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$

Por simplicidad de notación, escriba lo anterior como

$$c_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega_n^{kj}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Esto le debe recordar a (6), donde teníamos

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix},$$

o $\mathbf{f} = \mathbf{F}_n\mathbf{c}$. La clave de la TRF son las propiedades de ω_n y la factorización de matrices. Si $n = 2^N$ podemos escribir $\mathbf{F}_n$ de la manera siguiente (la cual no se demostrará):

$$\mathbf{F}_{2^N} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{2^{N-1}} & \mathbf{D}_{2^{N-1}} \\ \mathbf{I}_{2^{N-1}} & -\mathbf{D}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{2^{N-1}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{2^{N-1}} \end{pmatrix} \mathbf{P}, \tag{13}$$

donde $\mathbf{I}_k$ es la matriz identidad $k \times k$, y $\mathbf{P}$ es la matriz permutación que modifica a la matriz $\mathbf{c}$ de tal forma que los subíndices pares se colocan en la parte superior mientras los impares van en la inferior. La matriz $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal definida por,

$$\mathbf{D}_{2^{N-1}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega_{2^N} & & & \\ & & (\omega_{2^N})^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (\omega_{2^N})^{2^{N-1}-1} \end{pmatrix}.$$

Observe que cada una de las $\mathbf{F}_{2^{N-1}}$ matrices puede, a su vez, factorizarse. Al final, la matriz $\mathbf{F}_n$ con n^2 elementos diferentes de cero se factoriza como el producto de n matrices más sencillas, lo cual significa un gran ahorro en cuanto a la cantidad de cálculos necesarios que deba realizar una computadora.

Ejemplo 3 La transformada rápida de Fourier

Sean $n = 2^2 = 4$ y $\mathbf{F}_4$ la matriz del ejemplo 1:

$$\mathbf{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

A partir de (13), la factorización de $\mathbf{F}_4$ que se desea es

$$\mathbf{F}_4 = \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{array}\right)}_{\mathbf{A}} \underbrace{\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{P}}. \tag{14}$$

Hemos insertado líneas discontinuas en las matrices marcadas como $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ de tal manera que usted pueda identificar las submatrices $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{D}_2$, $-\mathbf{D}_2$ y $\mathbf{F}_2$ comparando (14) directamente con (13). También se le exhorta a multiplicar el segundo miembro de (14) y comprobar que se obtiene $\mathbf{F}_4$. Ahora, si $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$, entonces

$$\mathbf{F}_4\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 25 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -5 - 15i \\ -14 \\ -5 + 15i \end{pmatrix} = \mathbf{f}.$$

❑

Sin entrar en detalles, el cálculo de $\mathbf{F}_n$ requiere de n^2 operaciones, mientras que el uso de la factorización de matrices (la TRF) significa una reducción en la cantidad de cálculos a una cifra proporcional a $n \ln n$. Haga la prueba con valores más grandes de n y verá que esto representa ahorros significativos.

EJERCICIOS 7.5 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

1. Demuestre que $\mathbf{F}_4^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{F}_4$.
2. Demuestre la propiedad de análisis de la función delta de Dirac:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a).$$
[*Sugerencia:* Considere la función
$$\delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x-a| < \varepsilon \\ 0, & \text{en cualquier otra parte.} \end{cases}$$
Utilice el teorema del valor medio para las integrales y, después, establezca $\epsilon \to 0$.]
3. Determine la transformada de Fourier para la función delta de Dirac $\delta(x)$.
4. Demuestre que la función delta de Dirac es la identidad implícita en la operación de convolución, es decir, muestre $f*\delta = \delta*f = f$. [*Sugerencia:* Utilice las transformadas de Fourier y el problema 3.]
5. Demuestre que la derivada de la función delta de Dirac $\delta'(x-a)$ tiene la propiedad que examina la derivada de una función f en a. [*Sugerencia:* Utilice la integración por partes.]
6. Utilice un CAS para demostrar que la transformada de Fourier de la función $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} Ax}{\pi x}$ es la función pulso.
$$G(\alpha) = \begin{cases} 1, & -A < \alpha < A \\ 0, & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$
7. Escriba la matriz $\mathbf{F}_8$ y, después, escríbala en forma factorizada (13). Compruebe que el producto de los factores es $\mathbf{F}_8$. Si se le solicita comprobar el resultado, utilice un CAS para hacerlo.
8. Sea $\omega_n = e^{i2\pi/n} = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n}$. Como $e^{i2\pi k} = 1$, todos los números ω_n^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tienen la propiedad de que $(\omega_n^k)^n = 1$. Debido a lo anterior, ω_n^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, se llaman **raíces *n*-ésimas de la unidad** y son soluciones de la ecuación $z^n - 1 = 0$. Encuentre las raíces octavas de la unidad y grafíquelas en el plano xy donde un número complejo se escribe como $z = x + iy$. ¿Qué puede observar?

Tareas para el laboratorio de cómputo

9. Utilice un CAS para comprobar que la función $f*g$, donde $f(x) = e^{-5x^2}$ y $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\pi x}$, está limitada en la banda. Si su CAS lo puede hacer, trace las gráficas de $\mathcal{F}\{f*g\}$ y $F(\alpha)G(\alpha)$ para comprobar el resultado.
10. Si en su CAS hay un comando para ejecutar la transformada discreta de Fourier, seleccione seis puntos cualesquiera y compare los resultados obtenidos utilizando ese comando con los obtenidos a partir de la ecuación $\mathbf{c} = \frac{1}{6}\overline{\mathbf{F}}_6\mathbf{f}$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los ejercicios del 1 al 15, resuelva cada problema de valores en la frontera dado mediante una transformada integral apropiada. Cuando sea necesario formule supuestos acerca del acotamiento.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad 0 < y < \pi$$
$$u(x, 0) = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = e^{-x}, \quad x > 0$$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = 50 \operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 < x < 1$$
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad h > 0, x > 0, \quad t > 0$
$$u(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, t > 0$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad x > 0$$
4. $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$
$$u(x, 0) = u_0, \quad -\infty < x < \infty$$
5. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 1, \quad t > 0$
$$u(0, t) = t, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 0$$
$u(x, 0) = 0, \quad x > 0$. [*Sugerencia:* Utilice el teorema 4.9 del tomo I.]
6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen}\pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = -\operatorname{sen}\pi x, \quad 0 < x < 1$$

7. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ u_0, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \begin{cases} 0, & 0 < y < 1 \\ 1, & 1 < y < 2 \\ 0, & y > 2 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad 0 < x < \pi$$

9. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$

$$u(0, y) = \begin{cases} 50, & 0 < y < 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 100, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

10. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi$

$$u(0, y) = A, \quad 0 < y < \pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = Be^{-x}, \quad x > 0$$

12. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \; t > 0$

$$u(0, t) = u_0, \quad u(1, t) = u_0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1$$

[*Sugerencia:* Utilice la identidad

$$\operatorname{senh}(x - y) = \operatorname{senh} x \cosh y - \cosh x \operatorname{senh} y,$$

y después use el problema 6 de los ejercicios 7.1.]

13. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

14. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, \quad x > 0, \quad t > 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -50, \quad \lim_{x\to\infty} u(x, t) = 100, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 100, \quad x > 0$$

15. Demuestre que una solución al problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad u(x, 1) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

es $u(x, y) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\,\frac{\cosh \alpha y \cos \alpha(t - x)}{\cosh \alpha}\,dt\,d\alpha.$

Por Dayet

CAPÍTULO

8

Soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales

Estructura del capítulo

8.1 La ecuación de Laplace
8.2 La ecuación de calor
8.3 La ecuación de onda
Ejercicios de repaso del capítulo 8

En la sección 6.5 del tomo I estudiamos que una forma de aproximar la solución de un problema de segundo orden con valores en la frontera era trabajar con una ecuación de diferencias finitas como reemplazo de la ecuación diferencial ordinaria. La misma idea se puede aplicar a las ecuaciones diferenciales parciales. En las secciones correspondientes de este capítulo se formulará una ecuación en diferencias como reemplazo de la ecuación de Laplace, de la ecuación unidimensional de calor, y de la ecuación unidimensional de onda mediante la sustitución de las derivadas parciales u_{xx}, u_{yy}, u_{tt} y u_t por coeficientes en diferencias.

8.1 La ecuación de Laplace

Introducción De la sección 5.1 recuerde que las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden con dos variables independientes se clasifican en *elípticas*, *parabólicas* e *hiperbólicas*. A grandes rasgos, las ecuaciones diferenciales parciales elípticas involucran solamente derivadas parciales respecto a variables en el espacio y, como una consecuencia, las soluciones de dichas ecuaciones están determinadas por condiciones de frontera únicas. Las ecuaciones parabólicas y las hiperbólicas involucran derivadas parciales respecto a variables en el espacio y el tiempo, así que sus soluciones se determinan generalmente a partir de las condiciones iniciales y de frontera. La solución de una ecuación diferencial parcial elíptica (como la de Laplace) puede describir un sistema físico cuyo estado se encuentra en equilibrio (de estado estable); la solución de una ecuación diferencial parcial parabólica (digamos la ecuación de calor) puede describir un estado difuso, mientras que una ecuación diferencial parcial hiperbólica (la ecuación de onda) describe un estado vibratorio.

En esta sección comenzamos nuestro estudio con los métodos de aproximación apropiados para las ecuaciones elípticas. El enfoque se centrará en la ecuación diferencial parcial más sencilla, pero quizá la más importante de las ecuaciones de tipo elíptico: la ecuación de Laplace.

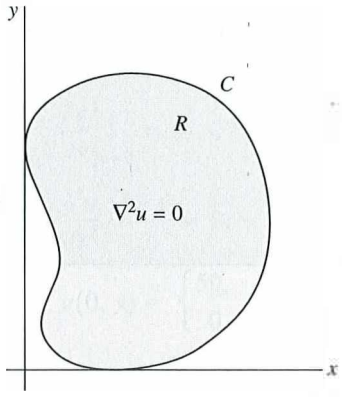


Figura 8.1 Región plana R con frontera C

Reemplazo de la ecuación en diferencias Suponga que estamos buscando una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en una región plana R acotada por la curva C. Vea la figura 8.1. De manera similar a (6) de la sección 6.5 del tomo I, mediante las diferencias centrales

$$u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y) \qquad \text{y} \qquad u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h),$$

se pueden obtener aproximaciones para las segundas derivadas parciales u_{xx} y u_{yy} utilizando cocientes en diferencias

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)] \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)]. \tag{2}$$

Ahora sumamos (1) y (2) para obtener una **aproximación de cinco puntos** al laplaciano:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y)].$$

Por lo tanto, podemos reemplazar la ecuación de Laplace con la ecuación en diferencias

$$u(x + h, y) + u(x, y + h) + u(x - h, y) + u(x, y - h) - 4u(x, y) = 0. \tag{3}$$

Si adoptamos la notación $u(x, y) = u_{ij}$ y

$$u(x + h, y) = u_{i+1,j}, \qquad u(x, y + h) = u_{i,j+1}$$

$$u(x - h, y) = u_{i-1,j}, \qquad u(x, y - h) = u_{i,j-1},$$

entonces (3) se convierte en

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = 0. \tag{4}$$

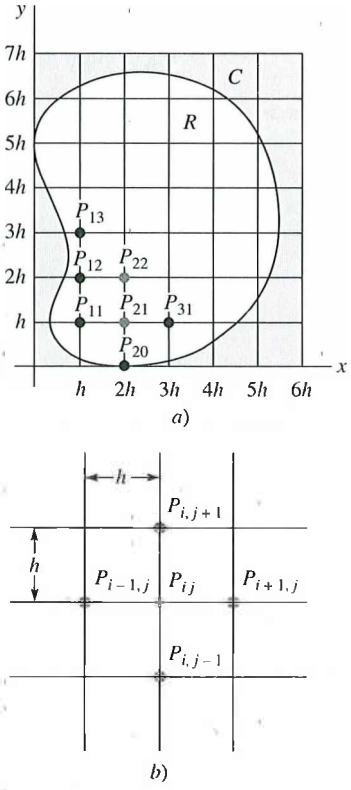


Figura 8.2 Región R colocada sobre una malla rectangular

Para comprender un poco mejor la ecuación (4) suponga la existencia de una malla rectangular constituida por líneas horizontales espaciadas h unidades entre sí y líneas verticales espaciadas h unidades entre sí colocada sobre la región R. El número h se llama **tamaño de la malla**. Consulte la figura 8.2*a*). Los puntos $P_{ij} = P(ih, jh)$, donde i

y j son enteros, de intersección de las líneas horizontales y verticales se llaman **puntos de la malla** o **puntos de la retícula**. Un punto de la malla es un **punto interior** si sus cuatro puntos de malla más cercanos son puntos de R. Los puntos localizados en R o en C que no sean interiores se llaman **puntos de frontera**. Por ejemplo, en la figura 8.2*a*) se tiene

$$P_{20} = P(2h, 0), \quad P_{11} = P(h, h), \quad P_{21} = P(2h, h), \quad P_{22} = P(2h, 2h),$$

y así sucesivamente. De los puntos listados, P_{21} y P_{22} son interiores, mientras que P_{20} y P_{11} son puntos de frontera. En la figura 8.2*a*), los puntos interiores se muestran en gris y los de frontera en negro. Ahora, a partir de (4), podemos observar que

$$u_{ij} = \tfrac{1}{4}\,[u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}], \tag{5}$$

y entonces, como indica la figura 8.2*b*), el valor de u_{ij} en un punto de malla interior de R es el promedio de los valores de u en cuatro puntos de malla cercanos. Los puntos cercanos $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i-1,j}$ y $P_{i,j-1}$ corresponden, respectivamente, a los cuatro puntos cardinales de la rosa de los vientos E, N, O y S.

Problema de Dirichlet Recuerde que en el **problema de Dirichlet** para la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$, los valores de $u(x, y)$ son prescritos en la frontera C de la región R. La idea fundamental es encontrar una solución aproximada a la ecuación de Laplace en puntos interiores de la malla, mediante el reemplazo de la ecuación diferencial parcial ubicada en estos puntos por la ecuación en diferencias (4). Por lo tanto, los valores aproximados de u en los puntos de la malla (digamos u_{ij}), están relacionados entre sí y, posiblemente, con valores conocidos de u si un punto de la malla se encuentra en la frontera C. De esta forma obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en el que despejamos la incógnita u_{ij}. El ejemplo siguiente ilustra el método de la región cuadrada.

Ejemplo 1 Repaso a problemas de valores en la frontera

En el problema 14 de los ejercicios 5.5 se pidió resolver el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2$$
$$u(0, y) = 0, \qquad u(2, y) = y(2 - y), \quad 0 < y < 2$$
$$u(x, 0) = 0, \qquad u(x, 2) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

utilizando el principio de superposición. Para aplicar el método numérico presente, comencemos con un tamaño de malla de $h = \frac{2}{3}$. Como podemos observar en la figura 8.3, esta elección nos da cuatro puntos interiores y ocho de frontera. Los números listados junto a los puntos de frontera son los valores exactos de u obtenidos a partir de la condición especificada a lo largo de esa frontera. Por ejemplo, en $P_{31} = P(3h, h) = P(2, \frac{2}{3})$ tenemos $x = 2$ y $y = \frac{2}{3}$, por lo que la condición $u(2, y)$ nos da $u(2, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}(2 - \frac{2}{3}) = \frac{8}{9}$. De manera similar, en $P_{13} = P(\frac{2}{3}, 2)$, la condición $u(x, 2)$ nos da $u(\frac{2}{3}, 2) = \frac{2}{3}$. Ahora aplicamos (4) en cada punto interior. Por ejemplo, en P_{11} tenemos $i = 1$ y $j = 1$, entonces (4) se convierte en

$$u_{21} + u_{12} + u_{01} + u_{10} - 4u_{11} = 0.$$

Puesto que $u_{01} = u(0, \frac{2}{3}) = 0$ y $u_{10} = u(\frac{2}{3}, 0) = 0$, la ecuación anterior se convierte en $-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0$. Repetir esto, respectivamente, en los puntos P_{21}, P_{12} y P_{22}, resulta en las tres ecuaciones adicionales:

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= 0 \\ u_{11} - 4u_{21} + u_{22} &= -\tfrac{8}{9} \\ u_{11} - 4u_{12} + u_{22} &= -\tfrac{2}{3} \\ u_{21} + u_{12} - 4u_{22} &= -\tfrac{14}{9}. \end{aligned} \tag{6}$$

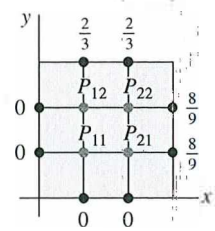


Figura 8.3 Región cuadrada R del ejemplo 1

Utilizamos un sistema algebraico de cómputo para resolver este sistema y encontramos que las temperaturas aproximadas en los cuatro puntos interiores son

$$u_{11} = \tfrac{7}{36} = 0.1944, \qquad u_{21} = \tfrac{5}{12} = 0.4167,$$
$$u_{12} = \tfrac{13}{36} = 0.3611, \qquad u_{22} = \tfrac{7}{12} = 0.5833. \quad \square$$

De la misma forma que en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, esperamos que un valor más pequeño de h mejorará la precisión de esta aproximación. Sin embargo, utilizar una malla más pequeña significa, desde luego, que existen más puntos interiores de malla y, por lo tanto, un mayor número de sistemas de ecuaciones a resolver. Para una región *cuadrada* cuya longitud de lado es L, un tamaño de malla de $h = L/n$ dará un total de $(n-1)^2$ puntos interiores de malla. En el ejemplo 1, para $n = 8$, el tamaño de la malla es un razonable $h = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, pero el número de puntos interiores es de $(8-1)^2 = 49$. Así, tenemos 49 ecuaciones con 49 incógnitas. En el ejemplo siguiente utilizamos un tamaño de malla de $h = \frac{1}{2}$.

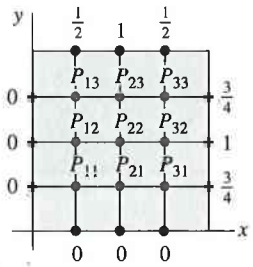


Figura 8.4 Región R del ejemplo 1 con puntos de malla adicionales

Ejemplo 2 Ejemplo 1 con más puntos de malla

Tal como podemos observar en la figura 8.4, con $n = 4$, un tamaño de malla $h = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ para el cuadrado del ejemplo 1 nos da $3^2 = 9$ puntos interiores de malla. Aplicando (4) en estos puntos y utilizando las condiciones de frontera indicadas, obtenemos nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Para que usted pueda comprobar los resultados, escribimos el sistema en forma no simplificada:

$$\begin{aligned}
u_{21} + u_{12} + 0 + 0 - 4u_{11} &= 0\\
u_{31} + u_{22} + u_{11} + 0 - 4u_{21} &= 0\\
\tfrac{3}{4} + u_{32} + u_{21} + 0 - 4u_{31} &= 0\\
u_{22} + u_{13} + u_{11} + 0 - 4u_{12} &= 0\\
u_{32} + u_{23} + u_{12} + u_{21} - 4u_{22} &= 0\\
1 + u_{33} + u_{22} + u_{31} - 4u_{32} &= 0\\
u_{23} + \tfrac{1}{2} + 0 + u_{12} - 4u_{13} &= 0\\
u_{33} + 1 + u_{13} + u_{22} - 4u_{23} &= 0\\
\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2} + u_{23} + u_{32} - 4u_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

En este caso, un CAS nos da

$$u_{11} = \tfrac{7}{64} = 0.1094, \quad u_{21} = \tfrac{51}{224} = 0.2277, \quad u_{31} = \tfrac{177}{448} = 0.3951$$
$$u_{12} = \tfrac{47}{224} = 0.2098, \quad u_{22} = \tfrac{13}{32} = 0.4063, \quad u_{32} = \tfrac{135}{224} = 0.6027$$
$$u_{13} = \tfrac{145}{448} = 0.3237, \quad u_{23} = \tfrac{131}{224} = 0.5848, \quad u_{33} = \tfrac{39}{64} = 0.6094. \quad \square$$

Después de simplificar (7) resulta interesante observar que la matriz de coeficientes de 9×9 es

$$\begin{pmatrix}
\mathbf{-4} & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & \mathbf{-4} & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \mathbf{-4} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0\\
\mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{-4} & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\
0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \mathbf{-4} & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0\\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \mathbf{-4} & 0 & 0 & \mathbf{1}\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{-4} & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \mathbf{-4} & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & \mathbf{-4}
\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Éste es un ejemplo de una **matriz dispersa** en la que un gran porcentaje de elementos son cero. La matriz (8) también es ejemplo de una **matriz bandeada**. Estos tipos de

matrices se caracterizan por las propiedades de que los elementos ubicados en la diagonal principal o en las diagonales (o bandas) paralelas a la diagonal principal son todos diferentes de cero. En (8), las bandas en tono oscuro están separadas por diagonales constituidas o no por ceros.

Iteración de Gauss-Seidel Los problemas que requieren aproximaciones para soluciones de ecuaciones diferenciales parciales invariablemente llevan a sistemas de ecuaciones algebraicas lineales de gran tamaño. No es raro tener que resolver sistemas conformados por cientos de ecuaciones. A pesar de que un método de solución directo como la eliminación gaussiana deja sin modificar los elementos que son ceros fuera de las bandas en una matriz como la (8), llena las posiciones entre las bandas con elementos diferentes de cero. Como el almacenamiento de matrices muy grandes utiliza gran cantidad de memoria en la computadora, es una práctica muy común resolver sistemas grandes en forma indirecta. Un popular método indirecto se llama **iteración de Gauss-Seidel**.

Ilustraremos este método para el sistema (6). En aras de la simplicidad, reemplazamos las variables con doble subíndice u_{11}, u_{21}, u_{12} y u_{22} por x_1, x_2, x_3 y x_4, respectivamente.

Ejemplo 3 Iteración de Gauss-Seidel

Paso 1: *Despeje las variables de la diagonal principal del sistema en cada una de las ecuaciones.* Esto es, en (6) despejar x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda, y así sucesivamente:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.25x_2 + 0.25x_3 \\ x_2 &= 0.25x_1 + 0.25x_4 + 0.2222 \\ x_3 &= 0.25x_1 + 0.25x_4 + 0.1667 \\ x_4 &= 0.25x_2 + 0.25x_3 + 0.3889. \end{aligned} \tag{9}$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse directamente utilizando (5) en lugar de (4) en los puntos interiores.

Paso 2: *Iteraciones.* Comenzamos haciendo una estimación inicial de los valores x_1, x_2, x_3 y x_4. Si éste fuera un simple sistema de ecuaciones lineales y no supiéramos nada acerca de la solución, podríamos comenzar con $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Sin embargo, puesto que la solución de (9) representa aproximaciones a la solución de un problema de valores en la frontera, podría parecer razonable el uso de la estimación inicial para los valores de $x_1 = u_{11}$, $x_2 = u_{21}$, $x_3 = u_{12}$ y $x_4 = u_{22}$ el promedio de todas las condiciones de frontera. En este caso, el promedio de los números localizados en los ocho puntos de frontera que se muestran en la figura 8.2 es aproximadamente de 0.4. Por lo tanto, nuestra estimación inicial es $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.4$ y $x_4 = 0.4$. El método de iteraciones de Gauss-Seidel utiliza los valores x tan pronto como se calculan. Observe que la primera ecuación de (9) depende solamente de x_2 y x_3; entonces, sustituyendo $x_2 = 0.4$ y $x_3 = 0.4$ nos da $x_1 = 0.2$. Como la segunda y tercera ecuaciones dependen de x_1 y x_4, utilizamos los valores calculados $x_1 = 0.2$ y $x_4 = 0.4$ para obtener $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$. La cuarta ecuación depende de x_2 y x_3, así que usamos los nuevos valores $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ para obtener $x_4 = 0.5611$. En resumen, la primera iteración nos da los valores

$$x_1 = 0.2, \quad x_2 = 0.3722, \quad x_3 = 0.3167, \quad x_4 = 0.5611.$$

Observe qué tan cercanos están estos valores a los reales proporcionados al final del ejemplo 1.

La segunda iteración comienza al sustituir $x_2 = 0.3722$ y $x_3 = 0.3167$ en la primera ecuación. Esto nos da $x_1 = 0.1722$. A partir de $x_1 = 0.1722$ y el último valor calculado de x_4 (es decir, $x_4 = 0.5611$), la segunda y tercera ecuaciones dan, respectivamente, $x_2 = 0.4055$ y $x_3 = 0.3500$. Utilizando estos dos valores encontramos a partir de la cuarta ecuación que $x_4 = 0.5678$. Al final de la segunda iteración tenemos

$$x_1 = 0.1722, \quad x_2 = 0.4055, \quad x_3 = 0.3500, \quad x_4 = 0.5678.$$

De la tercera a la séptima iteraciones se resumen en la tabla 8.1.

Tabla 8.1 Iteración

	Tercera	Cuarta	Quinta	Sexta	Séptima
x_1	0.1889	0.1931	0.1941	0.1944	0.1944
x_2	0.4139	0.4160	0.4165	0.4166	0.4166
x_3	0.3584	0.3605	0.3610	0.3611	0.3611
x_4	0.5820	0.5830	0.5833	0.5833	0.5833

❑

Nota.

Para aplicar la iteración de Gauss-Seidel a un sistema general de n ecuaciones lineales con n incógnitas, la variable x_i debe aparecer realmente en la i-ésima ecuación del sistema. Además, luego de despejar x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, en cada ecuación, el sistema resultante tiene la forma $\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{B}$, donde todos los elementos de la diagonal principal de $\mathbf{A}$ son cero.

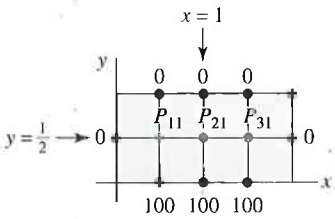


Figura 8.5 Región rectangular R

Comentarios

i) En los ejemplos proporcionados en esta sección, los valores de u_{ij} se determinaron utilizando valores conocidos de u en los puntos de frontera. Sin embargo, ¿qué hacemos si la región es tal que los puntos de frontera no coinciden con la frontera real C de la región R? En este caso, los valores requeridos pueden obtenerse mediante la interpolación.

ii) A veces puede reducirse el número de ecuaciones a resolver empleando la simetría. Considere la región rectangular $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, que muestra la figura 8.5. Las condiciones de frontera son $u = 0$ a lo largo de las fronteras $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$ y $u = 100$ a lo largo de $y = 0$. La región es simétrica respecto a las líneas $x = 1$ y $y = \frac{1}{2}$, y los puntos interiores P_{11} y P_{31} son equidistantes en relación con los puntos de frontera vecinos donde los valores específicos de u son los mismos. En consecuencia, suponemos que $u_{11} = u_{31}$, y entonces el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se simplifica a dos ecuaciones con dos incógnitas. Consulte el problema 2 de los ejercicios 8.1.

iii) En el contexto de aproximar una solución a la ecuación de Laplace, la técnica de iteración del ejemplo 3 se conoce a menudo como el **método de Liebman**.

iv) Puede ser que no se note en una computadora; sin embargo, la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel (o método de Liebman) puede no resultar particularmente rápida. Asimismo, en un contexto más general, la iteración de Gauss-Seidel puede no converger del todo. Para enterarse de condiciones que sean suficientes para garantizar la convergencia de la iteración de Gauss-Seidel, se invita al lector a consultar libros donde se trate el análisis numérico.

EJERCICIOS 8.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas del 1 al 8, utilice una computadora como ayuda para realizar los cálculos.

En los problemas del 1 al 4, utilice (4) para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de la región dada. Aplique la simetría cuando sea posible.

1. $u(0, y) = 0$, $u(3, y) = y(2 - y)$, $0 < y < 2$

   $u(x, 0) = 0$, $u(x, 2) = x(3 - x)$, $0 < x < 3$

   tamaño de la malla: $h = 1$

2. $u(0, y) = 0$, $u(2, y) = 0$, $0 < y < 1$

   $u(x, 0) = 100$, $u(x, 1) = 0$, $0 < x < 2$

   tamaño de la malla: $h = \frac{1}{2}$

3. $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 0$, $0 < y < 1$

   $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = \operatorname{sen} \pi x$, $0 < x < 1$

   tamaño de la malla: $h = \frac{1}{3}$

4. $u(0, y) = 108y^2(1 - y)$, $u(1, y) = 0$, $0 < y < 1$
   $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = 0$, $0 < x < 1$
   tamaño de la malla: $h = \frac{1}{3}$

En los problemas 5 y 6, utilice (5) y la iteración de Gauss-Seidel para aproximar la solución de la ecuación de Laplace en los puntos interiores de un cuadrado unitario. Utilice como tamaño de la malla $h = \frac{1}{4}$. En el problema 5 están dadas las condiciones de frontera; en el problema 6, los valores de u en los puntos de frontera aparecen en la figura 8.6.

5. $u(0, y) = 0$, $u(1, y) = 100y$, $0 < y < 1$
   $u(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = 100x$, $0 < x < 1$

6.

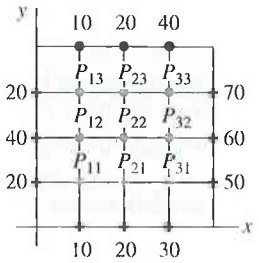


Figura 8.6 Región del problema 6

7. *a*) En el problema 12 de los ejercicios 5.6, usted resolvió un problema de potencial utilizando la forma especial de la ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$. Demuestre que el reemplazo de la ecuación en diferencias para la de Poisson es

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} = h^2 f(x, y).$$

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para aproximar la solución de la ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$ en los puntos interiores de la región indicada en la figura 8.7. El tamaño de la malla es $h = \frac{1}{2}$, $u = 1$ en cada punto localizado a lo largo de *ABCD*, y $u = 0$ en cada punto de *DEFGA*. Aplique la simetría y, si fuese necesario, la iteración de Gauss-Seidel.

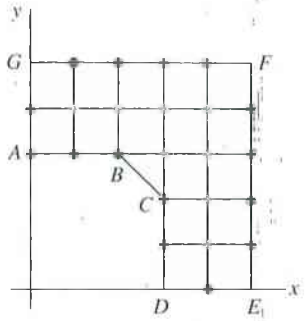


Figura 8.7 Región del problema 7

8. Utilice el resultado del inciso *a*) del problema 7 para aproximar la solución de la ecuación de Poisson $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -64$ en los puntos interiores de la región de la figura 8.8. La malla es de $h = \frac{1}{8}$ y $u = 0$ en cada punto de frontera de la región. De ser necesario, utilice la iteración de Gauss-Seidel.

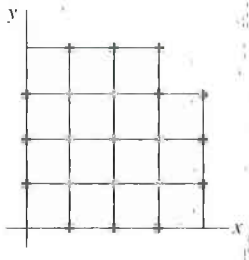


Figura 8.8 Región del problema 8

8.2 La ecuación de calor

Introducción En el siguiente análisis, la idea fundamental es la misma que en la sección 8.1: aproximamos una solución de una ecuación diferencial parcial, esta vez una ecuación diferencial parcial parabólica, reemplazando la ecuación por otra de diferencias finitas. Sin embargo, a diferencia de la sección anterior, consideraremos *dos* métodos de aproximación de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales parciales parabólicas: una llamada método explícito y la otra método implícito. Para efectos de definición, trataremos solamente la ecuación de calor en una dimensión.

Reemplazo por una ecuación en diferencias Para aproximar la solución $u(x, t)$ de la ecuación de calor en una dimensión

$$c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

de nuevo reemplazamos las derivadas por cocientes en diferencias. Utilizando la aproximación central de diferencias (2) de la sección 8.1,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)]$$

y la aproximación en diferencias hacia delante (3) de la sección 6.5 del tomo I,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{h}[u(x, t + h) - u(x, t)]$$

la ecuación (1) se convierte en

$$\frac{c}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] = \frac{1}{k}[u(x, t + k) - u(x, t)]. \tag{2}$$

Si establecemos $\lambda = ck/h^2$ y

$$u(x, t) = u_{ij},\ u(x + h, t) = u_{i+1,j},\ u(x - h, t) = u_{i-1,j},\ u(x, t + k) = u_{i,j+1},$$

entonces, después de efectuar algunas simplificaciones, (2) es

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i+1,j} + (1 - 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j}. \tag{3}$$

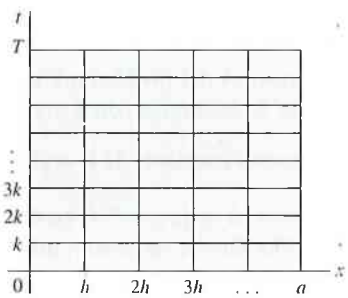


Figura 8.9 Región rectangular en el plano xt

En el caso de la ecuación de calor (1), las condiciones de frontera típicas son $u(0, t) = u_1$, $u(a, t) = u_2$, $t > 0$, y una condición inicial es $u(x, 0) = f(x)$, $0 < x < a$. La función f puede interpretarse como la distribución inicial de temperatura en una varilla homogénea que se extiende desde $x = 0$ hasta $x = a$; u_1 y u_2 pueden interpretarse como temperaturas constantes en los puntos extremos de la varilla. Aunque no lo demostraremos, el problema de valores en la frontera constituido por (1) y estas dos condiciones de frontera más una condición inicial tiene una solución única cuando f es continua en el intervalo cerrado $[0, a]$. Se supondrá esta última condición, por lo que reemplazaremos la condición inicial por $u(x, 0) = f(x)$, $0 \le x \le a$. Además, en lugar de trabajar con la región semiinfinita en el plano xt definido mediante las desigualdades $0 \le x \le a$, $t \ge 0$, utilizamos una región rectangular definida por $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es un valor de tiempo específico. En esta región colocamos una malla rectangular compuesta por líneas verticales separadas entre sí en h unidades y líneas horizontales con separación entre sí de k unidades. Consulte la figura 8.9. Si seleccionamos dos enteros positivos n y m y definimos

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{y} \quad k = \frac{T}{m},$$

entonces las líneas verticales y horizontales de la retícula estarán definidas mediante

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

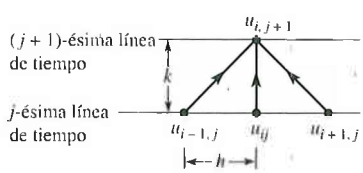


Figura 8.10 A partir de los tres valores de u en $t = j$ se determina u en $t = j + 1$

Tal como ilustra la figura 8.10, la idea aquí es aplicar la fórmula (3) para calcular los valores de la solución $u(x, t)$ en los puntos sobre la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo utilizando solamente valores de la j-ésima línea de tiempo. Por ejemplo, los valores sobre la primera línea de tiempo ($j = 1$) dependen de la condición inicial $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ dada en el tiempo cero ($j = 0$). Este tipo de procedimiento numérico se denomina **método explícito de diferencia finita**.

Ejemplo 1 Uso del método de diferencia finita

Consideremos el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.5$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 0.5$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Primero identificamos $c = 1$, $a = 1$ y $T = 0.5$. Al seleccionar, digamos, $n = 5$ y $m = 50$, entonces $h = \frac{1}{5} = 0.2$, $k = \frac{0.5}{50} = 0.01$, $\lambda = 0.25$,

$$x_i = i\frac{1}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \quad \text{y} \quad t_j = j\frac{1}{100}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, 50.$$

Por lo tanto, (3) se convierte en

$$u_{i,j+1} = 0.25(u_{i+1,j} + 2u_{ij} + u_{i-1,j}).$$

Al establecer el valor de $j = 0$ en esta fórmula, obtenemos otra fórmula para las aproximaciones de la temperatura u en la primera línea de tiempo:

$$u_{i,1} = 0.25(u_{i+1,0} + 2u_{i,0} + u_{i-1,0}).$$

Si después establecemos $i = 1, \ldots, 4$ en la última ecuación obtenemos, a su vez,

$$u_{11} = 0.25(u_{20} + 2u_{10} + u_{00})$$

$$u_{21} = 0.25(u_{30} + 2u_{20} + u_{10})$$

$$u_{31} = 0.25(u_{40} + 2u_{30} + u_{20})$$

$$u_{41} = 0.25(u_{50} + 2u_{40} + u_{30}).$$

La primera ecuación de esta lista se interpreta como

$$u_{11} = 0.25(u(x_2, 0) + 2u(x_1, 0) + u(0, 0))$$

$$= 0.25(u(0.4, 0) + 2u(0.2, 0) + u(0, 0)).$$

A partir de la condición inicial $u(x, 0) = \text{sen } \pi x$, la última línea se convierte en

$$u_{11} = 0.25(0.951056516 + 2(0.587785252) + 0) = 0.531656755.$$

Este número representa una aproximación para la temperatura $u(0.2, 0.01)$.

Como se requeriría de una tabla mucho más grande, con más de 200 valores, resumir todas las aproximaciones sobre la malla rectangular determinada por h y k, en la tabla 8.2 proporcionamos solamente algunos valores seleccionados.

Tabla 8.2 Aproximación explícita a la ecuación diferencial con $h = 0.2$, $k = 0.01$, $\lambda = 0.25$

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.2154	0.3486	0.3486	0.2154
0.20	0.0790	0.1278	0.1278	0.0790
0.30	0.0289	0.0468	0.0468	0.0289
0.40	0.0106	0.0172	0.0172	0.0106
0.50	0.0039	0.0063	0.0063	0.0039

El lector deberá comprobar, mediante los métodos del capítulo 5, que una solución exacta para el problema de valores en la frontera del ejemplo 1 está dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \text{ sen } \pi x$. Utilizando esta solución, comparamos en la tabla 8.3 una muestra de los valores exactos con sus aproximaciones correspondientes.

Tabla 8.3

Exacto	Aproximado
$u(0.4, 0.05) = 0.5806$	$u_{25} = 0.5758$
$u(0.6, 0.06) = 0.5261$	$u_{36} = 0.5208$
$u(0.2, 0.10) = 0.2191$	$u_{1,10} = 0.2154$
$u(0.8, 0.14) = 0.1476$	$u_{4,14} = 0.1442$

Estabilidad Estas aproximaciones son comparables a los valores exactos y resultan lo suficientemente precisas como para cumplir algunos propósitos. Sin embargo, existe un problema relacionado con el método anterior. Recuerde que un método numérico es **inestable** si los errores por redondeo o de cualquier otro tipo crecen demasiado rápido conforme los cálculos se lleven a cabo. El procedimiento numérico del ejemplo 1 puede presentar este tipo de comportamiento. Es posible demostrar que el procedimiento resulta estable si λ es menor o igual que 0.5, sin embargo, es inestable para cualquier otro valor. Para obtener $\lambda = 0.25 \leq 0.5$ en el ejemplo 1, tuvimos que seleccionar el valor $k = 0.01$; la necesidad de utilizar tamaños de intervalo muy pequeños en la dirección del tiempo es la principal falla de este método. Se le pide al lector resolver el problema 12 de los ejercicios 8.2 y ser testigo de la inestabilidad predecible cuando $\lambda = 1$.

Método de Crank-Nicholson Existen **métodos implícitos de diferencia finita** para resolver ecuaciones diferenciales parciales parabólicas. Estos métodos requieren que resolvamos un sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo. Sin embargo, los métodos implícitos no experimentan problemas de inestabilidad.

El algoritmo que presentaron J. Crank y P. Nicholson en 1947 se utiliza principalmente para resolver la ecuación de calor. El algoritmo consiste en reemplazar la segunda derivada parcial en $c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ por un promedio de dos cocientes de diferenciales centrales, uno evaluado en t y el otro en $t + k$:

$$\frac{c}{2}\left[\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \frac{u(x+h,t+k) - 2u(x,t+k) + u(x-h,t+k)}{h^2}\right] = \frac{1}{k}[u(x,t+k) - u(x,t)]. \quad (4)$$

Si definimos de nuevo $\lambda = ck/h^2$, entonces, después de volver a ordenar los términos, podemos escribir (4) como

$$-u_{i-1,j+1} + \alpha u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} - \beta u_{ij} + u_{i-1,j}, \quad (5)$$

donde $\alpha = 2(1 + 1/\lambda)$ y $\beta = 2(1 - 1/\lambda)$, $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, e $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Por cada valor seleccionado de j, la ecuación en diferencias (5) para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ da $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas $u_{i,j+1}$. Debido a las condiciones de frontera prescritas, los valores de $u_{i,j+1}$ son conocidos para $i = 0$ y para $i = n$. Por ejemplo, en el caso $n = 4$, el sistema de ecuaciones para determinar los valores aproximados de u en la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo es

$$\begin{aligned}
-u_{0,j+1} + \alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j}\\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}\\
-u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} - u_{4,j+1} &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}
\end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned}
\alpha u_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= b_1\\
-u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= b_2\\
-u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} &= b_3,
\end{aligned} \quad (6)$$

donde

$$\begin{aligned}
b_1 &= u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}\\
b_2 &= u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}\\
b_3 &= u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1}.
\end{aligned}$$

En general, si usamos la ecuación en diferencias (5) para determinar los valores de u en la $(j + 1)$-ésima línea de tiempo, necesitaremos resolver el sistema lineal $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ es una **matriz tridiagonal**,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0\\
-1 & \alpha & -1 & 0 & 0 & & & 0\\
0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & & & 0\\
0 & 0 & -1 & \alpha & -1 & & & 0\\
\vdots & & & & & \ddots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \alpha & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha
\end{pmatrix}$$

y los elementos de la matriz columna **B** son

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1}$$

$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j}$$

$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j}$$

$$\vdots$$

$$b_{n-1} = u_{n,j} - \beta u_{n-1,j} + u_{n-2,j} + u_{n,j+1}.$$

Ejemplo 2 Uso del método de Crank-Nicholson

Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$0.25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 2, \quad 0 < t < 0.3$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(2, t) = 0, \ 0 \le t \le 0.3$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \qquad 0 \le x \le 2,$$

con $n = 8$ y $m = 30$.

Solución A partir de las identidades $a = 2$, $T = 0.3$, $h = \frac{1}{4} = 0.25$, $k = \frac{1}{100} = 0.01$ y $c = 0.25$ obtenemos $\lambda = 0.04$. Con ayuda de una computadora obtuvimos los resultados de la tabla 8.4. Como en el ejemplo 1, los elementos de esta tabla solamente representan un número selecto de las 210 aproximaciones localizadas en la malla rectangular determinada por h y k.

Tabla 8.4 Método de Crank-Nicholson con $h = 0.25$, $k = 0.01$, $\lambda = 0.25$

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	0.7071	1.0000	0.7071	0.0000	−0.7071	−1.0000	−0.7071
0.05	0.6289	0.8894	0.6289	0.0000	−0.6289	−0.8894	−0.6289
0.10	0.5594	0.7911	0.5594	0.0000	−0.5594	−0.7911	−0.5594
0.15	0.4975	0.7036	0.4975	0.0000	−0.4975	−0.7036	−0.4975
0.20	0.4425	0.6258	0.4425	0.0000	−0.4425	−0.6258	−0.4425
0.25	0.3936	0.5567	0.3936	0.0000	−0.3936	−0.5567	−0.3936
0.30	0.3501	0.4951	0.3501	0.0000	−0.3501	−0.4951	−0.3501

❑

De la misma forma que en el ejemplo 1, el problema de valores en la frontera del ejemplo 2 también tiene una solución exacta dada por $u(x, t) = e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \pi x$. Las comparaciones de muestra listadas en la tabla 8.5 indican que los errores absolutos son del orden de 10^{-2} o 10^{-3}. Se pueden obtener errores más pequeños disminuyendo el valor de h o el de k.

Tabla 8.5

Exacto	Aproximado
$u(0.75, 0.05) = 0.6250$	$u_{35} = 0.6289$
$u(0.50, 0.20) = 0.6105$	$u_{2,20} = 0.6259$
$u(0.25, 0.10) = 0.5525$	$u_{1,10} = 0.5594$

EJERCICIOS 8.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-20.

En los problemas del 1 al 12, utilice una computadora como ayuda para realizar los cálculos.

1. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 2,\ 0 < t < 1$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0,\ 0 \le t \le 1$$
$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Use $n = 8$ y $m = 40$.

2. Al aplicar la solución por serie de Fourier del problema 1 de los ejercicios 5.3 con $L = 2$, podemos sumar los primeros 20 términos para calcular los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ para encontrar la solución $u(x, t)$ del problema 1. Un estudiante escribió un programa de computadora para realizar esto y obtuvo: $u(0.25, 0.1) = 0.3794$, $u(1, 0.5) = 0.1854$ y $u(1.5, 0.8) = 0.0623$. Suponga que estos resultados son precisos para todos los dígitos proporcionados. Compare estos valores con las aproximaciones obtenidas en el problema 1. En cada caso, determine los errores absolutos.

3. Resuelva el problema 1 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 40$. Utilice los valores de $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ proporcionados en el problema 2 para calcular los errores absolutos.

4. Repita el problema 1 con $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores para $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ dados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. ¿Por qué son tan imprecisas las aproximaciones en este caso?

5. Resuelva el problema 1 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 8$ y $m = 20$. Utilice los valores para $u(0.25, 0.1)$, $u(1, 0.5)$ y $u(1.5, 0.8)$ dados en el problema 2 para calcular los errores absolutos. Compare los errores absolutos con los obtenidos en el problema 4.

6. En la sección 5.2 se demostró que si una varilla de longitud L está hecha de un material con conductividad térmica K, calor específico γ y densidad ρ, la temperatura $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < L.$$

Considere el problema de valores en la frontera constituido por la ecuación anterior y las condiciones

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \le t \le 10$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \le x \le L.$$

Utilice la ecuación en diferencias (3) de esta sección con $n = 10$ y $m = 10$ para aproximar la solución del problema de valores en la frontera cuando

a) $L = 20, K = 0.15, \rho = 8.0, \gamma = 0.11, f(x) = 30$

b) $L = 50, K = 0.15, \rho = 8.0, \gamma = 0.11, f(x) = 30$

c) $L = 20, K = 1.10, \rho = 2.7, \gamma = 0.22, f(x) = 0.5x(20 - x)$

d) $L = 100, K = 1.04, \rho = 10.6, \gamma = 0.06,$

$$f(x) = \begin{cases} 0.8x, & 0 \le x \le 50 \\ 0.8(100 - x), & 50 < x \le 100. \end{cases}$$

7. Resuelva el problema 6 mediante el método de Crank-Nicholson con $n = 10$ y $m = 10$.

8. Repita el problema 6 si las temperaturas en los puntos extremos son $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 20$, $0 \le t \le 10$.

9. Resuelva el problema 8 mediante el método de Crank-Nicholson.

10. Considere el problema de valores en la frontera del ejemplo 2. Suponga que $n = 4$.

a) Calcule el nuevo valor de λ.

b) Utilice la ecuación de diferencias de Crank-Nicholson (5) para determinar el sistema de ecuaciones para u_{11}, u_{21} y u_{31}, esto es, los valores aproximados de u en la primera línea de tiempo. [*Sugerencia:* Fije el valor de $j = 0$ en (5), y permita que i tome los valores 1, 2, 3.]

c) Resuelva el sistema de tres ecuaciones sin ayuda de un programa de computadora. Compare sus resultados con los elementos correspondientes de la tabla 8.4.

11. Considere una varilla cuya longitud sea $L = 20$ para la cual $K = 1.05$, $\rho = 10.6$ y $\gamma = 0.056$. Suponga que

$$u(0, t) = 20, \quad u(20, t) = 30$$
$$u(x, 0) = 50.$$

a) Utilice el método que se describió en la sección 5.6 para calcular la solución de estado estable $\psi(x)$.

b) Utilice el método de Crank-Nicholson para aproximar las temperaturas $u(x, t)$ para $0 \le t \le T_{\text{máx}}$. Seleccione $T_{\text{máx}}$ lo suficientemente grande para permitir que las temperaturas se aproximen a los valores de estado estable. Compare las aproximaciones para $t = T_{\text{máx}}$ con los valores de $\psi(x)$ calculados en el inciso *a*).

12. Utilice la ecuación en diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < 1$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

Use $n = 5$ y $m = 25$.

8.3 La ecuación de onda

Introducción En esta sección, aproximamos una solución de la ecuación unidimensional de onda utilizando el método en diferencias finitas presentado en las dos secciones anteriores. La ecuación unidimensional de onda es el prototipo de la ecuación diferencial parcial hiperbólica.

Reemplazo de la ecuación en diferencias Suponga que $u(x, t)$ representa una solución de la ecuación unidimensional de onda

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Utilizamos dos diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{1}{k^2}[u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)]$$

para reemplazar la ecuación (1) por

$$\frac{c^2}{h^2}[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)] = \frac{1}{k^2}[u(x, t + k) - 2u(x, t) + u(x, t - k)]. \tag{2}$$

Despejamos (2) para $u(x, t + k)$, lo que nos da $u_{i,j+1}$. Si $\lambda = ck/h$, entonces (2) resulta en

$$u_{i,j+1} = \lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1 - \lambda^2)u_{ij} + \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \tag{3}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, m - 1$.

Para el caso en que la ecuación de onda (1) es un modelo para los desplazamientos verticales $u(x, t)$ de una cuerda vibratoria, las condiciones de frontera típicas son $u(0, t) = 0$, $u(a, t) = 0$, $t > 0$, y las condiciones iniciales son $u(x, 0) = f(x)$, $\partial u/\partial t|_{t=0} = g(x)$, $0 < x < a$. Las funciones f y g pueden interpretarse como la posición inicial y la velocidad inicial de la cuerda. El método numérico basado en la ecuación (3), así como el primer método estudiado en la sección 8.2, es un método explícito de diferencias finitas. Como antes, aplicamos la ecuación de diferencias (3) para aproximar la solución $u(x, t)$ de (1) utilizando las condiciones de frontera e inicial sobre una región rectangular situada en el plano xt definido mediante las desigualdades $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$, donde T es un valor específico de tiempo. Si n y m son enteros positivos y

$$h = \frac{a}{n} \quad \text{y} \quad k = \frac{T}{m},$$

las líneas horizontal y vertical de la retícula ubicada en esta región están definidas por

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad \text{y} \quad t_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Tal como se muestra en la figura 8.11, (3) nos permite obtener la aproximación $u_{i,j+1}$ en la línea de tiempo $(j + 1)$-ésima a partir de los valores indicados en las líneas de tiempo j-ésima y $(j - 1)$-ésima. Además, utilizamos

$$u_{0,j} = u(0, jk) = 0, \quad u_{n,j} = u(a, jk) = 0 \quad \leftarrow \text{condiciones de frontera}$$

y

$$u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i). \quad \leftarrow \text{condición inicial}$$

Hay un pequeño problema antes de comenzar. Usted puede observar, a partir de (3), que para $j = 1$ necesitamos saber los valores de $u_{i,1}$ (esto es, los valores de u en la primera línea de tiempo) con la finalidad de calcular $u_{i,2}$. Sin embargo, a partir de la figura

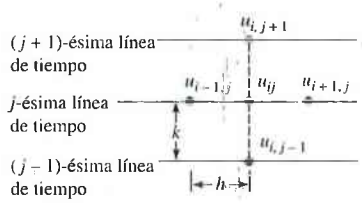


Figura 8.11 u en $t = j + 1$ se determina a partir de los tres valores de u en $t = j$ y de un valor en $t = j - 1$

8.11, con $j = 0$, podemos observar que los valores de $u_{i,1}$ en la primera línea de tiempo dependen de los valores de $u_{i,0}$ en la línea de tiempo cero y de los valores de $u_{i,-1}$. Para calcular estos últimos, utilizamos la condición de velocidad inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. En $t = 0$ es posible deducir por la expresión (5) de la sección 6.5 del tomo I, es decir, $y'(x) \approx \dfrac{1}{2h}[y(x+h) - y(x-h)]$ que

$$g(x_i) = u_t(x_i, 0) \approx \frac{u(x_i, k) - u(x_i, -k)}{2k}. \tag{4}$$

Con la finalidad de que tenga sentido el término $u(x_i, -k) = u_{i,-1}$ en (4), debemos suponer una $u(x, t)$ extendida hacia atrás en el tiempo. A partir de (4) se deduce que

$$u(x_i, -k) \approx u(x_i, k) - 2kg(x_i)$$

Este último resultado sugiere que definamos

$$u_{i,-1} = u_{i,1} - 2kg(x_i) \tag{5}$$

en la iteración de (3). Sustituyendo (5) en (3) cuando $j = 0$, obtenemos el caso especial

$$u_{i,1} = \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + (1 - \lambda^2)u_{i,0} + kg(x_i). \tag{6}$$

Ejemplo 1 Uso del método de diferencias finitas

Aproxime la solución del problema de valores en la frontera

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

utilizando (3) con $n = 5$ y $m = 20$.

Solución Generamos las identidades $c = 2$, $a = 1$ y $T = 1$. Con $n = 5$ y $m = 20$, obtenemos $h = \frac{1}{5} = 0.2$, $k = \frac{1}{20} = 0.05$, y $\lambda = 0.5$. Por lo tanto, con $g(x) = 0$, las ecuaciones (6) y (3) se convierten, respectivamente, en

$$u_{i,1} = 0.125(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + 0.75u_{i,0} \tag{7}$$

$$u_{i,j+1} = 0.25u_{i+1,j} + 1.5u_{ij} + 0.25u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \tag{8}$$

Para $i = 1, 2, 3, 4$, la ecuación (7) nos da los valores siguientes para $u_{i,1}$ en la primera línea de tiempo:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.125(u_{20} + u_{00}) + 0.75u_{10} = 0.55972100 \\ u_{21} &= 0.125(u_{30} + u_{10}) + 0.75u_{20} = 0.90564761 \\ u_{31} &= 0.125(u_{40} + u_{20}) + 0.75u_{30} = 0.90564761 \\ u_{41} &= 0.125(u_{50} + u_{30}) + 0.75u_{40} = 0.55972100. \end{aligned} \tag{9}$$

Observe que los resultados proporcionados en (9) fueron obtenidos a partir de la condición inicial $u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x$. Por ejemplo, $u_{20} = \operatorname{sen}(0.2\pi)$, y así sucesivamente. Ahora $j = 1$ en (8) nos da

$$u_{i,2} = 0.25u_{i+1,1} + 1.5u_{i,1} + 0.25u_{i-1,1} - u_{i,0},$$

y, para $i = 1, 2, 3, 4$ obtenemos

$$u_{12} = 0.25u_{21} + 1.5u_{11} + 0.25u_{01} - u_{10}$$
$$u_{22} = 0.25u_{31} + 1.5u_{21} + 0.25u_{11} - u_{20}$$
$$u_{32} = 0.25u_{41} + 1.5u_{31} + 0.25u_{21} - u_{30}$$
$$u_{42} = 0.25u_{51} + 1.5u_{41} + 0.25u_{31} - u_{40}.$$

Al utilizar las condiciones de frontera, las condiciones iniciales y los datos surgidos de (9), a partir de estas ecuaciones conseguimos las aproximaciones para u en la segunda línea de tiempo. Estos últimos resultados y un resumen de los cálculos restantes se relacionan en la tabla 8.6.

Tabla 8.6 Aproximación explícita de las ecuaciones de diferencias con $h = 0.2$, $k = 0.05$, $\lambda = 0.5$

Tiempo	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.4782	0.7738	0.7738	0.4782
0.20	0.1903	0.3080	0.3080	0.1903
0.30	−0.1685	−0.2727	−0.2727	−0.1685
0.40	−0.4645	−0.7516	−0.7516	−0.4645
0.50	−0.5873	−0.9503	−0.9503	−0.5873
0.60	−0.4912	−0.7947	−0.7947	−0.4912
0.70	−0.2119	−0.3428	−0.3428	−0.2119
0.80	0.1464	0.2369	0.2369	0.1464
0.90	0.4501	0.7283	0.7283	0.4501
1.00	0.5860	0.9482	0.9482	0.5860

❑

Se puede comprobar fácilmente que la solución exacta del problema de valores en la frontera del ejemplo 1 es $u(x, t) = \operatorname{sen} \pi x \cos 2\pi t$. Usando esta función podemos comparar los resultados exactos con las aproximaciones. Por ejemplo, algunas comparaciones seleccionadas aparecen en la tabla 8.7. Como puede observarse en la tabla, las aproximaciones están en la misma "zona" que los valores exactos, pero la precisión no es particularmente impresionante. Sin embargo, podemos obtener resultados más precisos. La precisión de este algoritmo varía con la selección de λ. Desde luego, λ está determinado por la elección de los enteros n y m, los cuales a su vez determinan los valores del tamaño de los intervalos h y k. Es posible demostrar que siempre se obtiene la mejor exactitud de este método cuando la relación $\lambda = kc/h$ es igual a uno, en otras palabras, cuando el intervalo en la dirección del tiempo es $k = h/c$. Por ejemplo, la elección $n = 8$ y $m = 16$ nos da $h = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{16}$ y $\lambda = 1$. Los valores muestra que se relacionan en la tabla 8.8 indican de manera clara la mejora en cuanto a exactitud.

Tabla 8.7

Exacto	Aproximado
$u(0.4, 0.25) = 0$	$u_{25} = 0.0185$
$u(0.6, 0.3) = -0.2939$	$u_{36} = -0.2727$
$u(0.2, 0.5) = -0.5878$	$u_{1,10} = -0.5873$
$u(0.8, 0.7) = -0.1816$	$u_{4,14} = -0.2119$

Tabla 8.8

Exacto	Aproximado
$u(0.25, 0.3125) = -0.2706$	$u_{25} = -0.2706$
$u(0.375, 0.375) = -0.6533$	$u_{36} = -0.6533$
$u(0.125, 0.625) = -0.2706$	$u_{1,10} = -0.2706$

■ **Estabilidad** En conclusión, observemos que este método explícito de diferencias finitas para la ecuación de onda es estable cuando $\lambda \leq 1$ e inestable cuando $\lambda > 1$.

EJERCICIOS 8.3

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-23.

En los problemas 1, 3, 5 y 6, utilice una computadora como herramienta de cálculo.

1. Use la ecuación de diferencias (3) para aproximar la solución del problema de valores en la frontera

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \ 0 < t < T$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \ 0 \le t \le T$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le a,$$

cuando

a) $c = 1$, $a = 1$, $T = 1$, $f(x) = x(1 - x)$; $n = 4$ y $m = 10$

b) $c = 1$, $a = 2$, $T = 1$, $f(x) = e^{-16(x-1)^2}$; $n = 5$ y $m = 10$

c) $c = \sqrt{2}$, $a = 1$, $T = 1$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 0.5 \\ 0.5, & 0.5 < x \le 1; \end{cases}$$

$n = 10$ y $m = 25$.

2. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 0.5$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \ 0 \le t \le 0.5$$
$$u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 1.$$

a) Utilice los métodos del capítulo 5 para comprobar que la solución del problema es $u(x, t) = \operatorname{sen} \pi x \cos \pi t$.

b) Utilice el método de esta sección para aproximar la solución al problema con ayuda de un programa de computadora. Use los valores $n = 4$ y $m = 5$.

c) Calcule el error absoluto en cada punto interior de la malla.

3. Aproxime la solución del problema de valores en la frontera del problema 2 utilizando un programa de computadora con

a) $n = 5, m = 10$ *b)* $n = 5, m = 20$.

4. Dado el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \ 0 \le t \le 1$$
$$u(x, 0) = x(1 - x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \ 0 \le x \le 1,$$

utilice $h = k = \frac{1}{5}$ en la ecuación (6) para calcular a mano los valores de $u_{i,1}$.

5. En la sección 5.2 se demostró que la ecuación de una cuerda vibratoria es

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

donde T representa la magnitud constante de la tensión presente en la cuerda, y ρ es su masa por unidad de longitud. Suponga que una cuerda de 60 centímetros de longitud está anclada al eje x en sus extremos y se suelta desde el reposo con desplazamiento inicial de

$$f(x) = \begin{cases} 0.01x, & 0 \le x \le 30 \\ 0.30 - \dfrac{x - 30}{100}, & 30 < x \le 60. \end{cases}$$

Utilice la ecuación de diferencias (3) de esta sección para aproximar la solución del problema de valores en la frontera cuando $h = 10$, $k = 5\sqrt{\rho/T}$ y donde $\rho = 0.0225$ g/cm, $T = 1.4 \times 10^7$ dinas. Use $m = 50$.

6. Repita el problema 5 utilizando

$$f(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 \le x \le 15 \\ 0.30 - \dfrac{x - 15}{150}, & 15 < x \le 60 \end{cases}$$

y $h = 10$, $k = 2.5\sqrt{\rho/T}$. Use $m = 50$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

1. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < 2, 0 < y < 1$$
$$u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 50, \quad 0 < y < 1$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad 0 < x < 2.$$

Aproxime la solución de la ecuación diferencial en los puntos interiores de la región con tamaño de la malla $h = \frac{1}{2}$. Utilice la eliminación gaussiana o la iteración de Gauss-Seidel.

2. Resuelva el problema 1 utilizando el tamaño de la malla de $h = \frac{1}{4}$. Use la iteración de Gauss-Seidel.

3. Considere el problema de valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < x < 1, \ 0 < t < 0.05$$

$$u(0, t) = 0,\ u(1, t) = 0,\ t > 0$$

$$u(x, 0) = x,\ 0 < x < 1.$$

a) Observe que la temperatura inicial $u(x, 0) = x$ indica que en la frontera derecha $x = 1$ la temperatura debe ser $u(1, 0) = 1$, mientras que las condiciones de frontera implican que $u(1, 0) = 0$. Escriba un programa de computadora del método explícito en diferencias finitas de manera que las condiciones de frontera prevalezcan en todos los tiempos considerados, incluyendo $t = 0$. Use el programa para completar la tabla 8.9.

b) Modifique su programa de computadora de tal manera que prevalezca la condición inicial en las fronteras en $t = 0$. Use este programa para completar la tabla 8.10.

c) ¿Existe alguna relación entre las tablas 8.9 y 8.10? Utilice un intervalo de tiempo mayor si es necesario.

Tabla 8.9

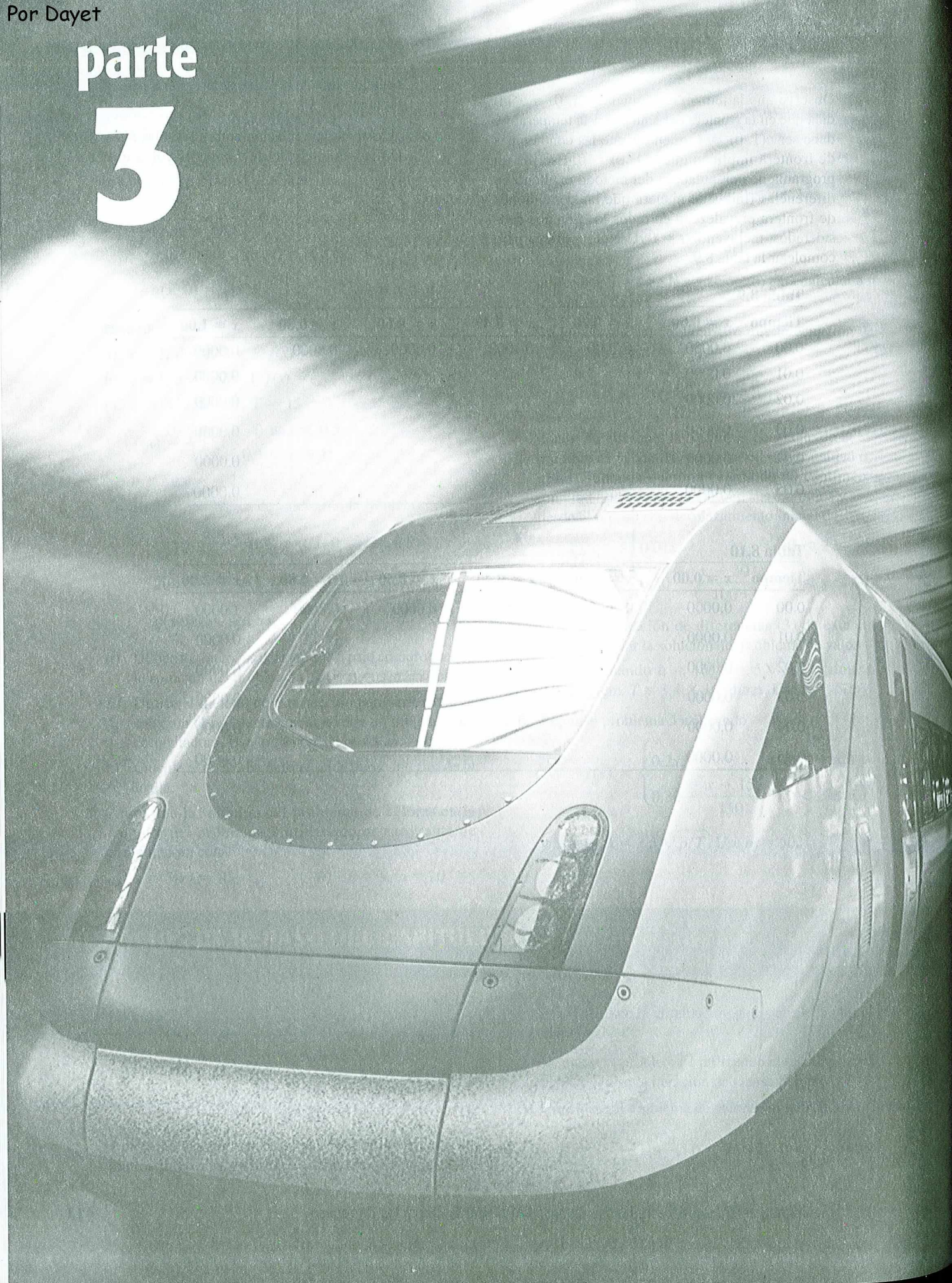
Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000

Tabla 8.10

Tiempo	$x = 0.00$	$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$	$x = 1.00$
0.00	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	1.0000
0.01	0.0000					0.0000
0.02	0.0000					0.0000
0.03	0.0000					0.0000
0.04	0.0000					0.0000
0.05	0.0000					0.0000

Por Dayet

parte 3



Análisis complejo

9 Funciones de una variable compleja
10 Integración en el plano complejo
11 Series y residuos
12 Transformaciones conformes

CAPÍTULO

9

Funciones de una variable compleja

Estructura del capítulo

9.1 Números complejos
9.2 Potencias y raíces
9.3 Conjuntos en el plano complejo
9.4 Funciones de una variable compleja
9.5 Ecuaciones de Cauchy–Riemann
9.6 Funciones exponenciales y logarítmicas
9.7 Funciones trigonométricas e hiperbólicas
9.8 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas
Ejercicios de repaso del capítulo 9

En cursos de álgebra elemental, además de aprender que existen números complejos, se estudian algunas de sus propiedades. No obstante, en cursos de cálculo es probable que no se utilicen números complejos. El cálculo introductorio es, básicamente, el estudio de funciones de una variable real. En cursos avanzados se pueden utilizar ocasionalmente números complejos (puede consultar las secciones 3.3 y 8.2 del tomo I, o bien la 2.8 del presente tomo). Sin embargo, en los próximos cuatro capítulos se introducen los conceptos de análisis complejo, es decir: el estudio de funciones de una variable compleja. Aunque existen muchas semejanzas entre este análisis y el análisis real, también existen muchas diferencias interesantes y algunas sorpresas.

9.1 Números complejos

Introducción Indudablemente, en cursos previos de matemáticas aparecen números complejos. Al aprender a resolver una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ por medio de la fórmula cuadrática, se observa que las raíces de la ecuación no son reales, sino complejas, cuando el discriminante $b^2 - 4ac$ es negativo. Entonces, por ejemplo, ecuaciones sencillas como $x^2 + 5 = 0$ y $x^2 + x + 1 = 0$ no tienen soluciones reales. Por ejemplo, las raíces de esta última ecuación son $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ y $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$. Si se considera que $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$ entonces las raíces se escriben como $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$.

Una definición Hace 200 años, más o menos el tiempo que tomó a los números complejos ganar cierta respetabilidad en la comunidad matemática, el símbolo i se utilizaba originalmente como un disfraz para el engorroso símbolo $\sqrt{-1}$. Ahora simplemente se dice que i es la **unidad imaginaria** y se define por medio de la propiedad $i^2 = -1$. Utilizando la unidad imaginaria se construye un número complejo a partir de dos números reales.

DEFINICIÓN 9.1 Número complejo

Un **número complejo** es cualquier número de la forma $z = a + ib$ donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.

Terminología El número i de la definición 9.1 se denomina la **unidad imaginaria**. El número real x de $z = x + iy$ se denomina la **parte real** de z; el número real y se denomina la **parte imaginaria** de z. Las partes real e imaginaria de un número complejo z se abrevian Re(z) e Im(z), respectivamente. Por ejemplo, si $z = 4 - 9i$, entonces Re(z) = 4 e Im(z) = –9. Una constante real que es múltiplo de la unidad imaginaria se denomina un **número imaginario puro**. Por ejemplo, $z = 6i$ es un número imaginario puro. Dos números complejos son **iguales** si sus partes reales e imaginarias son iguales. Como en ocasiones este sencillo concepto es útil, se formaliza en la próxima definición.

Nota: la parte imaginaria de $z = 4 - 9i$ es **–9 no** $-9i$.

DEFINICIÓN 9.2 Igualdad

Los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son **iguales**, $z_1 = z_2$, si Re(z_1) = Re(z_2) e Im(z_1) = Im(z_2).

Un número complejo $x + iy = 0$ si $x = 0$ y $y = 0$.

Operaciones aritméticas Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, estas operaciones se definen como sigue.

Suma: $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Resta: $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$$

División:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Las conocidas leyes conmutativa, asociativa y distributiva son válidas para números complejos.

Leyes conmutativas:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 z_2 = z_2 z_1 \end{cases}$$

Leyes asociativass:
$$\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \end{cases}$$

Ley distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

Considerando estas leyes, no es necesario memorizar las definiciones de suma, resta y multiplicación. Para sumar (restar) dos números complejos, simplemente se suman (sustraen) las partes correspondientes reales e imaginarias. Para multiplicar dos números complejos se utiliza la ley distributiva y la propiedad de que $i^2 = -1$.

Ejemplo 1 Suma y multiplicación

Si $z_1 = 2 + 4i$ y $z_2 = -3 + 8i$, encuentre: *a*) $z_1 + z_2$ y *b*) $z_1 z_2$.

Solución *a*) Sumando las partes imaginarias y reales de los dos números, se obtiene

$$(2 + 4i) + (-3 + 8i) = (2 - 3) + (4 + 8)i = -1 + 12i.$$

b) Utilizando la ley distributiva se tiene

$$\begin{aligned} (2 + 4i)(-3 + 8i) &= (2 + 4i)(-3) + (2 + 4i)(8i) \\ &= -6 - 12i + 16i + 32i^2 \\ &= (-6 - 32) + (16 - 12)i = -38 + 4i. \end{aligned}$$ ❑

Tampoco es necesario memorizar la definición de división pero, antes de discutir esto, es preciso introducir otro concepto.

■ **Conjugado** Si z es un número complejo, entonces el número que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria se denomina **complejo conjugado** o, simplemente, el **conjugado** de z. Si $z = x + iy$, entonces su conjugado es

$$\bar{z} = x - iy.$$

Por ejemplo, si $z = 6 + 3i$, entonces $\bar{z} = 6 - 3i$; si $z = -5 - i$, entonces $\bar{z} = -5 + i$. Si z es un número real, digamos $z = 7$, entonces $\bar{z} = 7$. De la definición de suma se demuestra fácilmente que el conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Es más, se tienen las siguientes tres propiedades

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Las definiciones de suma y multiplicación muestran que la suma y el producto de un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ son también números reales:

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \tag{1}$$

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2. \tag{2}$$

La diferencia entre un número complejo z y su conjugado $\bar{z}$ es un número imaginario puro:

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy. \tag{3}$$

Como $x = \text{Re}(z)$ y $y = \text{Im}(z)$, entonces (1) y (3) conducen a dos fórmulas útiles:

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Sin embargo, (2) es la relación importante que permite abordar la división de manera más práctica: para dividir z_1 entre z_2 se multiplican tanto el numerador como el denominador de z_1/z_2 por el conjugado de z_2, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 División

Si $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = 4 + 6i$, encuentre: *a)* $\dfrac{z_1}{z_2}$ y *b)* $\dfrac{1}{z_1}$.

Solución En ambas partes de este ejemplo se multiplican tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador y entonces se aplica (2).

a)
$$\frac{2 - 3i}{4 + 6i} = \frac{2 - 3i}{4 + 6i}\frac{4 - 6i}{4 - 6i} = \frac{8 - 12i - 12i + 18i^2}{16 + 36}$$
$$= \frac{-10 - 24i}{52} = -\frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

b)
$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{1}{2 - 3i}\frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i.$$ ❑

■ **Interpretación geométrica** Un número complejo $z = x + iy$ se determina únicamente por medio de un *par ordenado* de números reales (x, y). El primero y segundo elementos de cada par ordenado corresponden, respectivamente, a la parte real y a la imaginaria del número complejo. Por ejemplo, el par ordenado $(2, -3)$ corresponde al número complejo $z = 2 - 3i$. Así también, $z = 2 - 3i$ determina al par ordenado $(2, -3)$. De esta forma se puede asociar un número complejo $z = x + iy$ con un punto (x, y) de un plano coordenado. Sin embargo, como se muestra en la sección 1.1, un par ordenado de números reales puede interpretarse como las componentes de un vector. Entonces, un número complejo $z = x + iy$ puede verse también como un *vector* cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto terminal es (x, y). El **plano coordenado** ilustrado en la figura 9.1 se denomina **plano complejo** o simplemente el **plano** z. El eje horizontal o x se denomina el **eje real** y el eje vertical o y se denomina el **eje imaginario**. La longitud de un vector z, o la distancia desde el origen hasta al punto (x, y), es evidentemente $\sqrt{x^2 + y^2}$. Este número real se denomina de una forma especial.

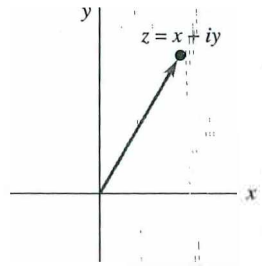


Figura 9.1 z como vector de posición

DEFINICIÓN 9.3 Módulo o valor absoluto

El **módulo** o **valor absoluto** de $z = x + iy$, denotado por $|z|$, es el número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{4}$$

Ejemplo 3 Módulo de un número complejo

Si $z = 2 - 3i$, entonces $|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. ❑

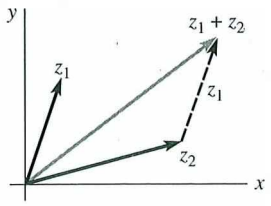


Figura 9.2 Suma de vectores

Como se muestra en la figura 9.2, la suma de los vectores z_1 y z_2 es el vector $z_1 + z_2$. Para el triángulo indicado en la figura se sabe que la longitud del lado del triángulo correspondiente al vector $z_1 + z_2$ no puede ser más grande que la suma de los dos lados restantes. Simbólicamente:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{5}$$

El resultado (5) se conoce como la **desigualdad triangular** y se extrapola a cualquier suma finita:

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|. \tag{6}$$

Aplicando (5) en $z_1 + z_2 + (-z_2)$ se tiene otra desigualdad importante:

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|. \tag{7}$$

Comentarios

Muchas de las propiedades del sistema real son válidas en el sistema de números complejos, aunque existen algunas diferencias importantes. Por ejemplo, no se pueden comparar dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $y_1 \neq 0$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, $y_2 \neq 0$, por medio de desigualdades. En otras palabras, expresiones tales como $z_1 < z_2$ y $z_2 \geq z_1$ no poseen significado excepto en el caso en que z_1 y z_2 sean reales. Sin embargo, se pueden comparar los valores absolutos de dos números complejos. Así, si $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 5 - i$, entonces $|z_1| = 5$ y $|z_2| = \sqrt{26}$, y, como consecuencia, $|z_1| < |z_2|$. Esta última desigualdad significa que el punto (3, 4) está más cerca del origen que el punto (5, −1).

EJERCICIOS 9.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas del 1 al 26, escriba el número indicado en la forma $a + ib$.

1. $2i^3 - 3i^2 + 5i$
2. $3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$
3. i^8
4. i^{11}
5. $(5 - 9i) + (2 - 4i)$
6. $3(4 - i) - 3(5 + 2i)$
7. $i(5 + 7i)$
8. $i(4 - i) + 4i(1 + 2i)$
9. $(2 - 3i)(4 + i)$
10. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i)(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i)$
11. $(2 + 3i)^2$
12. $(1 - i)^3$
13. $\dfrac{2}{i}$
14. $\dfrac{i}{1 + i}$
15. $\dfrac{2 - 4i}{3 + 5i}$
16. $\dfrac{10 - 5i}{6 + 2i}$
17. $\dfrac{(3 - i)(2 + 3i)}{1 + i}$
18. $\dfrac{(1 + i)(1 - 2i)}{(2 + i)(4 - 3i)}$
19. $\dfrac{(5 - 4i) - (3 + 7i)}{(4 + 2i) + (2 - 3i)}$
20. $\dfrac{(4 + 5i) + 2i^3}{(2 + i)^2}$
21. $i(1 - i)(2 - i)(2 + 6i)$
22. $(1 + i)^2(1 - i)^3$
23. $(3 + 6i) + (4 - i)(3 + 5i) + \dfrac{1}{2 - i}$
24. $(2 + 3i)\left(\dfrac{2 - i}{1 + 2i}\right)^2$
25. $\left(\dfrac{i}{3 - i}\right)\left(\dfrac{1}{2 + 3i}\right)$
26. $\dfrac{1}{(1 + i)(1 - 2i)(1 + 3i)}$

En los problemas del 27 al 32, sea $z = x + iy$. Encuentre la expresión indicada.

27. $\text{Re}(1/z)$
28. $\text{Re}(z^2)$
29. $\text{Im}(2z + 4\bar{z} - 4i)$
30. $\text{Im}(\bar{z}^2 + z^2)$
31. $|z - 1 - 3i|$
32. $|z + 5\bar{z}|$

En los problemas del 33 al 36, utilice la definición 9.2 para encontrar un número complejo z que cumpla con la ecuación indicada.

33. $2z = i(2 + 9i)$
34. $z - 2\bar{z} + 7 - 6i = 0$
35. $z^2 = i$
36. $\bar{z}^2 = 4z$

En los problemas 37 y 38, determine cuál de los números complejos está más cerca del origen.

37. $10 + 8i$, $11 - 6i$
38. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i$, $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}i$
39. Demuestre que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2 en el plano complejo.
40. Demuestre que $|z + 6 + 8i| \leq 12$ para todos los números complejos z del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

9.2 Potencias y raíces

Introducción Recuérdese que un punto (x, y) en coordenadas rectangulares también puede expresarse en coordenadas polares (r, θ). En esta sección se plantea que la posibilidad de expresar un número complejo z en términos de r y θ facilita enormemente el cálculo de potencias y raíces de z.

Forma polar Las coordenadas rectangulares (x, y) y las polares (r, θ) se relacionan mediante las ecuaciones $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ (véase la sección 6.1). Por lo tanto, un número complejo no nulo $z = x + iy$ se escribe como $z = (r\cos\theta) + i(r\,\text{sen}\,\theta)$ o

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta). \tag{1}$$

Se dice que (1) es la **forma polar** del número complejo z. De la figura 9.3 se observa que la coordenada polar r puede interpretarse como la distancia desde el origen al punto (x, y). En otras palabras, se adopta la convención de que r nunca es negativo, por lo que se puede considerar que r es el módulo de z, esto es, $r = |z|$. El ángulo θ de inclinación del vector z medido en radianes desde el eje real desde sus valores positivos, es igualmente positivo cuando se mide en sentido antihorario y negativo cuando se mide en sentido horario. El ángulo θ se denomina **argumento** de z y se escribe $\theta = \arg z$. De la figura 9.3 se observa que el argumento de un número complejo debe satisfacer la ecuación $\tan\theta = y/x$. Las soluciones de esta ecuación no son únicas, ya que si θ_0 es un argumento de z, entonces los ángulos $\theta_0 \pm 2\pi$, $\theta_0 \pm 4\pi, \ldots,$ son también argumentos necesariamente. El argumento de un número complejo en el intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$ se denomina el **argumento principal** de z y se denota como Arg z. Por ejemplo, Arg $(i) = \pi/2$.

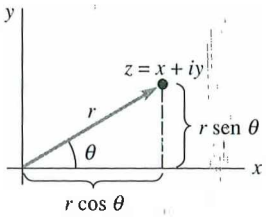


Figura 9.3 Coordenadas polares

Ejemplo 1 Un número complejo en forma polar

Exprese $1 - \sqrt{3}i$ en forma polar.

Solución Con $x = 1$ y $y = -\sqrt{3}$, se obtiene $r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Ahora, como el punto $(1, -\sqrt{3})$ se localiza en el cuarto cuadrante, se puede considerar la solución de $\tan\theta = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$ para obtener $\theta = \arg z = 5\pi/3$. De (1) se tiene que una forma polar del número es

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right).$$

Como se muestra en la figura 9.4, el argumento de $1 - \sqrt{3}i$ que se localiza en el intervalo $(-\pi, \pi]$, que es el argumento principal de z, es Arg $z = -\pi/3$. Así, una forma polar alternativa del número complejo es

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] \qquad \square$$

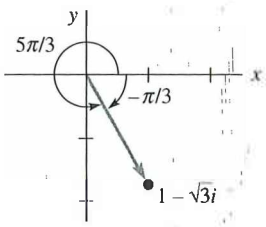


Figura 9.4 Dos argumentos de $z = 1 - \sqrt{3}i$

Multiplicación y división La forma polar de un número complejo es especialmente conveniente para multiplicar o dividir dos números complejos. Supóngase que

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \quad \text{y} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2),$$

donde θ_1 y θ_2 son cualesquiera argumentos de z_1 y z_2, respectivamente. Entonces

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)] \tag{2}$$

y para $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)]. \tag{3}$$

De las fórmulas trigonométricas para la suma, (2) y (3) se reescriben, respectivamente, como

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{4}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{5}$$

Revisando (4) y (5) se observa que

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{6}$$

y

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{7}$$

Ejemplo 2 Argumento de un producto y de un cociente

Se ha visto que Arg $z_1 = \pi/2$ para $z_1 = i$. En el ejemplo 1 se observa que Arg $z_2 = -\pi/3$ para $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$. Así, para

$$z_1z_2 = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i \quad \text{y} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{i} = -\sqrt{3} - i$$

se deduce a partir de (7) que

$$\arg(z_1z_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}. \qquad \square$$

En el ejemplo 2 se utilizan los argumentos principales de z_1 y z_2 y se obtienen arg $(z_1z_2) =$ Arg (z_1z_2) y arg $(z_1/z_2) =$ Arg (z_1/z_2). Sin embargo, debe notarse que esto es una coincidencia. Aunque (7) es cierto para cualesquiera argumentos de z_1 y z_2, *no es cierto*, en general, que Arg $(z_1z_2) =$ Arg $z_1 +$ Arg z_2 y Arg $(z_1/z_2) =$ Arg $z_1 -$ Arg z_2; véase el problema 39 de los ejercicios 9.2.

■ **Potencias de z** A partir de los resultados (4) y (5) se pueden encontrar potencias enteras del número complejo z. Por ejemplo, si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces con $z_1 = z$ y $z_2 = z$, (4) conduce a

$$z^2 = r^2[\cos(\theta + \theta) + i\,\text{sen}(\theta + \theta)] = r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta).$$

Como $z^3 = z^2z$ se deduce que

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta).$$

Es más, como arg $(1) = 0$, se infiere a partir de (5) que

$$\frac{1}{z^2} = z^{-2} = r^{-2}[\cos(-2\theta) + i\,\text{sen}(-2\theta)].$$

De esta manera, se obtiene una fórmula para la n-ésima potencia de z para cualquier entero n:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta). \tag{8}$$

Ejemplo 3 Potencia de un número complejo

Calcule z^3 para $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Solución En el ejemplo 1 se observa que

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Por lo tanto, de (8) con $r = 2$, $\theta = -\pi/3$ y $n = 3$, se tiene

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 2^3\left[\cos\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) + i\,\text{sen}\left(3\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]$$

$$= 8[\cos(-\pi) + i\,\text{sen}(-\pi)] = -8. \qquad \square$$

■ **Fórmula de DeMoivre** Cuando $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ se tiene que $|z| = r = 1$ y por lo tanto (8) produce a

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta. \tag{9}$$

Este resultado se conoce como la **fórmula de DeMoivre** y es útil para deducir ciertas igualdades trigonométricas.

■ **Raíces** Se dice que un número w es una **raíz n-ésima** de un número complejo no nulo z si $w^n = z$. Si $w = \rho(\cos\phi + i\,\text{sen}\,\phi)$ y $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ son las formas polares de w y z, entonces, de (8), $w^n = z$ se convierte en

$$\rho^n(\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi) = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta).$$

De aquí se concluye que $\rho^n = r$ o $\rho = r^{1/n}$ y

$$\cos n\phi + i\,\text{sen}\,n\phi = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta.$$

Igualando las partes real e imaginaria se tiene de esta ecuación que

$$\cos n\phi = \cos\theta \quad \text{y} \quad \text{sen}\,n\phi = \text{sen}\,\theta.$$

Estas igualdades implican que $n\phi = \theta + 2k\pi$, donde k es un entero. Entonces,

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Al tomar k valores enteros sucesivos $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se obtienen n raíces *distintas* con el mismo módulo pero con diferentes argumentos. Pero para $k \geq n$ se obtienen las mismas raíces debido a que el seno y el coseno son periódicos cada 2π. Para ver esto, supóngase que $k = n + m$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$. Entonces

$$\phi = \frac{\theta + 2(n + m)\pi}{n} = \frac{\theta + 2m\pi}{n} + 2\pi$$

y así $$\text{sen}\,\phi = \text{sen}\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right), \qquad \cos\phi = \cos\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right).$$

A continuación se sintetiza este resultado. Las raíces n-ésimas de un número complejo no nulo $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ vienen dadas por

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{10}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ejemplo 4 Raíces de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = i$.

Solución Con $r = 1$, $\theta = \arg z = \pi/2$, la forma polar del número indicado es $z = \cos(\pi/2) + i\,\text{sen}(\pi/2)$. De (10) con $n = 3$ se obtiene

$$w_k = (1)^{1/3}\left[\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Por lo tanto, las tres raíces son:

$$k = 0, \quad w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$k = 2, \quad w_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i. \qquad \square$$

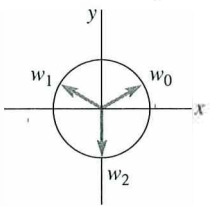


Figura 9.5 Tres raíces cúbicas de i

La raíz w de un número complejo z obtenida mediante el argumento principal de z con $k = 0$ se denomina en ocasiones la **raíz principal n-ésima** de z. En el ejemplo 4, como Arg $(i) = \pi/2$, $w_0 = (\sqrt{3}/2) + (1/2)i$ es la tercera raíz principal de i.

Puesto que las raíces dadas por (8) tienen el mismo módulo, las n raíces de un número complejo no nulo z se encuentran sobre una circunferencia de radio $r^{1/n}$ centrada en el origen del plano complejo. Es más, como la diferencia entre los argumentos de dos raíces sucesivas es $2/\pi n$, las raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas en esta circunferencia. La figura 9.5 muestra las tres raíces de i igualmente espaciadas en un círculo unitario; el ángulo entre las raíces (vectores) w_k y w_{k+1} es $2\pi/3$.

Como se muestra en el siguiente ejemplo, las raíces de un número complejo no tienen por qué ser números "agradables" como los del ejemplo 3.

Ejemplo 5 Raíces de un número complejo

Encuentre las cuatro raíces cuartas de $z = 1 + i$.

Solución En este caso, $r = \sqrt{2}$ y $\theta = \arg z = \pi/4$. De (10) con $n = 4$, se obtiene

$$w_k = (2)^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi/4 + 2k\pi}{4}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Entonces,

$$k = 0, \quad w_0 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right] = 1.1664 + 0.2320i$$

$$k = 1, \quad w_1 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{9\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{16}\right] = -0.2320 + 1.1664i$$

$$k = 2, \quad w_2 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{17\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{17\pi}{16}\right] = -1.1664 - 0.2320i$$

$$k = 3, \quad w_3 = (2)^{1/4}\left[\cos\frac{25\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{25\pi}{16}\right] = 0.2320 - 1.1664i. \qquad \square$$

EJERCICIOS 9.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-24.

En los problemas del 1 al 10, escriba en forma polar el número complejo indicado.

1. 2
2. -10
3. $-3i$
4. $6i$
5. $1 + i$
6. $5 - 5i$
7. $-\sqrt{3} + i$
8. $-2 - 2\sqrt{3}i$
9. $\dfrac{3}{-1 + i}$
10. $\dfrac{12}{\sqrt{3} + i}$

En los problemas del 11 al 14, escriba en la forma $a + ib$ el número indicado en forma polar.

11. $z = 5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{6}\right)$

12. $z = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{4}\right)$

13. $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$

14. $z = 10\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)$

En los problemas 15 y 16, encuentre z_1z_2 y z_1/z_2. Escriba el número en la forma $a + ib$.

15. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right), z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)$

16. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$,
$z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$

En los problemas del 17 al 20, escriba cada número complejo en forma polar. Después, utilice (4) o (5) para obtener una forma polar del número indicado. Finalmente, escríbalo en la forma $a + ib$.

17. $(3 - 3i)(5 + 5\sqrt{3}i)$

18. $(4 + 4i)(-1 + i)$

19. $\dfrac{-i}{2 - 2i}$

20. $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$

En los problemas del 21 al 26, utilice (8) para calcular la potencia indicada.

21. $(1 + \sqrt{3}i)^9$

22. $(2 - 2i)^5$

23. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)^{10}$

24. $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

25. $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)^{12}$

26. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

En los problemas del 27 al 32, utilice (10) para calcular todas las raíces. Bosqueje estas raíces en una circunferencia adecuada centrada en el origen.

27. $(8)^{1/3}$

28. $(1)^{1/8}$

29. $(i)^{1/2}$

30. $(-1 + i)^{1/3}$

31. $(-1 + \sqrt{3}i)^{1/2}$

32. $(-1 - \sqrt{3}i)^{1/4}$

En los problemas 33 y 34, encuentre todas las soluciones de la ecuación indicada.

33. $z^4 + 1 = 0$

34. $z^8 - 2z^4 + 1 = 0$

En los problemas 35 y 36, exprese el número complejo indicado en forma polar y de forma $a + ib$.

35. $\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

36. $\dfrac{\left[8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$

37. Utilice el resultado $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta$ para encontrar identidades trigonométricas para $\cos 2\theta$ y $\text{sen}\,2\theta$.

38. Utilice el resultado $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta$ para encontrar identidades trigonométricas para $\cos 3\theta$ y $\text{sen}\,3\theta$.

39. *a*) Si $z_1 = -1$ y $z_2 = 5i$, verifique que

$$\text{Arg}\,(z_1z_2) \neq \text{Arg}\,(z_1) + \text{Arg}\,(z_2).$$

b) Si $z_1 = -1$ y $z_2 = -5i$, verifique que

$$\text{Arg}\,(z_1/z_2) \neq \text{Arg}\,(z_1) - \text{Arg}\,(z_2).$$

40. Para los números complejos indicados en el problema 39, verifique en los incisos *a*) y *b*) que

$$\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

y

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

9.3 Conjuntos en el plano complejo

Introducción En las secciones anteriores se plantean algunas herramientas rudimentarias de álgebra y geometría de números complejos. Sin embargo, con esto sólo se araña la superficie del tema conocido como análisis complejo; el *corpus* principal de dicho estudio se encuentra más adelante. El objetivo de las secciones y capítulos siguientes es estudiar funciones de una sola variable compleja $z = x + iy$ y el cálculo de dichas funciones.

Antes de introducir el concepto de función de una variable compleja, se necesita establecer cierta terminología y definiciones esenciales respecto a los conjuntos del plano complejo.

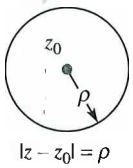


Figura 9.6 Círculo de radio ρ

Terminología Antes de discutir el concepto de funciones de una variable compleja, es conveniente introducir cierta terminología esencial respecto a conjuntos del plano complejo.

Supóngase que $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es la distancia entre los puntos $z = x + iy$ y $z_0 = x_0 + iy_0$, los puntos $z = x + iy$ que cumplen con la ecuación

$$|z - z_0| = \rho,$$

$\rho > 0$, se encuentra en un **círculo** de radio ρ centrado en el punto z_0; véase la figura 9.6.

Ejemplo 1 Círculos

a) $|z| = 1$ es la ecuación de un círculo unitario centrado en el origen.

b) $|z - 1 - 2i| = 5$ es la ecuación de un círculo de radio 5 centrado en $1 + 2i$. ❑

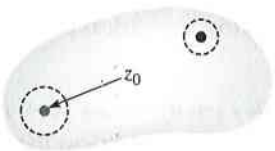


Figura 9.7 Conjunto abierto

Los puntos z que cumplen con la desigualdad $|z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$, se localizan dentro, pero no sobre, el círculo de radio ρ centrado en el punto z_0. A este conjunto se le denomina **vecindad** de z_0 o **disco abierto**. Se dice que un punto z_0 es un **punto interior** de un conjunto S del plano complejo si existe alguna vecindad de z_0 que se encuentra completamente dentro de S. Si todos los puntos z de un conjunto S son puntos interiores, entonces se dice que S es un **conjunto abierto**; véase la figura 9.7. Por ejemplo, la desigualdad $\text{Re}(z) > 1$ define un *semiplano derecho*, que es un conjunto abierto. Todos los números complejos $z = x + iy$ para los que $x > 1$ se encuentran en este conjunto. Si se elige, por ejemplo, $z_0 = 1.1 + 2i$, entonces una vecindad de z_0 que se localiza completamente en el conjunto viene definida por $|z - (1.1 + 2i)| < 0.05$; véase la figura 9.8. Por otro lado, el conjunto S de puntos del plano complejo definido por $\text{Re}(z) \geq 1$ *no* es abierto, puesto que cualquier vecindad de un punto sobre la línea $x = 1$ debe contener puntos en S y puntos que no están en S; véase la figura 9.9.

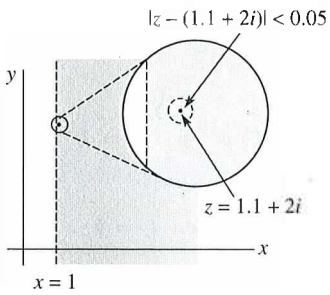


Figura 9.8 Ampliación de un punto cercano a $x = 1$ de un conjunto abierto

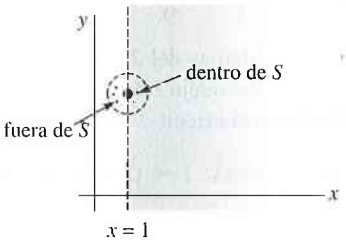
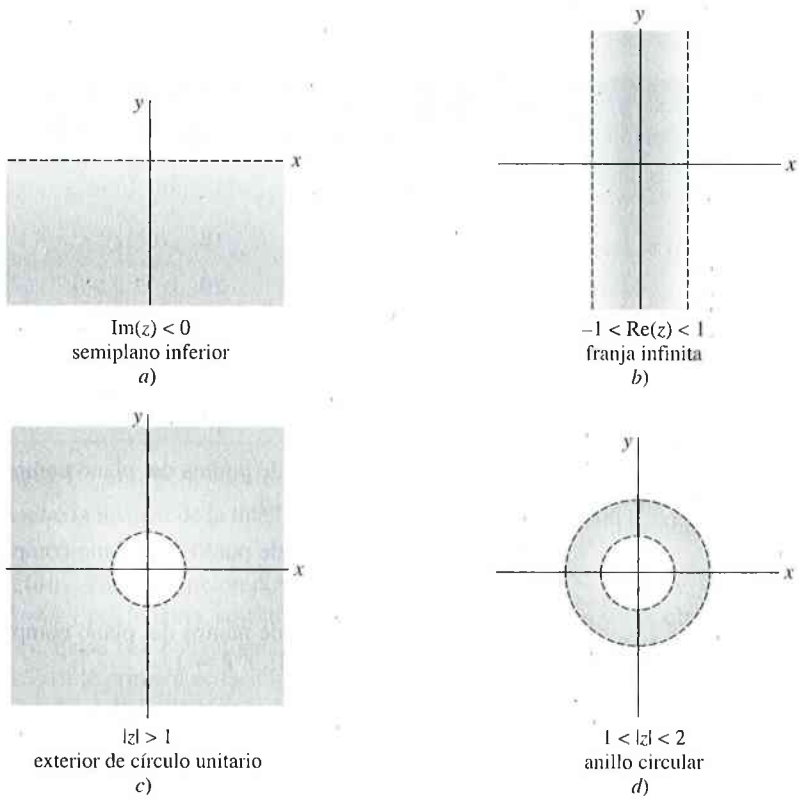


Figura 9.9 El conjunto S no es abierto

Ejemplo 2 Conjuntos abiertos

La figura 9.10 ilustra algunos conjuntos abiertos adicionales



❑

Figura 9.10 Cuatro ejemplos de conjuntos abiertos

El conjunto de números que cumplen con la desigualdad

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2,$$

tal como se ilustra en la figura 9.10*d*), se denomina también un **anillo** abierto.

Si cualquier vecindad de un punto z_0 contiene por lo menos un punto que está en un conjunto S y por lo menos un punto que no está en S, entonces se dice que z_0 es un **punto frontera** de S. La **frontera** de un conjunto S es el conjunto de todos los puntos frontera de S. Para el conjunto de puntos definido por $\text{Re}(z) \geq 1$, los puntos sobre la línea $x = 1$ son puntos frontera. Los puntos sobre el círculo $|z - i| = 2$ son puntos frontera para el disco $|z - i| \leq 2$.

Si cualquier par de puntos z_1 y z_2 de un conjunto abierto S se conectan por medio de una línea poligonal comprendida completamente en el conjunto, entonces se dice que el conjunto abierto S es **conexo (o arco-conexo**, como suele denominársele con más precisión); véase la figura 9.11. Un conjunto abierto conexo se denomina **dominio**. Todos los conjuntos abiertos de la figura 9.10 son conexos y por lo tanto son dominios. El conjunto de números que cumple con $\text{Re}(z) \neq 4$ es un conjunto abierto, pero no es conexo ya que no es posible unir puntos de ambos lados de la línea vertical $x = 4$ mediante una línea poligonal sin abandonar el conjunto (tome en cuenta que los puntos en $x = 4$ no están en el conjunto).

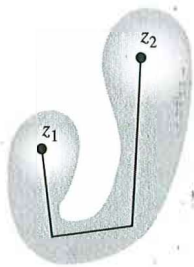


Figura 9.11 Conjunto conexo

Una **región** es un dominio del plano complejo con todos, algunos o ninguno de sus puntos frontera. Como un conjunto abierto conexo no contiene ningún punto frontera, automáticamente es una región. Una región que contiene a todos sus puntos frontera se dice que es **cerrada**. El disco definido por $|z - i| \leq 2$ es un ejemplo de una región cerrada y se conoce como disco cerrado. Una región puede no ser abierta ni cerrada; la región anular definida por $1 \leq |z - 5| < 3$ contiene únicamente algunos de sus puntos frontera, por lo que no es abierta ni cerrada.

Comentarios

Usualmente se utiliza la misma palabra en matemáticas para contextos completamente diferentes; no hay que confundir el concepto de "dominio" definido en esta sección con el concepto de "dominio de una función".

EJERCICIOS 9.3

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas del 1 al 8, bosqueje la gráfica de la ecuación indicada.

1. $\text{Re}(z) = 5$
2. $\text{Im}(z) = -2$
3. $\text{Im}(\bar{z} + 3i) = 6$
4. $\text{Im}(z - i) = \text{Re}(z + 4 - 3i)$
5. $|z - 3i| = 2$
6. $|2z + 1| = 4$
7. $|z - 4 + 3i| = 5$
8. $|z + 2 + 2i| = 2$

En los problemas del 9 al 22, bosqueje el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen con la desigualdad indicada. Determine si el conjunto es un dominio.

9. $\text{Re}(z) < -1$
10. $|\text{Re}(z)| > 2$
11. $\text{Im}(z) > 3$
12. $\text{Im}(z - i) < 5$
13. $2 < \text{Re}(z - 1) < 4$
14. $-1 \leq \text{Im}(z) < 4$
15. $\text{Re}(z^2) > 0$
16. $\text{Im}(1/z) < \frac{1}{2}$
17. $0 \leq \arg(z) \leq 2\pi/3$
18. $|\arg(z)| < \pi/4$
19. $|z - i| > 1$
20. $|z - i| > 0$
21. $2 < |z - i| < 3$
22. $1 \leq |z - 1 - i| < 2$
23. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|z + 1| = |z - i|$.
24. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|\text{Re}(z)| \leq |z|$.
25. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.
26. Describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con $|z - i| + |z + i| = 1$.

9.4 Funciones de una variable compleja

Introducción Uno de los conceptos más importantes en matemáticas es el de una función. Se puede recordar de cursos previos que una función es cierto tipo de correspondencia entre dos conjuntos; más específicamente: *una* ***función*** *f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento en B.* Si b es el elemento del conjunto B asignado al elemento a del conjunto A a través de f, se dice que b es la **imagen** de a y se escribe $b = f(a)$. El conjunto A se denomina el **dominio** de la función f (aunque no es necesariamente un dominio en el sentido definido en la sección 9.3). El conjunto de todas las imágenes de B se denomina el **rango** de la función. Por ejemplo, supóngase que el conjunto A es un conjunto de números reales definido por $3 \leq x < \infty$ y que la función viene dada por $f(x) = \sqrt{x - 3}$; entonces $f(3) = 0, f(4) = 1$, $f(8) = \sqrt{5}$, etc. En otras palabras, el rango de f es el conjunto dado por $0 \leq y < \infty$. Como A es un conjunto de números reales, se dice que f es una **función de una variable real** x.

Funciones de una variable compleja Cuando el dominio A de la anterior definición de función es un conjunto de números complejos z, se dice que f es una **función de una variable compleja** z o, en forma abreviada, una **función compleja**. La imagen w de un número complejo z es algún número complejo $u + iv$, esto es,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{1}$$

donde u y v son las partes real e imaginaria de w, y son funciones de valores reales. En forma inherente al postulado matemático (1) está el hecho de que *no se puede dibujar una*

gráfica de una función compleja $w = f(z)$ puesto que una gráfica así requeriría de cuatro ejes en un sistema coordenado de cuatro dimensiones.

Algunos ejemplos de funciones de una variable compleja son

$$f(z) = z^2 - 4z, \qquad z \text{ es cualquier número complejo}$$

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \qquad z \neq i \text{ y } z \neq -i$$

$$f(z) = z + \text{Re}(z), \qquad z \text{ es cualquier número complejo.}$$

Cada una de estas funciones podría expresarse en la forma (1). Por ejemplo,

$$f(z) = z^2 - 4z = (x + iy)^2 - 4(x + iy) = (x^2 - y^2 - 4x) + i(2xy - 4y).$$

Así, $u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x$, y $v(x, y) = 2xy - 4y$.

Aunque no es posible dibujar una gráfica, una función compleja $w = f(z)$ puede interpretarse como un **mapeo** o **transformación** del plano z al plano w; véase la figura 9.12.

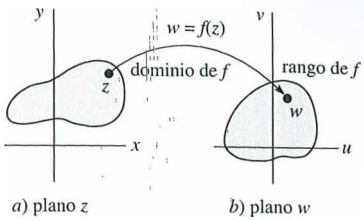


Figura 9.12 Transformación del plano z al plano w

Ejemplo 1 Imagen de una línea vertical

Encuentre la imagen de la línea $\text{Re}(z) = 1$ bajo la transformación $f(z) = z^2$.

Solución Para la función $f(z) = z^2$ se tiene $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Ahora, $\text{Re}(z) = x$ y por lo tanto, sustituyendo $x = 1$ en las funciones u y v se obtiene $u = 1 - y^2$ y $v = 2y$. Éstas son ecuaciones paramétricas de una curva en el plano w. Sustituyendo $y = v/2$ en la primera ecuación, se elimina el parámetro y para obtener $u = 1 - v^2/4$. En otras palabras, la imagen de la línea en la figura 9.13*a*) es la parábola mostrada en la figura 9.13*b*). ❑

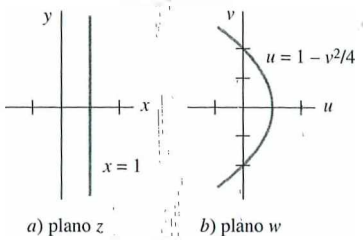


Figura 9.13 La imagen de $x = 1$ es una parábola

En el capítulo 12 se insiste con mayor detalle en la idea de $f(z)$ como una transformación.

Debe observarse que una función compleja viene determinada completamente por las funciones reales u y v. Esto significa que una función compleja $w = f(z)$ se define especificando arbitrariamente $u(x, y)$ y $v(x, y)$, incluso aunque $u + iv$ no pueda obtenerse sólo mediante operaciones comunes sobre el símbolo z. Por ejemplo, si $u(x, y) = xy^2$ y $v(x, y) = x^2 - 4y^3$, entonces $f(z) = xy^2 + i(x^2 - 4y^3)$ es una función de una variable compleja. Para calcular, digamos, $f(3 + 2i)$ se sustituye $x = 3$ y $y = 2$ en u y v para obtener $f(3 + 2i) = 12 - 23i$.

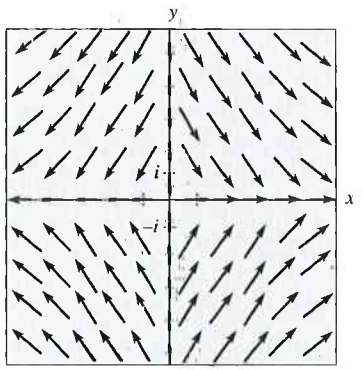


Figura 9.14 $f_1(z) = \bar{z}$ (normalizada)

■ **Funciones complejas como fluidos** Una función compleja $w = f(z)$ se puede interpretar también como un **flujo de fluido bidimensional** considerando el número complejo $f(z)$ como un vector basado en el punto z. El vector $f(z)$ especifica la rapidez y la dirección del flujo en un punto determinado z. Las figuras 9.14 y 9.15 muestran los flujos correspondientes a las funciones complejas $f_1(z) = \bar{z}$ y $f_2(z) = z^2$, respectivamente.

Si $x(t) + iy(t)$ es una representación paramétrica de la trayectoria de una partícula en el flujo, el vector tangente $\mathbf{T} = x'(t) + iy'(t)$ debe coincidir con $f(x(t) + iy(t))$. Cuando $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ se infiere que la trayectoria de la partícula debe satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = v(x, y).$$

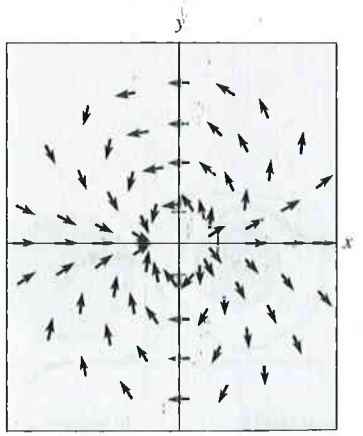


Figura 9.15 $f_2(z) = z^2$ (normalizada)

A la familia de soluciones de este sistema se le llama *líneas de corriente* asociadas a $f(z)$.

Ejemplo 2 Líneas de corriente

Encuentre las líneas de corriente asociadas a las funciones complejas: *a)* $f_1(z) = \bar{z}$ y *b)* $f_2(z) = z^2$.

Solución *a)* Las líneas de corriente correspondientes a $f_1(z) = x - iy$ cumplen con el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

por lo que $x(t) = c_1e^t$ y $y(t) = c_2e^{-t}$. Multiplicando estas dos ecuaciones paramétricas, se ve que el punto $x(t) + iy(t)$ se encuentra sobre la hipérbola $xy = c_1c_2$.

b) Para encontrar las líneas de corriente correspondientes a $f_2(z) = (x^2 - y^2) + i2xy$, obsérvese que $dx/dt = x^2 - y^2$, $dy/dt = 2xy$, y por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Esta ecuación diferencial homogénea tiene como solución $x^2 + y^2 = c_2y$, que es una familia de círculos que pasan por el origen y cuyos centros se localizan sobre el eje y.

❑

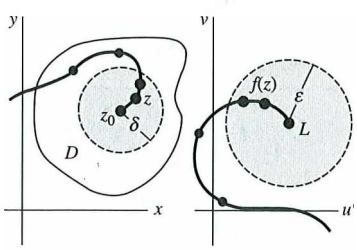
■ **Límites y continuidad** La definición de límite de una función compleja $f(z)$ cuando $z \to z_0$ tiene la misma apariencia que el límite de las variables reales.

DEFINICIÓN 9.4 Límite de una función

Supóngase que la función f está definida en una vecindad de z_0, excepto posiblemente en el mismo z_0. Entonces se dice que f posee un **límite** en z_0, escrito como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si, para cada $\epsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.



a) vecindad δ *b)* vecindad ϵ

Figura 9.16 Significado geométrico de un límite complejo

Expresándolo en palabras, el $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ significa que los puntos $f(z)$ se pueden acercar arbitrariamente al punto L, si se elige el punto z suficientemente cercano, aunque no igual, al punto z_0. Como se muestra en la figura 9.16, para cada ϵ-vecindad de L (definido por $|f(z) - L| < \epsilon$) existe una δ-vecindad de z_0 (definida por $|z - z_0| < \delta$) tal que las imágenes de todos los puntos $z \neq z_0$ en esta vecindad se encuentran en la ϵ -vecindad de L.

La diferencia fundamental entre esta definición y el concepto de límite en variables reales radica en la comprensión de que $z \to z_0$. Para una función f de una variable real x, $\lim_{x \to x0} f(x) = L$ significa que $f(x)$ se acerca a L al acercarse x a x_0, ya sea por su derecha o por su izquierda, sobre la línea de números reales. Pero como z y z_0 son puntos en el plano complejo, cuando se dice que existe el $\lim_{z \to z_0} f(z)$ se entiende que $f(z)$ se acerca a L cuando el punto z se acerca a z_0 desde *cualquier* dirección.

El siguiente teorema sintetiza algunas propiedades de los límites:

TEOREMA 9.1 Límite de la suma, el producto y el cociente

Supóngase que $\lim_{z\to z_0} f(z) = L_1$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = L_2$. Entonces:

i) $\lim_{z\to z_0} [f(z) + g(z)] = L_1 + L_2$

ii) $\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = L_1L_2$

iii) $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$

DEFINICIÓN 9.5 Continuidad en un punto

Una función f es **continua** en un punto z_0 si $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Como consecuencia del teorema 9.1 se tiene que si dos funciones f y g son continuas en un punto z_0, entonces su suma y su producto son continuos en z_0. El cociente de las dos funciones es continuo en z_0 siempre y cuando $g(z_0) \neq 0$.

Una función f definida por

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{2}$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, son constantes complejas, se denomina **polinomio** de grado n. Aunque no se demuestra aquí, el resultado del límite $\lim_{z\to z_0} z = z_0$ indica que la función polinómica simple $f(z) = z$ es continua en todos los puntos, esto es, en todo el plano z. Considerando este resultado y aplicando repetidamente los teoremas 9.1 *ii)* y *i)*, se deduce que una función polinómica (2) es continua en cualquier punto. Una **función racional**

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

donde g y h son funciones polinómicas, es continua excepto en aquellos puntos para los cuales $h(z)$ es 0.

Derivada La derivada de una función compleja se define en términos de un límite. El símbolo utilizado Δz en la siguiente definición es el número complejo $\Delta x + i\Delta y$.

DEFINICIÓN 9.6 Derivada

Supóngase que la función compleja f se define en la vecindad de un punto z_0. La **derivada** de f en z_0 es

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \tag{3}$$

siempre y cuando exista dicho límite.

Si el límite (3) existe, se dice que la función f es **derivable** en z_0. La derivada de una función $w = f(z)$ también se escribe dw/dz.

Como sucede con las variables reales, las funciones derivables deben ser continuas:

Si f es derivable en z_0, entonces f es continua en z_0.

Es más, las **reglas de derivación** son las mismas que en el cálculo de variables reales. Si f y g son derivables en un punto z, y c es una constante compleja, entonces:

Reglas de la constante: $$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z) \tag{4}$$

Regla de la suma: $$\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z) \tag{5}$$

Regla del producto: $$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)g'(z) + g(z)f'(z) \tag{6}$$

Regla del cociente: $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \tag{7}$$

Regla de la cadena: $$\frac{d}{dz}f(g(z)) = f'(g(z))g'(z). \tag{8}$$

La regla común para la derivada de potencias de z también es válida:

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}, \text{ siendo } n \text{ un entero.} \tag{9}$$

Ejemplo 3 Uso de las reglas de derivación

Derive *a)* $f(z) = 3z^4 - 5z^3 + 2z$ y *b)* $f(z) = \dfrac{z^2}{4z + 1}$.

Solución *a)* Utilizando la regla de la potencia (9) junto con la regla de la suma (5) se obtiene

$$f'(z) = 3 \cdot 4z^3 - 5 \cdot 3z^2 + 2 = 12z^3 - 15z^2 + 2.$$

b) De la regla del cociente (7),

$$f'(z) = \frac{(4z + 1) \cdot 2z - z^2 \cdot 4}{(4z + 1)^2} = \frac{4z^2 + 2z}{(4z + 1)^2}.$$ ❑

Para que una función compleja f sea derivable en un punto z_0, $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ debe tender al mismo número complejo desde cualquier dirección. Así, en el estudio de variables complejas, son mayores los requisitos para que una función sea derivable que en el caso de variables reales. Si se inventa una función compleja, por ejemplo $f(z) = x + 4iy$, es muy probable que no sea derivable.

Ejemplo 4 Función que no es derivable en punto alguno

Demuestre que la función $f(z) = x + 4iy$ no es derivable en punto alguno.

Solución Considerando $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ se tiene

$$f(z + \Delta z) - f(z) = (x + \Delta x) + 4i(y + \Delta y) - x - 4iy = \Delta x + 4i\Delta y$$

y por lo tanto $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 4i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{10}$$

Ahora, si se considera que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una línea paralela al eje x, entonces $\Delta y = 0$ y el valor de (10) es 1. Por otro lado, si se considera que $\Delta z \to 0$ a lo largo de una línea paralela al eje y, entonces $\Delta x = 0$ y se ve que el valor de (10) es 4. Por lo tanto, $f(z) = x + 4iy$ es derivable en ningún punto z. ❑

■ **Funciones analíticas** Si bien los requerimientos para que una función sea derivable son severos, existe una clase de funciones sumamente importante, cuyos miembros cumplen incluso con condiciones más severas. Estas funciones se denominan **funciones analíticas**.

DEFINICIÓN 9.7 Analiticidad en un punto

Se dice que una función compleja $w = f(z)$ es **analítica en un punto** z_0 si f es derivable en z_0 y en todo punto de alguna vecindad de z_0.

Una función f es analítica en un dominio D si es analítica en todos los puntos de D.

La definición 9.7 se debe leer cuidadosamente. La analiticidad *en un punto* es una propiedad de vecindad. La analiticidad en un punto no es, por lo tanto, sinónimo de derivabilidad en un punto. Se deja como ejercicio demostrar que la función $f(z) = |z|^2$ es derivable en $z = 0$, pero no es derivable en cualquier otro punto. Así pues, $f(z) = |z|^2$ es no analítica en todo punto. En contraste, el polinomio simple $f(z) = z^2$ es derivable en cualquier punto z del plano complejo y, por ende, $f(z) = z^2$ es analítica en cualquier punto. Una función que es analítica en cualquier punto z es una **función entera**. Los polinomios son derivables en todo punto z y por esta razón son funciones enteras.

Comentarios

Hay que recordar que un número c es un cero de un polinomio si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$. El mismo resultado es válido para el análisis complejo. Por ejemplo, puesto que $f(z) = z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$, los ceros de f son $-i$, i, $-2i$ y $2i$. Por lo tanto, $f(z) = (z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)$. Asimismo, la fórmula cuadrática también es válida. Por ejemplo, utilizando esta fórmula se escribe

$$f(z) = z^2 - 2z + 2 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))$$
$$= (z - 1 - i)(z - 1 + i).$$

Véanse los problemas 21 y 22 de los ejercicios 9.4.

EJERCICIOS 9.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-25.

En los problemas del 1 al 6, encuentre la imagen de la línea indicada bajo la transformación $f(z) = z^2$.

1. $y = 2$
2. $x = -3$
3. $x = 0$
4. $y = 0$
5. $y = x$
6. $y = -x$

En los problemas del 7 al 14, exprese la función indicada en la forma $f(z) = u + iv$.

7. $f(z) = 6z - 5 + 9i$
8. $f(z) = 7z - 9i\bar{z} - 3 + 2i$
9. $f(z) = z^2 - 3z + 4i$
10. $f(z) = 3\bar{z}^2 + 2z$
11. $f(z) = z^3 - 4z$
12. $f(z) = z^4$
13. $f(z) = z + 1/z$
14. $f(z) = \dfrac{z}{z + 1}$

En los problemas del 15 al 18, calcúlese la función indicada en los puntos dados.

15. $f(z) = 2x - y^2 + i(xy^3 - 2x^2 + 1)$
    a) $2i$ *b*) $2 - i$ *c*) $5 + 3i$
16. $f(z) = (x + 1 + 1/x) + i(4x^2 - 2y^2 - 4)$
    a) $1 + i$ *b*) $2 - i$ *c*) $1 + 4i$
17. $f(z) = 4z + i\bar{z} + \mathrm{Re}(z)$
    a) $4 - 6i$ *b*) $-5 + 12i$ *c*) $2 - 7i$
18. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$
    a) $\pi i/4$ *b*) $-1 - \pi i$ *c*) $3 + \pi i/3$

En los problemas del 19 al 22, el límite indicado sí existe; encuentre su valor.

19. $\lim_{z \to i}(4z^3 - 5z^2 + 4z + 1 - 5i)$
20. $\lim_{z \to 1 - i} \dfrac{5z^2 - 2z + 2}{z + 1}$

21. $\lim_{z\to i} \dfrac{z^4 - 1}{z - i}$

22. $\lim_{z\to 1+i} \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 2i}$

En los problemas 23 y 24, demuestre que el límite indicado no existe.

23. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$

24. $\lim_{z\to 1} \dfrac{x + y - 1}{z - 1}$

En los problemas 25 y 26, utilice (3) para obtener la derivada indicada de la función dada.

25. $f(z) = z^2,\ f'(z) = 2z$

26. $f(z) = 1/z,\ f'(z) = -1/z^2$

En los problemas del 27 al 34, utilice (4)−(8) para encontrar la derivada $f'(z)$ de la función indicada.

27. $f(z) = 4z^3 - (3 + i)z^2 - 5z + 4$

28. $f(z) = 5z^4 - iz^3 + (8 - i)z^2 - 6i$

29. $f(z) = (2z + 1)(z^2 - 4z + 8i)$

30. $f(z) = (z^5 + 3iz^3)(z^4 + iz^3 + 2z^2 - 6iz)$

31. $f(z) = (z^2 - 4i)^3$

32. $f(z) = (2z - 1/z)^6$

33. $f(z) = \dfrac{3z - 4 + 8i}{2z + i}$

34. $f(z) = \dfrac{5z^2 - z}{z^3 + 1}$

En los problemas del 35 al 38, señale los puntos en los cuales la función indicada no es analítica.

35. $f(z) = \dfrac{z}{z - 3i}$

36. $f(z) = \dfrac{2i}{z^2 - 2z + 5iz}$

37. $f(z) = \dfrac{z^3 + z}{z^2 + 4}$

38. $f(z) = \dfrac{z - 4 + 3i}{z^2 - 6z + 25}$

39. Demuestre que la función $f(z) = \bar{z}$ no es derivable en punto alguno.

40. La función $f(z) = |z|^2$ es continua a lo largo de todo el plano complejo. Demuestre que, sin embargo, f es derivable únicamente en el punto $z = 0$. [*Sugerencia:* Utilice (3) y considere dos casos: $z = 0$ y $z \neq 0$. En el segundo caso haga que Δz tienda a 0 a lo largo de una línea paralela al eje x y después haga lo mismo a lo largo de una línea paralela al eje y.]

En los problemas del 41 al 44, encuentre las líneas de corriente del flujo asociadas con la función compleja indicada.

41. $f(z) = 2z$

42. $f(z) = iz$

43. $f(z) = 1/\bar{z}$

44. $f(z) = x^2 - iy^2$

En los problemas 45 y 46, utilice una calculadora que grafique o una computadora para obtener la imagen de la parábola indicada bajo la transformación $f(z) = z^2$.

45. $y = \frac{1}{2}x^2$

46. $y = (x - 1)^2$

9.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Introducción En la sección anterior se plantea que una función f de una variable compleja z es *analítica en un punto* z cuando f es derivable en z y también derivable en todos los puntos de *alguna* vecindad de z. Este requisito es más estricto que simplemente la *derivabilidad en un punto*, ya que una función compleja puede ser derivable en un punto z aunque no sea derivable en todos los demás. Una función f es *analítica en un dominio* D si f es derivable en todos los puntos de D. A continuación se desarrolla una prueba para la analiticidad de una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Una condición necesaria para la analiticidad En el próximo teorema se observa que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto z, entonces las funciones u y v deben satisfacer un par de ecuaciones que relacionan sus derivadas parciales de primer orden. Este resultado es una condición necesaria para la analiticidad.

TEOREMA 9.2 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en un punto $z = x + iy$. Entonces existen las derivadas parciales de primer orden de u y v en el punto z que cumplen con las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Demostración Como $f'(z)$ existe se sabe que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \tag{2}$$

Escribiendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, se tiene a partir de (2) que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}. \quad (3)$$

Puesto que este límite existe, Δz puede tender a 0 desde cualquier dirección conveniente. En particular, si $\Delta z \to 0$ horizontalmente, entonces $\Delta z = \Delta x$ y, por lo tanto, (3) se convierte en

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Como $f'(z)$ existe, también existen los dos límites de (4). Pero, por definición, los límites de (4) son las primeras derivadas parciales de u y v respecto a x. Con esto, se acaba de demostrar que

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

Si ahora se hace que $\Delta z \to 0$ verticalmente, entonces $\Delta z = i\Delta y$ y (3) queda como

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y}, \quad (6)$$

que es lo mismo que

$$f'(z) = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7)$$

Igualando las partes reales e imaginarias de (5) y (7) se produce el par de ecuaciones en (1). ❑

Si una función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica sobre un dominio D, entonces las funciones reales u y v deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1) en todos los puntos de D.

Ejemplo 1 Uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

El polinomio $f(z) = z^2 + z$ es analítico para todos los valores de z y $f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y)$. Por lo tanto, $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ y $v(x, y) = 2xy + y$. Para cualquier punto (x, y) se observa que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$ ❑

Ejemplo 2 Uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

Demuestre que la función $f(z) = (2x^2 + y) + i(y^2 - x)$ no es analítica en punto alguno.

Solución Se igualan $u(x, y) = 2x^2 + y$ y $v(x, y) = y^2 - x$. Ahora, de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

se ve que $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ pero la igualdad $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ se cumple únicamente sobre la línea $y = 2x$. Sin embargo, para cualquier punto z de la línea, no existe vecindad o disco abierto alrededor de z en el que f sea derivable. Se concluye que f es no analítica en punto alguno. ❑

Importante.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann no son suficientes por sí mismas para asegurar la analiticidad. Sin embargo, cuando se añade la condición de continuidad a u y a v *así como* a las cuatro derivadas parciales, se puede demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann implican analiticidad. La demostración es larga y complicada, por lo que sólo se plantea el resultado.

TEOREMA 9.3 Criterio para la analiticidad

Supóngase que las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio D. Si u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos de D, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D.

Ejemplo 3 Uso del teorema 9.3

Para la función $f(z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En otras palabras, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen excepto en el punto donde $x^2 + y^2 = 0$, esto es, en $z = 0$. Se concluye del teorema 9.3 que f es analítica en cualquier dominio que no contenga al punto $z = 0$. ❑

Los resultados (5) y (7) se obtienen bajo la consideración básica de que f es derivable en el punto z. O sea, (5) y (7) proporcionan una fórmula para el cálculo de $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial v} - i\frac{\partial u}{\partial v}. \tag{8}$$

Por ejemplo, se sabe que $f(z) = z^2$ es derivable para cualquier z. Con $u(x, y) = x^2 - y^2$, $\partial u/\partial x = 2x$, $v(x, y) = 2xy$ y $\partial v/\partial x = 2y$, se observa que

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Debe recordarse que la analiticidad implica derivabilidad, pero no lo contrario. Un teorema análogo al 9.3 proporciona condiciones suficientes para la derivabilidad:

Si las funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una vecindad de z, y si u y v cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el punto z, entonces la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable en $f'(z)$ viene dada por (8).

La función $f(z) = x^2 - y^2 i$ en ningún punto es analítica. Con las igualdades $u(x, y) = x^2$ y $v(x, y) = -y^2$, se observa de

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen únicamente cuando $y = -x$. Pero como las funciones u, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, v, $\partial v/\partial x$, y $\partial v/\partial y$ son continuas en cualquier punto, se deduce que f es derivable sobre la línea $y = -x$ y que (8) proporciona la derivada $f'(z) = 2x = -2y$ sobre dicha línea.

Funciones armónicas En el capítulo 5 se comenta que la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ aparece en ciertos problemas relacionados con temperaturas en estado estable. Esta ecuación diferencial parcial desempeña también un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada. Por supuesto, como se ve a continuación, las

partes real e imaginaria de una función analítica no pueden elegirse arbitrariamente, puesto que tanto u como v deben satisfacer la ecuación de Laplace. Esta liga entre las funciones analíticas y la ecuación de Laplace hace esenciales a las variables complejas en el estudio serio de las matemáticas aplicadas.

DEFINICIÓN 9.8 Funciones armónicas

Se dice que una función real $\phi(x, y)$ que tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en un dominio D y que cumple la ecuación de Laplace es **armónica** en D.

TEOREMA 9.4 Una fuente de funciones armónicas

Supóngase que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D. Entonces las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son funciones armónicas.

Demostración En esta demostración se considera que u y v tienen derivadas parciales de segundo orden continuas. Como f es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen. Derivando ambas partes de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a x y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x}.$$

Suponiendo continuidad, las parciales combinadas son iguales. Por lo tanto, sumando estas dos ecuaciones se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Esto demuestra que $u(x, y)$ es armónica.

Derivando ahora ambos lados de $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ respecto a y y derivando ambos lados de $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ con respecto a x y restándolas se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \qquad \square$$

■ **Funciones armónicas conjugadas** Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces u y v son armónicas en D. Ahora, supóngase que $u(x, y)$ es una función dada que es armónica en D. Entonces es posible encontrar en ocasiones otra función $v(x, y)$ que sea armónica en D, de forma que $u(x, y) + iv(x, y)$ sea una función analítica en D. La función v se denomina una **función armónica conjugada** de u.

Ejemplo 4 Función armónica/función armónica conjugada

a) Verifíquese que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 5y$ es armónica en todo el plano complejo. *b*) Encuentre la función armónica conjugada de u.

Solución *a*) A partir de las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 5, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

se observa que u cumple la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$$

b) Como la función armónica conjugada v tiene que cumplir con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se debe tener que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy + 5. \tag{9}$$

La integración parcial de la primera ecuación de (9) respecto a y da como resultado $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + h(x)$. De aquí, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + h'(x).$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación de (9) se tiene que $h'(x) = 5$, y por lo tanto $h(x) = 5x + C$. De esta manera, la función armónica conjugada de u es $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 5x + C$. La función analítica es

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 - 5y + i(3x^2y - y^3 + 5x + C). \qquad \square$$

Comentarios

Supóngase que u y v son funciones armónicas que comprenden las partes real e imaginaria de una función analítica $f(z)$. Las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ definidas por estas funciones conforman dos familias *ortogonales* de curvas. (Véase el problema 32 de los ejercicios 9.5.) Por ejemplo, las curvas de nivel generadas por la función analítica simple $f(z) = z = x + iy$ son $x = c_1$ y $y = c_2$. La familia de líneas verticales definidas por $x = c_1$ es claramente ortogonal a la familia de líneas horizontales definidas por $y = c_2$. En electrostática, si $u(x, y) = c_1$ define a las curvas equipotenciales, entonces la otra familia, ortogonal, $v(x, y) = c_2$ define a las líneas de fuerza.

EJERCICIOS 9.5

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas 1 y 2, la función indicada es analítica para cualquier z. Demuestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en cualquier punto.

1. $f(z) = z^3$
2. $f(z) = 3z^2 + 5z - 6i$

En los problemas del 3 al 8, demuestre que la función indicada no es analítica en punto alguno.

3. $f(z) = \text{Re}(z)$
4. $f(z) = y + ix$
5. $f(z) = 4z - 6\bar{z} + 3$
6. $f(z) = \bar{z}^2$
7. $f(z) = x^2 + y^2$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$

En los problemas del 9 al 14, utilice el teorema 9.3 para demostrar que la función indicada es analítica en un dominio adecuado.

9. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$
10. $f(z) = x + \operatorname{sen} x \cosh y + i(y + \cos x \operatorname{senh} y)$
11. $f(z) = e^{x^2-y^2} \cos 2xy + ie^{x^2-y^2} \operatorname{sen} 2xy$
12. $f(z) = 4x^2 + 5x - 4y^2 + 9 + i(8xy + 5y - 1)$
13. $f(z) = \dfrac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - i\dfrac{y}{(x - 1)^2 + y^2}$
14. $f(x) = \dfrac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$

En los problemas 15 y 16, encuentre las constantes reales a, b, c y d de forma que la función indicada sea analítica.

15. $f(z) = 3x - y + 5 + i(ax + by - 3)$
16. $f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$

En los problemas del 17 al 20, demuestre que la función indicada no es analítica en punto alguno, pero es derivable a lo largo de la curva o las curvas indicadas.

17. $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$; eje x
18. $f(z) = 3x^2y^2 - 6x^2y^2i$; ejes coordenados
19. $f(z) = x^3 + 3xy^2 - x + i(y^3 + 3x^2y - y)$; ejes coordenados
20. $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$; $y = x + 2$
21. Utilice (8) para encontrar la derivada de la función del problema 9.
22. Utilice (8) para encontrar la derivada de la función del problema 11.

En los problemas del 23 al 28, verifique que la función indicada u es armónica. Encuentre v, la función armónica conjugada de u. Genérese la función analítica correspondiente $f(z) = u + iv$.

23. $u(x, y) = x$
24. $u(x, y) = 2x - 2xy$
25. $u(x, y) = x^2 - y^2$
26. $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$
27. $u(x, y) = \log_e(x^2 + y^2)$
28. $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \operatorname{sen} y)$
29. Bosqueje las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ de la función analítica $f(z) = z^2$.
30. Considere la función $f(z) = 1/z$. Describa las curvas de nivel.
31. Considere la función $f(z) = z + 1/z$. Describa la curva de nivel $v(x, y) = 0$.
32. Considérese que u y v son las funciones armónicas que conforman las partes real e imaginaria de una función analítica. Demuestre que las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son ortogonales. [*Sugerencia:* Considere los gradientes de u y v. Ignore el caso donde un vector gradiente sea el vector cero.]

9.6 Funciones exponenciales y logarítmicas

Introducción En esta y la próxima sección, se examinan las funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas de una variable compleja z. Aunque la definición de estas funciones complejas se deduce a partir de sus análogas para variables reales, las propiedades de estas funciones complejas contienen algunas sorpresas.

Función exponencial Recuérdese que en variables reales la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene las propiedades

$$f'(x) = f(x) \quad \text{y} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2). \tag{1}$$

Desde luego, se desea que la definición de la función compleja $f(z) = e^z$, donde $z = x + iy$, se reduzca a e^x para $y = 0$ y que posea las mismas propiedades que (1).

Ya se ha utilizado anteriormente una función exponencial con un exponente imaginario puro; la fórmula de Euler,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y, \quad \text{donde } y \text{ es un número real,} \tag{2}$$

desempeña un papel importante en la sección 3.3 del tomo I. Se puede establecer formalmente el resultado (2) utilizando las series de Maclaurin para e^x y sustituyendo x por iy y reacomodando términos:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Para $z = x + iy$ es razonable esperar que

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

y por lo tanto, de (2), $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

A partir de este resultado formal, se plantea la siguiente definición:

DEFINICIÓN 9.9 Función exponencial

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{3}$$

La función exponencial e^z también se denota con el símbolo $\exp z$. Nótese que (3) se reduce a e^x cuando $y = 0$.

Ejemplo 1 Valor complejo de la función exponencial

Calcule $e^{1.7+4.2i}$.

Solución Con $x = 1.7$ y $y = 4.2$ se tiene, con la ayuda de una calculadora y redondeando a cuatro cifras decimales, que

$$e^{1.7}\cos 4.2 = -2.6837 \qquad \text{y} \qquad e^{1.7}\operatorname{sen} 4.2 = -4.7710.$$

De (3) se infiere que $e^{1.7+4.2i} = -2.6837 - 4.7710i$. ❑

Las partes real e imaginaria de e^z, $u(x, y) = e^x \cos y$ y $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en cualquier punto z del plano complejo. Es más, las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en todos los puntos del plano complejo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Se deduce del teorema 9.3 que $f(z) = e^z$ es analítica para cualquier z; en otras palabras, f es una función entera.

A continuación se demuestra que e^z posee las dos propiedades deseables indicadas en (1). En primer lugar, la derivada de f viene dada por (5) de la sección 9.5:

$$f'(z) = e^x \cos y + i(e^x \operatorname{sen} y) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = f(z).$$

Como se desea, se ha establecido que

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

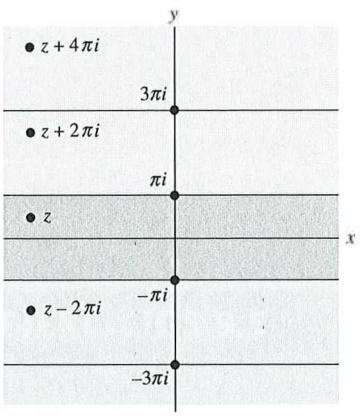


Figura 9.17 Los valores de $f(z) = e^z$ en los cuatro puntos son iguales

En segundo lugar, si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces multiplicando los números complejos y utilizando las fórmulas trigonométricas de la suma, se obtiene

$$\begin{aligned} f(z_1)f(z_2) &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[(\cos (y_1 + y_2) + i \operatorname{sen} (y_1 + y_2)] = f(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{4}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

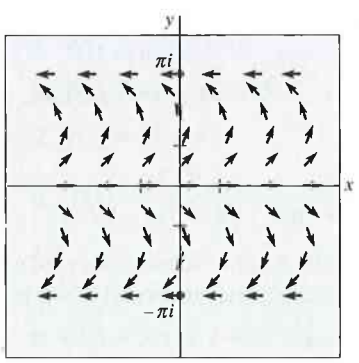


Figura 9.18 Flujo sobre la región fundamental

Periodicidad A diferencia de la función real e^x, la función compleja $f(z) = e^z$ es **periódica** con periodo complejo $2\pi i$. Como $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1$ y, considerando (4), $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$ para cualquier z, se deduce que $f(z + 2\pi i) = f(z)$. Debido a esta periodicidad compleja, todos los valores funcionales posibles de $f(z) = e^z$ se consideran en una franja infinita horizontal de ancho 2π. Así, si se divide el plano complejo en franjas horizontales definidas por $(2n - 1)\pi < y \leq (2n + 1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, entonces, como se muestra en la figura 9.17, para cualquier punto z de la franja $-\pi < y \leq \pi$, los valores $f(z)$, $f(z + 2\pi i), f(z - 2\pi i), f(z + 4\pi i)$, etc., son los mismos. La franja $-\pi < y \leq \pi$ se denomina la **región fundamental** para la función exponencial $f(z) = e^z$. El flujo correspondiente sobre la región fundamental se muestra en la figura 9.18.

Forma polar de un número complejo En la sección 9.2 se plantea que el número complejo z puede escribirse en forma polar como $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$. Puesto que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ se escribe ahora la forma polar de un número complejo como

$$z = re^{i\theta}.$$

Por ejemplo, en forma polar $z = 1 + i$ es $z = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$.

■ **Comentarios** Al aplicar las matemáticas, los matemáticos y los ingenieros suelen abordar el mismo problema en formas completamente diferentes. Considérese, por ejemplo, la solución del ejemplo 10 de la sección 3.8 del tomo I. En este ejemplo se utiliza estrictamente el análisis real para encontrar la corriente de estado estable $i_p(t)$ en un circuito *LRC* en serie descrito por la ecuación diferencial

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Los ingenieros eléctricos usualmente resuelven problemas de circuitos como éste utilizando análisis complejo. Para ilustrar esto, denótese la unidad imaginaria $\sqrt{-1}$ con el símbolo j para no confundirla con la corriente i. Como la corriente i se relaciona con la carga q por medio de $i = dq/dt$, la ecuación diferencial es la misma que

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E_0 \operatorname{sen} \gamma t.$$

Asimismo, el voltaje impreso E_0 sen γt se reemplaza por $\operatorname{Im}(E_0e^{j\gamma t})$, donde Im significa "parte imaginaria de". Gracias a esta última formulación, el método de coeficientes indeterminados sugiere considerar una solución en la forma de un múltiplo constante de una exponencial compleja; esto es, $i_p(t) = \operatorname{Im}(Ae^{j\gamma t})$. Sustituyendo esta expresión en la última ecuación diferencial, aprovechando que q es una antiderivada de i e igualando los coeficientes de $e^{j\gamma t}$:

$$\left(jL\gamma + R + \frac{1}{jC\gamma}\right)A = E_0 \text{ conduce a } A = \frac{E_0}{R + j\left(L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}\right)}.$$

La cantidad $Z = R + j(L\gamma - 1/C\gamma)$ se denomina **impedancia compleja** del circuito. Obsérvese que el módulo de la impedancia compleja, $|Z| = \sqrt{R^2 + (L\gamma - 1/C\gamma)^2}$, se denotó en el ejemplo 10 de la sección 3.8 del tomo I por medio de la letra Z y se denominó impedancia.

Ahora, la impedancia compleja en forma polar es

$$Z = |Z|e^{j\theta} \quad \text{donde} \quad \tan\theta = \frac{L\gamma - \dfrac{1}{C\gamma}}{R}.$$

Por lo tanto $A = E_0/Z = E_0/(|Z|e^{j\theta})$, y así la corriente en estado estable se escribe como

$$i_p(t) = \operatorname{Im}\frac{E_0}{|Z|}e^{-j\theta}e^{j\gamma t}.$$

Se exhorta al lector a verificar que esta última expresión es la misma que (35) de la sección 3.8 del tomo I.

■ **Función logarítmica** El logaritmo de un número complejo $z = x + iy$, $z \neq 0$, se define como la inversa de la función exponencial, esto es,

$$w = \ln z \quad \text{si} \quad z = e^w. \tag{5}$$

En (5) se observa que ln z no está definido para $z = 0$, ya que no existe valor de w para el cual $e^w = 0$. Para encontrar las partes real e imaginaria de ln z se escribe $w = u + iv$ y se utilizan (3) y (5):

$$x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) = e^u \cos v + ie^u \operatorname{sen} v.$$

La última igualdad implica que $x = e^u \cos v$ y que $y = e^u$ sen v. Se pueden despejar u y v de estas dos ecuaciones. Primero, elevándolas al cuadrado y sumándolas, se tiene

$$e^{2u} = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \quad \text{y así} \quad u = \log_e|z|,$$

donde $\log_e|z|$ denota el *logaritmo natural real* del módulo de z. En segundo lugar, para despejar v se dividen las dos ecuaciones y se obtiene

$$\tan v = \frac{y}{x}.$$

Esta última ecuación significa que v es un argumento de z, es decir, $v = \theta = \arg z$. Pero como no existe un único argumento de un número complejo determinado $z = x + iy$, si θ es un argumento de z, entonces también lo es $\theta + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

DEFINICIÓN 9.10 Logaritmo de un número complejo

Para $z \neq 0$ y $\theta = \arg z$,

$$\ln z = \log_e|z| + i(\theta + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{6}$$

Como se indica claramente en (6), existen infinitos valores del logaritmo de un número complejo z. Esto no debe resultar sorpresivo, puesto que la función exponencial es periódica.

En cálculo real, los logaritmos de números negativos no están definidos. Como se muestra en el siguiente ejemplo, éste no es el caso para cálculo complejo.

Ejemplo 2 Valores complejos de la función logarítmica

Encuentre los valores de: *a*) $\ln(-2)$, *b*) $\ln i$ y *c*) $\ln(-1 - i)$.

Solución *a*) Con $\theta = \arg(-2) = \pi$ y $\log_e|-2| = 0.6932$, se tiene de (6) que

$$\ln(-2) = 0.6932 + i(\pi + 2n\pi).$$

b) Con $\theta = \arg(i) = \pi/2$ y $\log_e|i| = \log_e 1 = 0$, se tiene de (6) que

$$\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

En otras palabras, $\ln i = \pi i/2, -3\pi i/2, 5\pi i/2, -7\pi i/2$, etcétera.

c) Con $\theta = \arg(-1 - i) = 5\pi/4$ y $\log_e|-1 - i| = \log_e \sqrt{2} = 0.3466$, se tiene de (6) que

$$\ln(-1 - i) = 0.3466 + i\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right).$$ ❑

Ejemplo 3 Solución de una ecuación exponencial

Encuentre todos los valores de z tales que $e^z = \sqrt{3} + i$.

Solución De (5), y reemplazando el símbolo w por z, se tiene que $z = \ln(\sqrt{3} + i)$. Ahora, $|\sqrt{3} + i| = 2$ y $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ implican que $(\sqrt{3} + i) = \pi/6$, por lo que (6) conduce a

$$z = \log_e 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right) \quad \text{o} \quad z = 0.6931 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right).$$ ❑

Valor principal Es interesante observar que, como consecuencia de (6), el logaritmo de un número real positivo tiene muchos valores. Por ejemplo, en cálculo real, $\log_e 5$ tiene únicamente un valor: $\log_e 5 = 1.6094$, mientras que en cálculo complejo, $\ln 5 = 1.6094 + 2n\pi i$. El valor de $\ln 5$ correspondiente a $n = 0$ es el mismo que el logaritmo real $\log_e 5$ y se denomina el **valor principal** de $\ln 5$. Recuérdese que en la sección 9.2 se estipula que el argumento principal de un número complejo, escrito como $\text{Arg } z$, se encuentra en el

intervalo $(-\pi, \pi]$. En general, el **valor principal** del ln z se define como logaritmo complejo correspondiente a $n = 0$ y $\theta = \text{Arg } z$. Para destacar el valor principal del logaritmo se adopta la notación Ln z. En otras palabras,

$$\text{Ln } z = \log_e|z| + i \text{ Arg } z. \tag{7}$$

Como Arg z es único, existe solamente un valor de Ln z para cada $z \neq 0$.

Ejemplo 4 Valores principales

Los valores principales de los logaritmos del ejemplo 2 son los que siguen.

a) Como Arg $(-2) = \pi$, únicamente se necesita fijar $n = 0$ en el resultado indicado en el inciso *a*) del ejemplo 2:

$$\text{Ln } (-2) = 0.6932 + \pi i.$$

b) En forma similar, puesto que Arg $(i) = \pi/2$, se fija $n = 0$ en el resultado del inciso *b*) del ejemplo 2 para obtener

$$\text{Ln } i = \frac{\pi}{2} i.$$

c) En el inciso *c*) del ejemplo 2, arg $(-1 - i) = 5\pi/4$ no es el argumento principal de $z = -1 - i$. El argumento de z comprendido en el intervalo $(-\pi, \pi]$ es Arg $(-1 - i) = -3\pi/4$. Así, de (7) se tiene que

$$\text{Ln } (-1 - i) = 0.3466 - \frac{3\pi}{4} i.$$ ❑

Hasta este instante se ha evitado emplear la palabra *función* por la obvia razón de que ln z definido en (6) no es una función, en la interpretación estricta de dicha palabra. Sin embargo, se acostumbra escribir $f(z) = \ln z$ y referirse a $f(z) = \ln z$ mediante la frase aparentemente contradictoria *función de valores múltiples*. Aunque no se entra en detalles, (6) puede interpretarse como una colección infinita de funciones logarítmicas (significado estándar de la palabra). Cada función de esta colección se denomina una **rama** de ln z. La función $f(z) = \text{Ln } z$ se llama entonces la **rama principal** de ln z, o la **función logaritmo principal**. Para minimizar la confusión, por simplicidad se utilizan a partir de este instante las palabras *función logarítmica* al referirse a $f(z) = \ln z$ o $f(z) = \text{Ln } z$.

Algunas propiedades usuales de la función logarítmica son válidas en el caso complejo:

$$\ln (z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \text{y} \quad \ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2. \tag{8}$$

Las ecuaciones (8) y (9) se interpretan en el sentido de que si se asignan valores a dos de estos términos, entonces el tercero toma un valor correcto.

Ejemplo 5 Propiedades de los logaritmos

Supóngase que $z_1 = 1$ y $z_2 = -1$. Entonces, si se considera ln $z_1 = 2\pi i$ y ln $z_2 = \pi i$ se tiene que

$$\ln (z_1 z_2) = \ln (-1) = \ln z_1 + \ln z_2 = 2\pi i + \pi i = 3\pi i$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln (-1) = \ln z_1 - \ln z_2 = 2\pi i - \pi i = \pi i.$$ ❑

Al igual que (7) de la sección 9.2 no es válida cuando arg z se sustituye con Arg z, de la misma forma (8) no es verdadera, en general, cuando ln z se sustituye por Ln z; véanse los problemas 45 y 46 de los ejercicios 9.6.

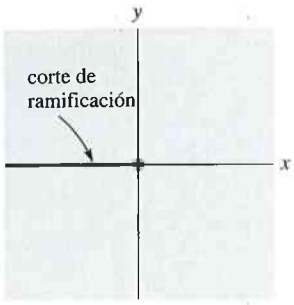


Figura 9.19 Corte de ramificación para Ln z

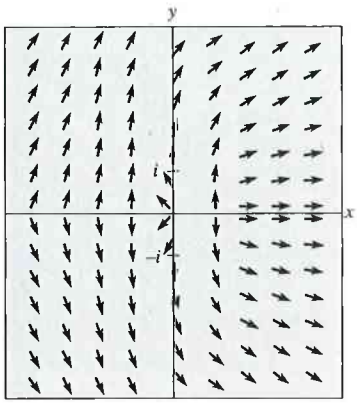


Figura 9.20 w = Ln z como un flujo

■ **Analiticidad** La función logarítmica $f(z) = \text{Ln } z$ no es continua en $z = 0$ ya que $f(0)$ no está definida. Es más, $f(z) = \text{Ln } z$ es discontinua en todos los puntos del eje real negativo. Esto se debe a que la parte imaginaria de la función, $v = \text{Arg } z$, es discontinua únicamente en dichos puntos. Para ver esto, supóngase que x_0 es un punto sobre el eje real negativo. Cuando $z \to x_0$ desde el semiplano superior, entonces Arg $z \to \pi$, mientras que si $z \to x_0$ desde el semiplano inferior, entonces Arg $z \to -\pi$. Esto significa que $f(z) = \text{Ln } z$ no es analítica en el eje real no positivo. Sin embargo, $f(z) = \text{Ln } z$ es analítica en todo el dominio D que consta de todos los puntos del plano complejo excepto los del eje real no positivo. Es conveniente pensar en D como el plano complejo a partir del cual el eje real no positivo se ha cortado. Como $f(z) = \text{Ln } z$ es la rama principal de ln z, el eje real no positivo se conoce como **corte de ramificación** para la función; véase la figura 9.19. Se deja como ejercicio demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en todo este plano cortado y que la derivada de Ln z viene dada por

$$\frac{d}{dz}\text{Ln } z = \frac{1}{z} \tag{9}$$

para cualquier z en D.

La figura 9.20 representa a $w = \text{Ln } z$ como un flujo. Nótese que el campo vectorial no es continuo a lo largo del corte de ramificación.

■ **Potencias complejas** Con base en la igualdad $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ de las variables reales, se definen potencias complejas de un número complejo. Si α es un número complejo y $z = x + iy$, entonces z^α se define como

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}, \quad z \neq 0. \tag{10}$$

En general, z^α tiene valores múltiples puesto que ln z también los tiene. Sin embargo, en el caso especial en el que $\alpha = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, (10) tiene un único valor, ya que sólo existe un valor para z^2, z^3, z^{-1}, etc. Para comprobar esto, supóngase que $\alpha = 2$ y $z = re^{i\theta}$, donde θ es cualquier argumento de z. Entonces,

$$e^{2 \ln z} = e^{2(\log_e r + i\theta)} = e^{2 \log_e r + 2i\theta} = e^{2 \log_e r} e^{2i\theta} = r^2 e^{i\theta} e^{i\theta} = (re^{i\theta})(re^{i\theta}) = z^2.$$

Si se utiliza Ln z en lugar de ln z, entonces (10) da el **valor principal** de z^α.

Ejemplo 6 Potencia compleja

Encuentre el valor de i^{2i}.

Solución Con $z = i$, arg $z = \pi/2$ y $\alpha = 2i$, se tiene de (9) que

$$i^{2i} = e^{2i[\log_e 1 + i(\pi/2 + 2n\pi)]} = e^{-(1+4n)\pi}$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Inspeccionando la ecuación, se observa que i^{2i} es real para cualquier valor de n. Como $\pi/2$ es el argumento principal de $z = i$, en $n = 0$ se obtiene el valor principal de i^{2i}. Este valor principal es, redondeado hasta la cuarta cifra decimal, $i^{2i} = e^{-\pi} = 0.0043$. ❑

EJERCICIOS 9.6

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas del 1 al 10, exprese e^z en la forma $a + ib$.

1. $z = \frac{\pi}{6}i$
2. $z = -\frac{\pi}{3}i$
3. $z = -1 + \frac{\pi}{4}i$
4. $z = 2 - \frac{\pi}{2}i$
5. $z = \pi + \pi i$
6. $z = -\pi + \frac{3\pi}{2}i$
7. $z = 1.5 + 2i$
8. $z = -0.3 + 0.5i$
9. $z = 5i$
10. $z = -0.23 - i$

En los problemas 11 y 12, exprese el número indicado en la forma $a + ib$.

11. $e^{1+5\pi i/4}e^{-1-\pi i/3}$
12. $\dfrac{e^{2+3\pi i}}{e^{-3+\pi i/2}}$

En los problemas del 13 al 16, utilice la definición 9.9 para expresar la función indicada en la forma $f(z) = u + iv$.

13. $f(z) = e^{-iz}$
14. $f(z) = e^{2z}$

15. $f(z) = e^{z^2}$ 16. $f(z) = e^{1/z}$

En los problemas del 17 al 20, verifique el resultado indicado.

17. $|e^z| = e^x$ 18. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$

19. $e^{z+\pi i} = e^{z-\pi i}$ 20. $(e^z)^n = e^{nz}$, n es un entero

21. Demuestre que $f(z) = e^z$ no es analítica en punto alguno.

22. *a*) Utilice el resultado del problema 15 para demostrar que $f(z) = e^{z^2}$ es una función entera.

b) Verifique que $u(x, y) = \text{Re}(e^{z^2})$ es una función armónica.

En los problemas del 23 al 28, exprésese ln z en la forma $a + ib$.

23. $z = -5$ 24. $z = -ei$

25. $z = -2 + 2i$ 26. $z = 1 + i$

27. $z = \sqrt{2} + \sqrt{6}i$ 28. $z = -\sqrt{3} + i$

En los problemas del 29 al 34, exprésese Ln z en la forma $a + ib$.

29. $z = 6 - 6i$ 30. $z = -e^3$

31. $z = -12 + 5i$ 32. $z = 3 - 4i$

33. $z = (1 + \sqrt{3}i)^5$ 34. $z = (1 + i)^4$

En los problemas del 35 al 38, encuentre todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

35. $e^z = 4i$ 36. $e^{1/z} = -1$

37. $e^{z-1} = -ie^2$ 38. $e^{2z} + e^z + 1 = 0$

En los problemas del 39 al 42, encuentre todos los valores de la cantidad indicada.

39. $(-i)^{4i}$ 40. $3^{i/\pi}$

41. $(1 + i)^{(1+i)}$ 42. $(1 + \sqrt{3}i)^{3i}$

En los problemas 43 y 44, encuentre el valor principal de la cantidad indicada. Exprese las respuestas en la forma $a + ib$.

43. $(-1)^{(-2i/\pi)}$ 44. $(1 - i)^{2i}$

45. Si $z_1 = i$ y $z_2 = -1 + i$, verifíquese que

$$\text{Ln}\,(z_1 z_2) \neq \text{Ln}\,z_1 + \text{Ln}\,z_2.$$

46. Encuentre los números complejos z_1 y z_2 tales que

$$\text{Ln}\,(z_1/z_2) \neq \text{Ln}\,z_1 - \text{Ln}\,z_2.$$

47. Determine si el enunciado indicado es verdadero.

a) $\text{Ln}\,(-1 + i)^2 = 2\,\text{Ln}\,(-1 + i)$

b) $\text{Ln}\,i^3 = 3\,\text{Ln}\,i$

c) $\ln i^3 = 3 \ln i$

48. Las leyes de los exponentes son válidas para los números complejos α y β:

$$z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}, \quad \frac{z^\alpha}{z^\beta} = z^{\alpha-\beta}, \quad (z^\alpha)^n = z^{n\alpha}, \quad n \text{ es un entero.}$$

Sin embargo, la última ley no es válida si n es un número complejo. Verifíquese que $(i^i)^2 = i^{2i}$, pero que $(i^2)^i \neq i^{2i}$.

49. Para números complejos z que cumplen con $\text{Re}(z) > 0$, demuestre que (7) puede escribirse como

$$\text{Ln}\,z = \frac{1}{2}\log_e(x^2 + y^2) + i\tan^{-1}\frac{y}{x}.$$

50. La función indicada en el problema 49 es analítica.

a) Verifíquese que $u(x, y) = \log_e(x^2 + y^2)$ es una función armónica.

b) Verifíquese que $v(x, y) = \tan^{-1}(y/x)$ es una función armónica.

9.7 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Introducción En esta sección se definen las funciones complejas trigonométricas e hiperbólicas. En forma análoga, a las funciones complejas e^z y Ln z, definidas en la sección anterior, concuerdan con sus contrapartes reales para valores reales de z. Además, se muestra que las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas tienen las mismas derivadas y cumplen con muchas de las mismas igualdades que las funciones trigonométricas e hiperbólicas reales.

Funciones trigonométricas Si x es una variable real, entonces la fórmula de Euler indica que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x.$$

Restando y sumando estas expresiones, se observa que las funciones reales sen x y cos x pueden expresarse con una combinación de funciones exponenciales:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{1}$$

Utilizando (1) como referencia se definen ahora el seno y el coseno de una variable compleja:

DEFINICIÓN 9.11 Seno y coseno trigonométricos

Para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2}$$

Como en trigonometría se definen cuatro funciones trigonométricas adicionales en términos de sen z y cos z:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}. \tag{3}$$

Cuando $y = 0$, cada una de las funciones (2) y (3) se reduce a su contraparte real.

■ **Analiticidad** Como las funciones exponenciales e^{iz} y e^{-iz} son funciones enteras, se deduce que sen z y cos z son también funciones enteras. Ahora, como se ve posteriormente, sen $z = 0$ sólo para los números reales $z = n\pi$, siendo n entero, y cos $z = 0$ únicamente para los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, siendo n entero. Entonces, tan z y sec z son analíticas excepto en los puntos $z = (2n + 1)\pi/2$, y cot z y csc z son analíticas salvo en los puntos $z = n\pi$.

■ **Derivadas** Como $(d/dz)e^z = e^z$ se deduce a partir de la regla de la cadena que $(d/dz)e^{iz} = ie^{iz}$ y $(d/dz)e^{-iz} = -ie^{-iz}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \frac{d}{dz}\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

De hecho, se puede demostrar fácilmente que la forma de las derivadas de las funciones trigonométricas complejas es igual a la de las funciones reales. Se sintetizan a continuación los resultados.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\operatorname{sen} z = \cos z & &\frac{d}{dz}\cos z = -\operatorname{sen} z \\ &\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z & &\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z \\ &\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z & &\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z \end{aligned} \tag{4}$$

■ **Igualdades** Las igualdades trigonométricas comunes también son las mismas en el caso complejo.

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \qquad \cos(-z) = \cos z$$

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$$

$$\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$$

$$\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z \qquad \cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$$

■ **Ceros** Para encontrar los ceros de sen z y cos z se necesita expresar ambas funciones en la forma $u + iv$. Antes de proceder, debe recordarse que si y es real, entonces el seno y el coseno hiperbólicos se definen en términos de las funciones reales exponenciales e^y y e^{-y}:

$$\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}. \tag{5}$$

Ahora, de la definición 9.11 y de la fórmula de Euler se obtiene, después de algunas simplificaciones,

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \operatorname{sen} x\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + i \cos x\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)$$

Así, de (5) se tiene que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \tag{6}$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \tag{7}$$

De (6), (7) y $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$, se encuentra que

$$|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y \tag{8}$$

y

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y. \tag{9}$$

Ahora, un número complejo z es 0 si, y sólo si, $|z|^2 = 0$. Así pues, si sen $z = 0$, entonces de (8) se debe tener que $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y = 0$. Esto implica que sen $x = 0$ y senh $y = 0$, y por lo tanto $x = n\pi$ y $y = 0$. Así, los únicos **ceros** de sen z son los números reales $z = n\pi + 0i = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. En forma similar, de (9) se infiere que cos $z = 0$ únicamente cuando $z = (2n + 1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Ejemplo 1 Valor complejo de la función seno

De (6) se tiene, con la ayuda de una calculadora, que

$$\operatorname{sen}(2 + i) = \operatorname{sen} 2 \cosh 1 + i \cos 2 \operatorname{senh} 1 = 1.4031 - 0.4891i. \quad \square$$

En trigonometría normal, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. Inspeccionando (8) y (9) se observa que estas desigualdades no son válidas para el seno y coseno complejos, puesto que senh y puede tomar valores desde $-\infty$ a ∞. En otras palabras, es perfectamente posible tener soluciones para ecuaciones tales como cos $z = 10$.

Ejemplo 2 Solución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación cos $z = 10$.

Solución De (2), cos $z = 10$ es equivalente a $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 10$. Multiplicando esta última ecuación por e^{iz} se obtiene la ecuación cuadrática en e^{iz}:

$$e^{2iz} - 20e^{iz} + 1 = 0.$$

De la fórmula cuadrática se halla $e^{iz} = 10 \pm 3\sqrt{11}$. Entonces, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tenemos que $iz = \log_e(10 \pm 3\sqrt{11}) + 2n\pi i$. Dividiendo entre i y utilizando $\log_e(10 - 3\sqrt{11}) = -\log_e(10 + 3\sqrt{11})$, las soluciones de la ecuación indicada se expresan como $z = 2n\pi \pm i \log_e(10 + 3\sqrt{11})$. $\square$

Funciones hiperbólicas El seno y el coseno hiperbólicos complejos se definen en forma análoga a las definiciones reales dadas en (5):

DEFINICIÓN 9.12 Seno y coseno hiperbólicos

Para cualquier número complejo $z = x + iy$,

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \tag{10}$$

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante hiperbólicas se definen en términos de senh z y cosh z:

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \tag{11}$$

El seno y el coseno hiperbólicos son funciones enteras, y las funciones definidas en (11) son analíticas excepto en los puntos donde los denominadores son 0. Es fácil ver de (10) que

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z. \tag{12}$$

Es interesante observar que, en contraste con el cálculo real, en cálculo complejo las funciones trigonométricas e hiperbólicas se relacionan entre sí; si se sustituye z por iz en todos los lugares de (10) y se comparan los resultados con (2), se ve que $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z$ y $\cosh(iz) = \cos z$. Estas ecuaciones permiten expresar sen z y cos z en función de senh (iz) y cosh(iz), respectivamente. En forma similar, sustituyendo z por iz en (2) se expresan senh z y cosh$z$ en función de sen(iz) y de cos(iz), respectivamente. A continuación se sintetizan estos resultados:

$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(iz), \quad \cos z = \cosh(iz) \tag{13}$$

$$\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz), \quad \cosh z = \cos(iz). \tag{14}$$

Ceros Las relaciones indicadas en (14) permiten deducir igualdades para las funciones hiperbólicas utilizando los resultados de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, para expresar senh z en la forma $u + iv$, se escribe $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen}(iz)$ como $\operatorname{sen}(-y + ix)$ y se utiliza entonces (6):

$$\operatorname{senh} z = -i[\operatorname{sen}(-y)\cosh x + i\cos(-y)\operatorname{senh} x].$$

Como $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ y $\cos(-y) = \cos y$, lo anterior se simplifica a

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y. \tag{15}$$

En forma semejante, $$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \tag{16}$$

También se deduce directamente de (14) que los **ceros** de senh z y cosh z son imaginarios puros y son, respectivamente,

$$z = n\pi i \quad \text{y} \quad z = (2n + 1)\frac{\pi i}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Periodicidad Como sen x y cos x son periódicos en 2π, se demuestra fácilmente que sen z y cos z son también periódicos con el mismo periodo real 2π. Por ejemplo, de (6), se observa que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen}(x + 2\pi + iy)\\ &= \operatorname{sen}(x + 2\pi)\cosh y + i\cos(x + 2\pi)\operatorname{senh} y\\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,\end{aligned}$$

o sea, $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$. De igual forma, de (7) se tiene que $\cos(z + 2\pi) = \cos z$. Asimismo, las funciones hiperbólicas senh z y cosh z tienen periodo imaginario $2\pi i$. Este último resultado se debe a la definición 9.12 y a que e^z es periódico con periodo de $2\pi i$, o bien a (15) y (16) reemplazando z por $z + 2\pi i$.

EJERCICIOS 9.7 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas del 1 al 12, exprese la cantidad indicada en la forma $a + ib$.

1. $\cos(3i)$
2. $\operatorname{sen}(-2i)$
3. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$
4. $\cos(2 - 4i)$
5. $\tan(i)$
6. $\cot\left(\frac{\pi}{2} + 3i\right)$
7. $\sec(\pi + i)$
8. $\csc(1 + i)$
9. $\cosh(\pi i)$
10. $\operatorname{senh}\left(\frac{3\pi}{2} i\right)$
11. $\operatorname{senh}\left(1 + \frac{\pi}{3} i\right)$
12. $\cosh(2 + 3i)$

En los problemas 13 y 14, verifique el resultado indicado.

13. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) = \frac{5}{4}$
14. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right) = -\frac{3}{4} i$

En los problemas del 15 al 20, encuentre todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

15. $\operatorname{sen} z = 2$
16. $\cos z = -3i$
17. $\operatorname{senh} z = -i$
18. $\operatorname{senh} z = -1$
19. $\cos z = \operatorname{sen} z$
20. $\cos z = i \operatorname{sen} z$

En los problemas 21 y 22, utilice la definición de igualdad de números complejos para encontrar todos los valores de z que cumplan con la ecuación indicada.

21. $\cos z = \cosh 2$
22. $\operatorname{sen} z = i \operatorname{senh} 2$
23. Demuestre que $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
24. Demuestre que $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.
25. Demuestre que $\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.
26. Demuestre que $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.
27. Demuestre que $|\cosh z|^2 = \cos^2 y + \operatorname{senh}^2 x$.
28. Demuestre que $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.
29. Demuestre que $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
30. Demuestre que $\tan z = u + iv$, donde
$$u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \quad \text{y} \quad v = \frac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$
31. Demuestre que $\tanh z$ es periódica con periodo πi.
32. Demuestre que: *a*) $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ y *b*) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$.

9.8 Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Introducción Se acaba de plantear que tanto las funciones trigonométricas como las hiperbólicas son periódicas en el sentido de que son funciones de una variable compleja z. En consecuencia, estas funciones no poseen inversas que sean funciones en la interpretación estricta de la palabra. Las inversas de estas funciones analíticas son funciones de múltiples valores. Igual que al estudiar la función logarítmica en la sección 9.6 se descarta la expresión "múltiples valores" en la argumentación que sigue.

Seno inverso La función **seno inverso**, escrita como $\operatorname{sen}^{-1} z$ o $\operatorname{arcsen} z$, se define como

$$w = \operatorname{sen}^{-1} z \quad \text{si} \quad z = \operatorname{sen} w. \tag{1}$$

El seno inverso puede expresarse en términos de la función logarítmica. Para ver esto se utiliza (1) y la definición de la función seno:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \quad \text{o} \quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

De la última ecuación y de la fórmula cuadrática, se obtiene entonces

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}. \tag{2}$$

Nótese que en (2) no se utiliza el simbolismo acostumbrado $\pm\sqrt{1 - z^2}$, ya que se conoce de la sección 9.2 que $(1 - z^2)^{1/2}$ tiene dos valores. Resolviendo entonces (2) para w se obtiene

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \ln[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \tag{3}$$

Procediendo del mismo modo, se encuentra que las inversas del coseno y la tangente son

$$\cos^{-1}z = -i\ln[z + i(1 - z^2)^{1/2}] \tag{4}$$

$$\tan^{-1}z = \frac{i}{2}\ln\frac{i + z}{i - z}. \tag{5}$$

Ejemplo 1 Valores de un seno inverso

Encuentre todos los valores del $\text{sen}^{-1}\sqrt{5}$.

Solución De (3) se tiene

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = -i\ln[\sqrt{5}i + (1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2}]$$

Mediante $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = \pm 2i$, la expresión anterior se convierte en

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = -i\ln[(\sqrt{5} \pm 2)i]$$

$$= -i\left[\log_e(\sqrt{5} \pm 2) + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

El resultado anterior se simplifica un poco observando que $\log_e(\sqrt{5} - 2) = \log_e(1/(\sqrt{5} + 2)) = -\log_e(\sqrt{5} + 2)$. Por lo tanto, para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \pm i\log_e(\sqrt{5} + 2). \tag{6}$$ ❑

A fin de obtener valores particulares de, digamos, $\text{sen}^{-1}z$, se debe elegir una raíz específica de $1 - z^2$ y una rama específica del logaritmo. Por ejemplo, si se selecciona $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = 2i$ y la rama principal del logaritmo, entonces (6) da el valor único

$$\text{sen}^{-1}\sqrt{5} = \frac{\pi}{2} - i\log_e(\sqrt{5} + 2).$$

■ **Derivadas** Las derivadas de las tres funciones trigonométricas inversas consideradas anteriormente se encuentran por medio de derivación implícita. Para hallar la derivada de la función seno inverso $w = \text{sen}^{-1}z$, se comienza derivando $z = \text{sen}\, w$:

$$\frac{d}{dz}z = \frac{d}{dz}\text{sen}\, w \quad \text{da como resultado} \quad \frac{dw}{dz} = \frac{1}{\cos w}.$$

Utilizando la igualdad trigonométrica $\cos^2 w + \text{sen}^2 w = 1$ (véase el problema 28 de los ejercicios 9.7) en la forma $\cos w = (1 - \text{sen}^2 w)^{1/2} = (1 - z^2)^{1/2}$, se obtiene

$$\frac{d}{dz}\text{sen}^{-1}z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \tag{7}$$

Análogamente, se encuentra que

$$\frac{d}{dz}\cos^{-1}z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\tan^{-1}z = \frac{1}{1 + z^2}. \tag{9}$$

Debería notarse que las raíces cuadradas utilizadas en (7) y (8) deben ser consistentes con las raíces cuadradas utilizadas en (3) y (4).

Ejemplo 2 Cálculo de una derivada

Encuentre la derivada de $w = \text{sen}^{-1} z$ en $z = \sqrt{5}$.

Solución En el ejemplo 1, si se utiliza $(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2} = (-4)^{1/2} = 2i$, entonces esa misma raíz debe utilizarse en (7). El valor de la derivada que es consistente con esta elección viene dado por

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=\sqrt{5}} = \frac{1}{(1 - (\sqrt{5})^2)^{1/2}} = \frac{1}{(-4)^{1/2}} = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i. \qquad \square$$

Funciones hiperbólicas inversas Las funciones hiperbólicas inversas se expresan también en términos del logaritmo. A continuación se sintetizan estos resultados para el seno, coseno y tangente hiperbólicos inversos, así como para sus derivadas:

$$\text{senh}^{-1} z = \ln[z + (z^2 + 1)^{1/2}] \tag{10}$$

$$\cosh^{-1} z = \ln[z + (z^2 - 1)^{1/2}] \tag{11}$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z} \tag{12}$$

$$\frac{d}{dz} \text{senh}^{-1} z = \frac{1}{(z^2 + 1)^{1/2}} \tag{13}$$

$$\frac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} \tag{14}$$

$$\frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}. \tag{15}$$

Ejemplo 3 Valores de un coseno hiperbólico inverso

Encuentre todos los valores del $\cosh^{-1}(-1)$.

Solución De (11) con $z = -1$, se tiene que

$$\cosh^{-1}(-1) = \ln(-1) = \log_e 1 + (\pi + 2n\pi)i.$$

Como $\log_e 1 = 0$ se tiene para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\cosh^{-1}(-1) = (2n + 1)\pi i. \qquad \square$$

EJERCICIOS 9.8 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas del 1 al 14, encuentre todos los valores de la cantidad indicada.

1. $\text{sen}^{-1}(-i)$
2. $\text{sen}^{-1}\sqrt{2}$
3. $\text{sen}^{-1} 0$
4. $\text{sen}^{-1}\frac{13}{5}$
5. $\cos^{-1} 2$
6. $\cos^{-1} 2i$
7. $\cos^{-1}\frac{1}{2}$
8. $\cos^{-1}\frac{5}{3}$
9. $\tan^{-1} 1$
10. $\tan^{-1} 3i$
11. $\text{senh}^{-1}\frac{4}{3}$
12. $\cosh^{-1} i$
13. $\tanh^{-1}(1 + 2i)$
14. $\tanh^{-1}(-\sqrt{3}i)$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

Resuelva los problemas del 1 al 16 sin consultar el texto; complete los espacios en blanco o responda verdadero/falso.

1. $\text{Re}((1+i)^{10}) =$ _____ e $\text{Im}((1+i)^{10}) =$ _____.
2. Si z es un punto del tercer cuadrante, entonces $i\bar{z}$ está en el _____ cuadrante.
3. Si $z = 3 + 4i$, entonces $\text{Re}\left(\dfrac{z}{\bar{z}}\right) =$ _____.
4. $i^{127} - 5i^9 + 2i^{-1} =$ _____
5. Si $z = \dfrac{4i}{-3-4i}$, entonces $|z| =$ _____.
6. Describa la región definida por $1 \le |z + 2| \le 3$. _____
7. $\text{Arg}(z + \bar{z}) = 0$ _____
8. Si $z = \dfrac{5}{-\sqrt{3}+i}$, entonces $\text{Arg } z =$ _____.
9. Si $e^z = 2i$, entonces $z =$ _____.
10. Si $|e^z| = 1$, entonces z es un número imaginario puro. _____
11. El valor principal de $(1+i)^{(2+i)}$ es _____.
12. Si $f(z) = x^2 - 3xy - 5y^3 + i(4x^2y - 4x + 7y)$, entonces $f(-1+2i) =$ _____.
13. Si las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en un punto, entonces la función es necesariamente analítica en dicho punto. _____
14. $f(z) = e^z$ es periódica con periodo _____.
15. $\text{Ln}(-ie^3) =$ _____
16. $f(z) = \text{sen}(x - iy)$ es no analítica en punto alguno. _____

En los problemas del 17 al 20, escriba el número indicado en la forma $a + ib$.

17. $i(2-3i)^2(4+2i)$
18. $\dfrac{3-i}{2+3i} + \dfrac{2-2i}{1+5i}$
19. $\dfrac{(1-i)^{10}}{(1+i)^3}$
20. $4e^{\pi i/3}e^{-\pi i/4}$

En los problemas del 21 al 24, bosqueje el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen con la desigualdad indicada.

21. $\text{Im}(z^2) \le 2$
22. $\text{Im}(z + 5i) > 3$
23. $\dfrac{1}{|z|} \le 1$
24. $\text{Im}(z) < \text{Re}(z)$
25. Busque las definiciones de secciones cónicas en un texto de cálculo. A continuación, describa el conjunto de puntos del plano complejo que cumple con la ecuación $|z - 2i| + |z + 2i| = 5$.
26. Sean z y w números complejos tales que $|z| = 1$ y $|w| \neq 1$. Demuestre que
$$\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1.$$

En los problemas 27 y 28, encuentre todas las soluciones de la ecuación indicada.

27. $z^4 = 1 - i$
28. $z^{3/2} = \dfrac{1}{2-i}$
29. Si $f(z) = z^{24} - 3z^{20} + 4z^{12} - 5z^6$, encuentre $f\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$.
30. Escriba $f(z) = \text{Im}(z - 3\bar{z}) + z\,\text{Re}(z^2) - 5z$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

En los problemas 31 y 32, encuentre la imagen de la línea $x = 1$ en el plano w bajo la transformación indicada.

31. $f(z) = x^2 - y + i(y^2 - x)$
32. $f(z) = \dfrac{1}{z}$

En los problemas del 33 al 36, encuentre todos los números complejos para los que la afirmación indicada sea verdadera.

33. $z = z^{-1}$
34. $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$
35. $\bar{z} = -z$
36. $z^2 = (\bar{z})^2$
37. Demuestre que la función $f(z) = -(2xy + 5x) + i(x^2 - 5y - y^2)$ es analítica para cualquier z; encuentre $f'(z)$.
38. Determine si la función
$$f(z) = x^3 + xy^2 - 4x + i(4y - y^3 - x^2y)$$
es derivable y analítica.

En los problemas 39 y 40, verifique la igualdad indicada.

39. $\text{Ln}(1+i)(1-i) = \text{Ln}(1+i) + \text{Ln}(1-i)$
40. $\text{Ln}\dfrac{1+i}{1-i} = \text{Ln}(1+i) - \text{Ln}(1-i)$

Por Dayet

CAPÍTULO

10

Integración en el plano complejo

Estructura del capítulo

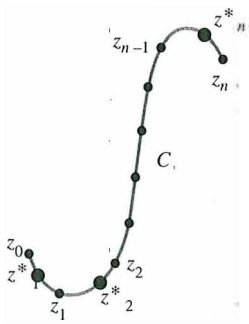
10.1 Integrales de contorno
10.2 Teorema de Cauchy-Goursat
10.3 Independencia de la trayectoria
10.4 Fórmulas integrales de Cauchy
Ejercicios de repaso del capítulo 10

Para definir la integral de una función compleja f se comienza definiendo f a lo largo de una curva C o **contorno** del plano complejo. En esta sección se plantea que la definición de una integral compleja, sus propiedades y su método de cálculo son muy similares a los de una integral real de línea en el plano.

10.1 Integrales de contorno

Introducción En la sección 3.8 se explica de qué manera la definición de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ comienza con una función real $y = f(x)$ precisada sobre un intervalo $[a, b]$ del eje x. Puesto que una curva plana es el análogo bidimensional de un intervalo, se generaliza entonces la definición de integral definida a integrales de funciones reales de *dos* variables definidas sobre una curva C en el plano cartesiano. En esta sección se plantea que una integral compleja se define en forma muy parecida a la de la integral de línea en el plano cartesiano. Se recomienda un repaso de las secciones 3.8 y 3.9 en caso de no haberlas estudiado.

Una definición La integración en el plano complejo se define de manera semejante a la de la integral de línea en el plano. En otras palabras, se trabaja con la integral de una función compleja $f(z)$ donde t es un parámetro real. Utilizando $x(t)$ y $y(t)$ como las partes real e imaginaria, es posible describir también una curva C del plano complejo por medio de una función con valores complejos de una variable real t: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$. Por ejemplo, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, describe un círculo unitario centrado en el origen. Este círculo se describe también por medio de $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$, o incluso en forma más compacta por $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Las mismas definiciones de curva suave, curva suave por tramos, curva cerrada y curva cerrada simple dadas en la sección 3.8 son válidas en esta explicación. Como se señaló antes, se supone que la dirección positiva de C corresponde a valores incrementales de t. En variables complejas, una curva suave por tramos C se conoce también como un **contorno** o **trayectoria**. Una integral de $f(z)$ en C se denota por medio de $\int_C f(z)\,dz$ o $\oint_C f(z)\,dz$ si el contorno C es cerrado; se conoce como **integral de contorno** o **integral compleja de línea**.



$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

1. Sea f una función definida en todos los puntos de una curva suave C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$.
2. Divídase C en n subarcos de acuerdo con la partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a, b]$. Los puntos correspondientes a la curva C son $z_0 = x_0 + iy_0 = x(t_0) + iy(t_0)$, $z_1 = x_1 + iy_1 = x(t_1) + iy(t_1)$, $\ldots$, $z_n = x_n + iy_n = x(t_n) + iy(t_n)$. Sea $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
3. Sea $\|P\|$ la **norma** de la partición; esto es, el valor máximo de $|\Delta z_k|$.
4. Elíjase un punto $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$ de cada subarco.
5. Genérese la suma $\sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k$.

DEFINICIÓN 10.1 Integral de contorno

Sea f una función definida en puntos de una curva suave C expresada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. La **integral de contorno** de f a lo largo de C es

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\,\Delta z_k. \tag{1}$$

El límite de (1) existe si f es continua en todos los puntos de C y, además, C es suave o suave por tramos. En consecuencia, en adelante se considera que estas condiciones se cumplen.

Un método de cálculo Retomemos la pregunta de cómo calcular una integral de contorno. Para facilitar la explicación se suprimen los subíndices y se escribe (1) en forma abreviada

$$\int_C f(z)\,dz = \lim \Sigma(u + iv)(\Delta x + i\,\Delta y)$$

$$= \lim \{\Sigma(u\,\Delta x - v\,\Delta y) + i\,\Sigma(v\,\Delta x + u\,\Delta y)\}.$$

Esto significa

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \tag{2}$$

En otras palabras, una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es una combinación de dos integrales reales de línea $\int_C u\,dx - v\,dy$ y $\int_C v\,dx + u\,dy$. Ahora, como $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $a \le t \le b$, donde el lado derecho de (2) es el mismo que

$$\int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]\,dt + i\int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]\,dt.$$

Pero si se utiliza $z(t) = x(t) + iy(t)$ para describir C, el último resultado es el mismo que $\int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt$ al separarlo en dos integrales. Así, se llega a una forma práctica de calcular una integral de contorno:

TEOREMA 10.1 Cálculo de una integral de contorno

Si f es continua en una curva suave C dada por $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt. \tag{3}$$

Si f se expresa en términos del símbolo z, entonces para calcular $f(z(t))$ simplemente se reemplaza el símbolo z por $z(t)$. Si f no se expresa en términos de z, entonces para calcular $f(z(t))$, se reemplazan x y y donde aparezcan por $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente.

Ejemplo 1 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\int_C \bar{z}\,dz$, donde C viene dada por $x = 3t$, $y = t^2$, $-1 \le t \le 4$.

Solución Se escribe $z(t) = 3t + it^2$ de forma que $z'(t) = 3 + 2it$ y $f(z(t)) = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2$. Entonces,

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_{-1}^{4} (3t - it^2)(3 + 2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{4} (2t^3 + 9t)\,dt + i\int_{-1}^{4} 3t^2\,dt = 195 + 65i. \qquad \square$$

Ejemplo 2 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, donde C es el círculo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución En este caso $z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$, $z'(t) = ie^{it}$ y $f(z) = 1/z = e^{-it}$. Por lo tanto,

$$\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} (e^{-it})ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \qquad \square$$

Para algunas curvas, la variable real x se usa como parámetro por sí misma. Por ejemplo, para calcular $\int_C (8x^2 - iy)\,dz$ en $y = 5x$, $0 \le x \le 2$, se escribe $\int_C (8x^2 - iy)\,dz = \int_0^2 (8x^2 - 5ix)(1 + 5i)\,dx$ y se integra de la forma acostumbrada.

Propiedades Las siguientes propiedades de las integrales de contorno son análogas a las propiedades de las integrales de línea:

TEOREMA 10.2 Propiedades de las integrales de contorno

Supóngase que f y g son continuas en un dominio D, y C es una curva suave que está completamente en D. Entonces:

i) $\int_C kf(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, k es una constante

ii) $\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$

iii) $\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$, donde C es la unión de las curvas suaves C_1 y C_2

iv) $\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz$, donde $-C$ denota la curva que tiene la orientación opuesta a C.

Los cuatro incisos del teorema 10.2 también son válidos cuando C es una curva suave por tramos en D.

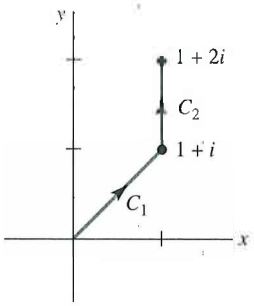


Figura 10.1 Contorno suave por tramos del ejemplo 3

Ejemplo 3 Cálculo de una integral de contorno

Calcule $\int_C (x^2 + iy^2)\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la figura 10.1.

Solución Con base en el teorema 10.2*iii*) se escribe

$$\int_C (x^2 + iy^2)\,dz = \int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz + \int_{C_2} (x^2 + iy^2)\,dz.$$

Como la curva C_1 se define mediante $y = x$ tiene sentido utilizar x como parámetro. Por lo tanto, $z(x) = x + ix$, $z'(x) = 1 + i$, $f(z(x)) = x^2 + ix^2$, y

$$\int_{C_1} (x^2 + iy^2)\,dz = \int_0^1 (x^2 + ix^2)(1 + i)\,dx$$

$$= (1 + i)^2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{(1 + i)^2}{3} = \frac{2}{3}i.$$

La curva C_2 se define por $x = 1$, $1 \le y \le 2$. Utilizando y como parámetro, se tiene que $z(y) = 1 + iy$, $z'(y) = i$ y $f(z(y)) = 1 + iy^2$. Por lo tanto,

$$\int_{C_2} (x^2 + iy^2)\,dz = \int_1^2 (1 + iy^2)\,i\,dy = -\int_1^2 y^2\,dy + i\int_1^2 dy = -\frac{7}{3} + i.$$

Finalmente, se tiene que $\int_C (x^2 + iy^2)\,dz = \frac{2}{3}i + (-\frac{7}{3} + i) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}i$. $\square$

En las aplicaciones de la integración compleja existen ocasiones en que es útil encontrar un límite superior para el valor absoluto de una integral de contorno. En el siguiente teorema se aprovecha que la longitud de una curva plana es $s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$. Pero si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, entonces $|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ y por lo tanto $s = \int_a^b |z'(t)|\, dt$.

TEOREMA 10.3 Un teorema de acotación

Si f es continua en una curva suave C, y si $|f(z)| \leq M$ para cualquier z de C, entonces $\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$, donde L es la longitud de C.

Demostración De la desigualdad triangular (6) de la sección 9.1 se escribe

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k^*)||\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|. \tag{4}$$

Ahora, $|\Delta z_k|$ se interpreta como la longitud de la cuerda que une los puntos z_k y z_{k-1}. Como la suma de las longitudes de las cuerdas no puede ser mayor que la longitud de C, entonces (4) se convierte en $|\Sigma_{k=1}^{n} f(z_k^*)\, \Delta z_k| \leq ML$. Por lo tanto, cuando $\|P\| \to 0$, esta última desigualdad conduce a $\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq ML$. ❑

El teorema 10.3 se utiliza a menudo en la teoría de integración compleja y se conoce como la **desigualdad *ML***.

Ejemplo 4 Una cota para una integral de contorno

Encuentre una cota superior para el valor absoluto de $\oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 4$.

Solución En primer lugar, la longitud s del círculo de radio 4 es 8π. A continuación, de la desigualdad (7) de la sección 9.1, se deduce que $|z + 1| \geq |z| - 1 = 4 - 1 = 3$, y por lo tanto

$$\left| \frac{e^z}{z+1} \right| \leq \frac{|e^z|}{|z| - 1} = \frac{|e^z|}{3}. \tag{5}$$

Además, $|e^z| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = e^x$. Para puntos en el círculo $|z| = 4$, el máximo valor que puede tomar x es 4 y, por ende, (5) se convierte en

$$\left| \frac{e^z}{z+1} \right| \leq \frac{e^4}{3}.$$

Entonces, del teorema 10.3 se tiene que

$$\left| \oint_C \frac{e^z}{z+1}\, dz \right| \leq \frac{8\pi e^4}{3}.$$ ❑

■ **Circulación y flujo neto** Sean $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ los vectores unitarios tangente y normal a un contorno cerrado simple orientado positivamente C. Al interpretar vectorialmente la función compleja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ las integrales de línea

$$\oint_C f \cdot \mathbf{T}\, ds = \oint_C u\, dx + v\, dy \tag{6}$$

y

$$\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds = \oint_C u\, dy - v\, dx \tag{7}$$

tienen interpretaciones particulares. La integral de línea (6) se denomina **circulación** alrededor de C y mide la tendencia del flujo a hacer rotar a la curva C; véase la sección

3.8 para la deducción. El **flujo neto** a través de C es la diferencia entre la rapidez con que entra el fluido y la rapidez con que éste abandona la región acotada por C. El flujo neto a través de C viene dado por la integral de línea (7), y un valor de $\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds$ distinto de cero indica la presencia de fuentes o pozos para el fluido dentro de la curva C. Obsérvese que

$$\left(\oint_C f \cdot \mathbf{T}\, ds\right) + i\left(\oint_C f \cdot \mathbf{N}\, ds\right) = \oint_C (u - iv)(dx + i\, dy) = \oint_C \overline{f(z)}\, dz$$

y por lo tanto

$$\text{circulación} = \operatorname{Re}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right) \tag{8}$$

$$\text{flujo neto} = \operatorname{Im}\left(\oint_C \overline{f(z)}\, dz\right). \tag{9}$$

Así, estas dos cantidades importantes pueden encontrarse calculando una única integral compleja.

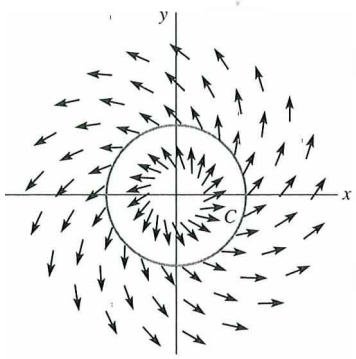


Figura 10.2 Flujo $f(z) = (1 + i)z$

Ejemplo 5 Flujo neto

Dado el flujo $f(z) = (1 + i)z$, calcule la circulación alrededor, y el flujo neto a través del círculo C: $|z| = 1$.

Solución Como $\overline{f(z)} = (1 - i)\bar{z}$ y $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, se tiene

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \int_0^{2\pi} (1 - i)e^{-it} ie^{it}\, dt = (1 + i)\int_0^{2\pi} dt = 2\pi(1 + i).$$

Así, la circulación alrededor de C es 2π y el flujo neto a través de C es 2π; véase la figura 10.2. ❑

EJERCICIOS 10.1 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-26.

En los problemas del 1 al 16, calcule la integral indicada a lo largo del contorno propuesto.

1. $\int_C (z + 3)\, dz$, donde C es $x = 2t$, $y = 4t - 1$, $1 \le t \le 3$
2. $\int_C (2\bar{z} - z)\, dz$, donde C es $x = -t$, $y = t^2 + 2$, $0 \le t \le 2$
3. $\int_C z^2\, dz$, donde C es $z(t) = 3t + 2it$, $-2 \le t \le 2$
4. $\int_C (3z^2 - 2z)\, dz$, donde C es $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 1$
5. $\int_C \dfrac{1 + z}{z}\, dz$, donde C es la mitad derecha del círculo $|z| = 1$ desde $z = -i$ hasta $z = i$
6. $\int_C |z|^2\, dz$, donde C es $x = t^2$, $y = 1/t$, $1 \le t \le 2$
7. $\oint_C \operatorname{Re}(z)\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 1$
8. $\oint_C \left(\dfrac{1}{(z + i)^3} - \dfrac{5}{z + i} + 8\right) dz$, donde C es el círculo $|z + i| = 1$, $0 \le t \le 2\pi$
9. $\int_C (x^2 + iy^3)\, dz$, donde C es la línea recta que va desde $z = 1$ hasta $z = i$
10. $\int_C (x^3 - iy^3)\, dz$, donde C es la mitad inferior del círculo $|z| = 1$ desde $z = -1$ hasta $z = 1$
11. $\int_C e^z\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por los segmentos de línea que van desde $z = 0$ hasta $z = 2$ y desde $z = 2$ hasta $z = 1 + \pi i$
12. $\int_C \operatorname{sen} z\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por los segmentos de línea que van desde $z = 0$ hasta $z = 1$ y desde $z = 1$ hasta $z = 1 + i$
13. $\int_C \operatorname{Im}(z - i)\, dz$, donde C es la trayectoria poligonal formada por el arco circular a lo largo de $|z| = 1$ desde $z = 1$ hasta $z = i$ y el segmento de línea desde $z = i$ hasta $z = -1$
14. $\int_C dz$, donde C es la mitad izquierda de la elipse $x^2/36 + y^2/4 = 1$ desde $z = 2i$ hasta $z = -2i$
15. $\oint_C ze^z\, dz$, donde C es el cuadrado de vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, y $z = i$
16. $\int_C f(z)\, dz$, donde $f(z) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 6x, & x > 0 \end{cases}$ y C es la parábola $y = x^2$ desde $z = -1 + i$ hasta $z = 1 + i$

En los problemas del 17 al 20, calcule la integral indicada a lo largo del contorno C dado en la figura 10.3.

17. $\oint_C x\, dz$
18. $\oint_C (2z - 1)\, dz$

19. $\oint_C z^2\,dz$ 20. $\oint_C \bar{z}^2\,dz$

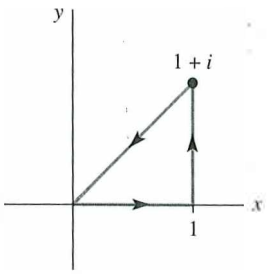


Figura 10.3 Contorno de los problemas 17-20

En los problemas del 21 al 24, calcule $\int_C (z^2 - z + 2)dz$ desde i hasta 1 a lo largo de los contornos indicados.

21.

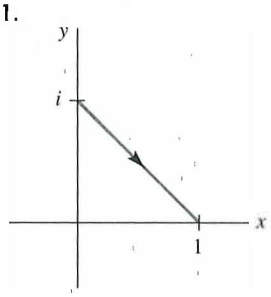


Figura 10.4 Contorno del problema 21

22.

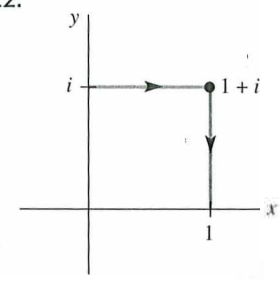


Figura 10.5 Contorno del problema 22

23.

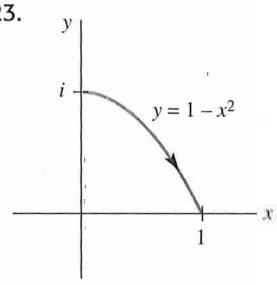


Figura 10.6 Contorno del problema 23

24.

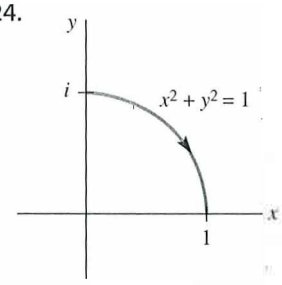


Figura 10.7 Contorno del problema 24

En los problemas del 25 al 28, encuentre una cota superior para el valor absoluto de la integral indicada a largo del contorno propuesto.

25. $\oint_C \dfrac{e^z}{z^2 + 1}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = 5$

26. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2 - 2i}\,dz$, donde C es la mitad derecha del círculo $|z| = 6$ desde $z = -6i$ hasta $z = 6i$

27. $\int_C (z^2 + 4)\,dz$, donde C es el segmento de línea desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$

28. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^3}\,dz$, donde C es un cuarto del círculo $|z| = 4$ desde $z = 4i$ hasta $z = 4$

29. *a*) Utilice la definición 10.1 para demostrar que $\int_C dz = z_n - z_0$ para cualquier curva suave C entre z_0 y z_n.

    b) Utilice el resultado del inciso *a*) para verificar la respuesta al problema 14.

30. Utilice la definición 10.1 para demostrar que $\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2)$ para cualquier curva suave C entre z_0 y z_n. [*Sugerencia:* La integral existe, por lo tanto, se elige $z_k^* = z_k$ y $z_k^* = z_{k-1}$.]

31. Utilice los resultados de los problemas 29 y 30 para calcular $\oint_C (6z + 4)\,dz$ donde C es:

    a) La línea recta desde $1 + i$ hasta $2 + 3i$

    b) El contorno cerrado $x^4 + y^4 = 4$.

En los problemas del 32 al 35, calcule la circulación y el flujo neto para el flujo dado y el contorno cerrado indicado.

32. $f(z) = 1/z$, donde C es el círculo $|z| = 2$

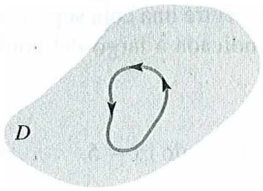
33. $f(z) = 2z$, donde C es el círculo $|z| = 1$

34. $f(z) = 1/\overline{(z - 1)}$, donde C es el círculo $|z - 1| = 2$

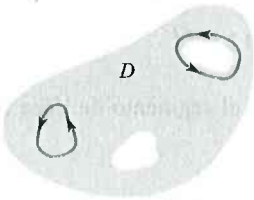
35. $f(z) = \bar{z}$, donde C es el cuadrado de vértices $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, $z = i$

10.2 Teorema de Cauchy-Goursat

Introducción En esta sección se concentra la atención en las integrales de contorno donde el contorno C es una **curva cerrada simple** con orientación positiva (en sentido antihorario). Específicamente, se plantea que cuando f es analítica en un tipo especial de dominio D, el valor de la integral de contorno $\oint_C f(z)\,dz$ es el mismo para *cualquier* curva cerrada simple C que se encuentre completamente en D. Este teorema, llamado **teorema de Cauchy-Goursat**, es uno de *los* resultados fundamentales del análisis complejo. Antes de explicar el teorema de Cauchy-Goursat y algunas de sus derivaciones se necesita primero distinguir dos tipos de dominio en el plano complejo: el simplemente conexo y el múltiplemente conexo.



a) Dominio simplemente conexo



b) Dominio múltiplemente conexo

Figura 10.8 Dos tipos de dominio

■ **Dominios simplemente conexo y múltiplemente conexo** La explicación que sigue se concentra en integrales de contorno, donde el contorno C es una **curva cerrada simple** con orientación positiva (en sentido antihorario). Antes de eso, es necesario distinguir dos tipos de dominio. Se dice que un dominio D es **simplemente conexo** si cualquier contorno cerrado simple C que se localice completamente en D puede encogerse hasta un punto sin tener que abandonar D. En otras palabras, en un dominio simplemente conexo, cualquier contorno cerrado simple C que se encuentre completamente en aquél encierra únicamente a puntos del dominio D. Expresado en forma alterna, un dominio simplemente conexo no tiene "orificios". El plano complejo completo es un ejemplo de un dominio simplemente conexo. Un dominio que no es simplemente conexo se denomina **dominio múltiplemente conexo**; esto es, un dominio múltiplemente conexo tiene "orificios"; véase la figura 10.8. Como en la sección 3.9, un dominio con un "orificio" se denomina **doblemente conexo**, un dominio con dos "orificios" se denomina **triplemente conexo**, etcétera.

■ **Teorema de Cauchy** En 1825, el matemático francés Louis-Augustin Cauchy demostró unos de los teoremas más importantes del análisis complejo. El **teorema de Cauchy** dice:

> *Supóngase que una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D y que f' es continua en D. Entonces, para cualquier contorno cerrado simple C en D,* $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema de Green y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como f' es continua en D, las partes real e imaginaria de $f(z) = u + iv$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en todo D. Por medio de (2) de la sección 10.1, se escribe $\oint_C f(z)\,dz$ en términos de integrales reales de línea y se utiliza el teorema de Green sobre cada una de ellas:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,dz &= \oint_C u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy + i\oint_C v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dA + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA. \qquad (1)\end{aligned}$$

Ahora, ya que f es analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$ y $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$, implican que los integrandos en (1) son iguales a cero. Por lo tanto, se tiene que $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

En 1883, el matemático francés Édouard Goursat demostró el teorema de Cauchy sin la hipótesis de continuidad de f'. La versión modificada resultante del teorema de Cauchy se conoce como **teorema de Cauchy-Goursat**:

TEOREMA 10.4 Teorema de Cauchy-Goursat

Supóngase que una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D. Entonces, para cualquier contorno cerrado simple C en D, $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

Como el interior de un contorno cerrado simple es un dominio simplemente conexo, el teorema de Cauchy-Goursat puede plantearse en forma un poco más práctica:

> *Si f es analítica en todos los puntos de un contorno cerrado simple C, y dentro de dicho contorno, entonces* $\oint_C f(z)\,dz = 0$. (2)

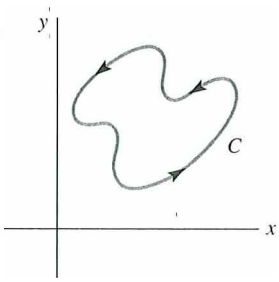


Figura 10.9 Contorno del ejemplo 1

Ejemplo 1 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Calcule $\oint_C e^z\,dz$, donde C es la curva mostrada en la figura 10.9.

Solución La función $f(z) = e^z$ es entera y C es un contorno cerrado simple. De la forma (2) del teorema de Cauchy-Goursat, se deduce que $\oint_C e^z\,dz = 0$. ❑

Ejemplo 2 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Calcule $\oint_C \frac{dz}{z^2}$, donde C es la elipse $(x-2)^2 + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$.

Solución La función racional $f(z) = 1/z^2$ es analítica en cualquier punto excepto en $z = 0$. Pero $z = 0$ no es un punto del contorno C o interior al mismo. Por lo tanto, de (2) se tiene que $\oint_C dz/z^2 = 0$. ❑

Ejemplo 3 Aplicación del teorema de Cauchy-Goursat

Dado el flujo $f(z) = \overline{\cos z}$, calcule la circulación alrededor de C, y el flujo neto que lo atraviesa, donde C es el cuadrado con vértices $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ y $z = -i$.

Solución Se debe calcular $\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \cos z\, dz$ y entonces tomar las partes real e imaginaria de la integral para encontrar la circulación y el flujo neto, respectivamente. La función $\cos z$ es analítica en cualquier punto, por lo que $\oint_C \overline{f(z)}\, dz = 0$ de (2). La circulación y el flujo neto son, por lo tanto, cero. La figura 10.10 muestra el flujo $f(z) = \overline{\cos z}$ y el contorno C. ❑

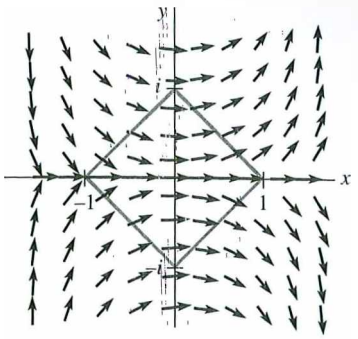


Figura 10.10 flujo $f(z) = \overline{\cos z}$

■ **Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos** Si f es analítica en un dominio múltiplemente conexo D, entonces no se puede concluir que $\oint_C f(z)\, dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C en D. Para comenzar, supóngase que D es un dominio doblemente conexo y que C y C_1 son contornos cerrados simples tales que C_1 rodea al "orificio" en el dominio y es interior a C; véase la figura 10.11*a*). Supóngase, también, que f es analítica en cada contorno y en cada punto interior a C pero exterior a C_1. Cuando se introduce el corte AB mostrado en la figura 10.11*b*), la región acotada por las curvas es simplemente conexa. Ahora, la integral desde A hasta B tiene el valor opuesto de la integral desde B hasta A y, por lo tanto, de (2) se tiene $\oint_C f(z)\, dz + \oint_{C_1} f(z)\, dz = 0$ o

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz \tag{3}$$

Este último resultado se denomina en ocasiones principio de **deformación de contornos**, puesto que el contorno C_1 se puede pensar como una deformación continua del contorno C. Bajo esta deformación de contornos, el valor de la integral no cambia. Así, en un nivel práctico, (3) permite calcular una integral sobre un complicado contorno cerrado simple reemplazando dicho contorno por uno más conveniente.

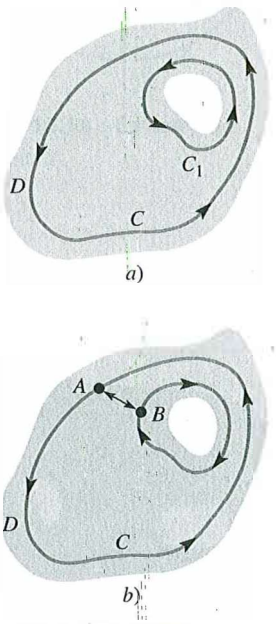


Figura 10.11 Dominio doblemente conexo D

Ejemplo 4 Aplicación de la deformación de contornos

Calcule $\oint_C \frac{dz}{z-i}$, donde C es el contorno exterior mostrado en la figura 10.12.

Solución A partir de (3) se elige el contorno circular más conveniente C_1, mostrado en la figura. Tomando el radio del círculo como $r = 1$ se garantiza que C_1 se encuentra dentro de C. En otras palabras, C_1 es el círculo $|z - i| = 1$, que se parametriza como $x = \cos t$, $y = 1 + \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$, o, en forma equivalente, por $z = i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. De $z - i = e^{it}$ y $dz = ie^{it}\, dt$ se obtiene

$$\oint_C \frac{dz}{z-i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\, dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \quad ❑$$

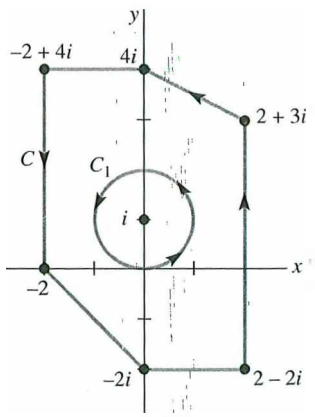


Figura 10.12 Se utiliza el contorno más sencillo C_1 en el ejemplo 4

El resultado del ejemplo 4 puede generalizarse; utilizando el principio de deformación de contornos (3) y procediendo como en el ejemplo, se demuestra que si z_0 es cualquier número complejo constante interior a *cualquier* contorno cerrado simple C, entonces

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \text{ un entero} \neq 1. \end{cases} \tag{4}$$

El hecho de que la integral (4) sea cero cuando n es un entero $\neq 1$, es únicamente consecuencia parcial del teorema de Cauchy-Goursat. Cuando n es cero o un entero negativo, $1/(z - z_0)^n$ es un polinomio (por ejemplo, $n = -3$, $1/(z - z_0)^{-3} = (z - z_0)^3$) y por lo tanto completo. El teorema 10.4 implica entonces que $\oint_C dz/(z - z_0)^n = 0$. Se deja como ejercicio demostrar que la integral sigue siendo cero cuando n es un entero positivo diferente de uno; véase el problema 22 de los ejercicios 10.2.

Ejemplo 5 Aplicación de la fórmula (4)

Calcule $\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\, dz$, donde C es el círculo $|z - 2| = 2$.

Solución Puesto que el denominador se factoriza como $z^2 + 2z - 3 = (z - 1)(z + 3)$, el integrando deja de ser analítico en $z = 1$ y $z = -3$. De estos dos puntos, únicamente $z = 1$ se encuentra dentro del contorno C, que es un círculo centrado en $z = 2$, de radio $r = 2$. Ahora, por fracciones parciales,

$$\frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3} = \frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 3}$$

y así

$$\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\, dz = 3\oint_C \frac{dz}{z - 1} + 2\oint_C \frac{dz}{z + 3}. \tag{5}$$

Tomando en cuenta el resultado (4), la primera integral de (5) adquiere el valor $2\pi i$. Por el teorema de Cauchy-Goursat, el valor de la segunda integral es cero. Así pues, (5) se convierte en

$$\oint_C \frac{5z + 7}{z^2 + 2z - 3}\, dz = 3(2\pi i) + 2(0) = 6\pi i. \qquad \square$$

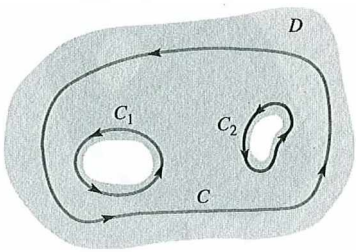


Figura 10.13 Dominio triplemente conexo D

Si C, C_1 y C_2 son los contornos cerrados simples mostrados en la figura 10.13, y si f es analítica en cada uno de los tres contornos, así como en cada punto interior a C pero exterior a C_1 y C_2, entonces, introduciendo cortes, se tiene del teorema 10.4 que $\oint_C f(z)\, dz + \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2} f(z)\, dz = 0$. Por lo tanto,

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_{C_1} f(z)\, dz + \oint_{C_2} f(z)\, dz.$$

El siguiente teorema sintetiza el resultado general para un dominio múltiplemente conexo con n "orificios":

TEOREMA 10.5 Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos

Supóngase que $C, C_1, \ldots, C_n$ son curvas cerradas simples con una orientación positiva tales que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son interiores a C, pero las regiones interiores a cada C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, no tienen puntos en común. Si f es analítica en cada contorno y en cada punto interior a C pero exterior a cualquiera de las C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\, dz. \tag{6}$$

Ejemplo 6 Aplicación del teorema 10.5

Calcule $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$, donde C es el círculo $|z| = 3$.

Solución En este caso, el denominador del integrando se factoriza como $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. En consecuencia, el integrando $1/(z^2 + 1)$ no es analítico en $z = i$ ni en $z = -i$. Estos dos puntos se encuentran dentro del contorno C. Utilizando la descomposición parcial de la fracción una vez más, se tiene

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1/2i}{z-i} - \frac{1/2i}{z+i}$$

y

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\oint_C \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz.$$

A continuación, los puntos $z = i$ y $z = -i$ se rodean con contornos circulares C_1 y C_2, respectivamente, que se localizan completamente dentro de C. Específicamente, la elección de $|z - i| = \frac{1}{2}$ para C_1 y $|z + i| = \frac{1}{2}$ para C_2 es suficiente; véase la figura 10.14. Del teorema 10.5 se escribe entonces

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{dz}{z^2+1} &= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] dz \\ &= \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{C_1}\frac{dz}{z+i} + \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\oint_{C_2}\frac{dz}{z+i}.\end{aligned} \tag{7}$$

Debido a que $1/(z + i)$ es analítica en C_1 y en cada punto de su interior, y como $1/(z - i)$ es analítica en C_2 y en cada punto de su interior, se tiene de (4) que la segunda y tercera integrales de (7) son cero. Asimismo, de (4), cuando $n = 1$, se tiene que

$$\oint_{C_1}\frac{dz}{z-i} = 2\pi i \qquad \text{y} \qquad \oint_{C_2}\frac{dz}{z+i} = 2\pi i.$$

Así, (7) se convierte en $\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = \pi - \pi = 0.$ ❑

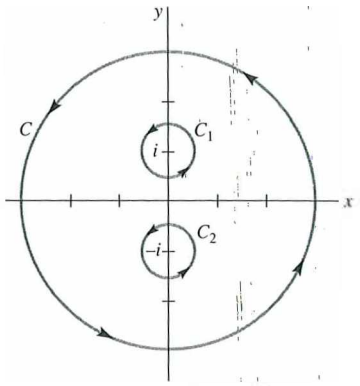


Figura 10.14 Contorno del ejemplo 6

Comentarios

En la anterior argumentación se considera que C es un contorno cerrado simple; en otras palabras, C no se interseca a sí mismo. Aunque no se demuestra aquí, puede probarse que el teorema de Cauchy-Goursat es válido para cualquier contorno cerrado C en un dominio simplemente conexo D. Como se muestra en la figura 10.15, el contorno C es cerrado pero no es simple. Sin embargo, si f es analítica en D, entonces $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

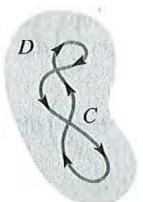


Figura 10.15 El contorno C es cerrado pero no simple

EJERCICIOS 10.2 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 8, demuestre que $\oint_C f(z)\,dz = 0$, donde f es la función indicada y C es el círculo unitario $|z| = 1$.

1. $f(z) = z^3 - 1 + 3i$
2. $f(z) = z^2 + \frac{1}{z-4}$
3. $f(z) = \frac{z}{2z+3}$
4. $f(z) = \frac{z-3}{z^2+2z+2}$
5. $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2-25)(z^2+9)}$
6. $f(z) = \frac{e^z}{2z^2+11z+15}$
7. $f(z) = \tan z$
8. $f(z) = \frac{z^2-9}{\cosh z}$

9. Calcule $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la figura 10.16.

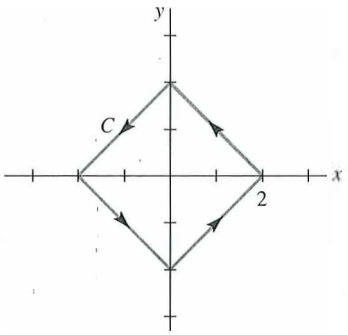


Figura 10.16 Contorno del problema 9

10. Calcule $\oint_C \frac{5}{z+1+i}\,dz$, donde C es el contorno mostrado en la figura 10.17.

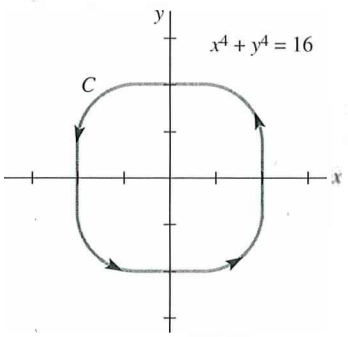


Figura 10.17 Contorno del problema 10

En los problemas del 11 al 20, utilice cualquier resultado de esta sección para calcular la integral propuesta a lo largo del contorno o los contornos cerrados indicados.

11. $\oint_C \left(z + \frac{1}{z}\right) dz;\ |z| = 2$

12. $\oint_C \left(z + \frac{1}{z^2}\right) dz;\ |z| = 2$

13. $\oint_C \frac{z}{z^2 - \pi^2}\,dz;\ |z| = 3$

14. $\oint_C \frac{10}{(z+i)^4}\,dz;\ |z+i| = 1$

15. $\oint_C \frac{2z+1}{z^2+z}\,dz;$ *a)* $|z| = \frac{1}{2}$, *b)* $|z| = 2$, *c)* $|z - 3i| = 1$

16. $\oint_C \frac{2z}{z^2+3}\,dz;$ *a)* $|z| = 1$, *b)* $|z - 2i| = 1$, *c)* $|z| = 4$

17. $\oint_C \frac{-3z+2}{z^2 - 8z + 12}\,dz;$ *a)* $|z - 5| = 2$, *b)* $|z| = 9$

18. $\oint_C \left(\frac{3}{z+2} - \frac{1}{z-2i}\right) dz;$ *a)* $|z| = 5$, *b)* $|z - 2i| = \frac{1}{2}$

19. $\oint_C \frac{z-1}{z(z-i)(z-3i)}\,dz;\ |z - i| = \frac{1}{2}$

20. $\oint_C \frac{1}{z^3 + 2iz^2}\,dz;\ |z| = 1$

21. Calcule $\oint_C \frac{8z-3}{z^2 - z}\,dz$, donde C es el contorno cerrado mostrado en la figura 10.18. [*Sugerencia:* Exprese C como la unión de dos curvas cerradas C_1 y C_2.]

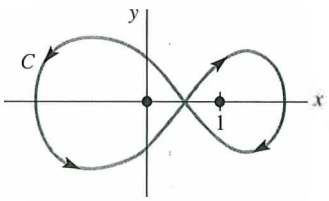


Figura 10.18 Contorno del problema 21

22. Supóngase que z_0 es cualquier número complejo constante interior a cualquier contorno cerrado simple C. Demuestre que

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \text{ es un entero positivo} \neq 1. \end{cases}$$

En los problemas 23 y 24, calcule la integral indicada por cualquier método.

23. $\oint_C \left(\frac{e^z}{z+3} - 3\bar{z}\right) dz$, C es el círculo unitario $|z| = 1$

24. $\oint_C (z^3 + z^2 + \mathrm{Re}(z))\,dz$, C es el triángulo con vértices $z = 0$, $z = 1 + 2i$, $z = 1$

10.3 Independencia de la trayectoria

Introducción En cálculo real, cuando una función f posee una antiderivada elemental, esto es, una función F para la cual $F'(x) = f(x)$, una integral definida se calcula por medio del teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Obsérvese que $\int_a^b f(x)dx$ depende únicamente de los números a y b en los puntos inicial y terminal del intervalo de integración. En contraste, el valor de una integral real de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$ depende generalmente de la curva C. Sin embargo, en la sección 3.9, se plantea que existen integrales de línea cuyo valor depende sólo del punto inicial A y del punto terminal B de la curva C, y no de C en sí misma. En este caso, se dice que la integral de línea es **independiente de la trayectoria**. Estas integrales se calculan por medio del teorema fundamental de las integrales de línea (teorema 3.8). Parece lógico preguntar entonces:

¿Existe una versión compleja del teorema fundamental del cálculo? ¿Puede una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ ser independiente de la trayectoria?

En esta sección se explica que la respuesta a ambas preguntas es sí.

■ **Una definición** La definición de **independencia de la trayectoria** para una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es esencialmente la misma que para una integral real de línea $\int_C P\,dx + Q\,dy$.

DEFINICIÓN 10.2 Independencia de la trayectoria

Sean z_0 y z_1 puntos de un dominio D. Se dice que una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ es **independiente de la trayectoria** si su valor es el mismo para cualquier contorno C en D con un punto inicial z_0 y un punto terminal z_1.

Al final de la sección anterior se explica que el teorema de Cauchy-Goursat también es válido para contornos cerrados, y no sólo para contornos cerrados simples, en un dominio simplemente conexo D. Ahora supóngase, como se muestra en la figura 10.19, que C y C_1 son dos contornos en un dominio simplemente conexo D; ambos con punto inicial z_0 y punto terminal z_1. Nótese que C y $-C_1$ forman un contorno cerrado. Así, si f es analítica en D se deduce, a partir del teorema de Cauchy-Goursat, que

$$\int_C f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz = 0. \tag{2}$$

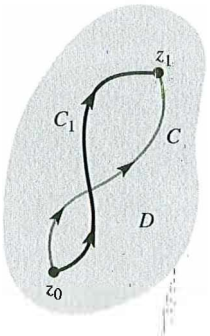


Figura 10.19 Si f es analítica en D, las integrales sobre C y C_1 son iguales

Pero (2) es equivalente a

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz \tag{3}$$

El resultado en (3) es también un ejemplo del principio de deformación de contornos, introducido en (3) de la sección 10.2. Este último resultado se sintetiza como teorema:

TEOREMA 10.6 La analiticidad implica independencia de la trayectoria

Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria C.

Ejemplo 1 Elección de una trayectoria diferente

Calcule $\int_C 2z\,dz$, donde C es el contorno con punto inicial $z = -1$ y punto terminal $z = -1 + i$ mostrado en la figura 10.20.

Solución Como la función $f(z) = 2z$ es entera, la trayectoria C se reemplaza por cualquier contorno conveniente C_1 que una $z = -1$ con $z = -1 + i$. En particular, eligiendo

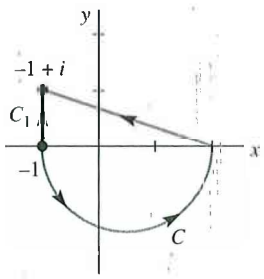


Figura 10.20 Contorno del ejemplo 1

como C_1 el segmento de línea recta $x = -1$, $0 \leq y \leq 1$, que se muestra en negro en la figura 10.20, se tiene que $z = -1 + iy$, $dz = i\,dy$. Por lo tanto,

$$\int_C 2z\,dz = \int_{C_1} 2z\,dz = -2\int_0^1 y\,dy - 2i\int_0^1 dy = -1 - 2i. \qquad \square$$

Una integral de contorno $\int_C f(z)\,dz$ que es independiente de la trayectoria C, se escribe usualmente como $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$, donde z_0 y z_1 son los puntos inicial y terminal de C. Así, en el ejemplo 1 se escribe $\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz$.

Existe una forma más fácil de calcular la integral de contorno del ejemplo 1, pero antes de proceder se necesita otra definición.

DEFINICIÓN 10.3 Antiderivada

Supóngase que f es continua en un dominio D. Si existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para cada z en D, entonces F se denomina **antiderivada** de f.

Por ejemplo, la función $F(z) = -\cos z$ es una antiderivada de $f(z) = \operatorname{sen} z$, puesto que $F'(z) = \operatorname{sen} z$. Al igual que en cálculo real, la antiderivada más general, o **integral indefinida**, de una función $f(z)$ se escribe como $\int f(z)\,dz = F(z) + C$, donde $F'(z) = f(z)$ y C es una constante compleja.

Como una antiderivada F de una función f tiene una derivada en cada punto de un dominio D, necesariamente es analítica y por ende continua en D (recuérdese que la derivabilidad implica continuidad).

Se está ahora en posición de demostrar la analogía compleja de (1).

TEOREMA 10.7 Teorema fundamental para integrales de contorno

Supóngase que f es continua en un dominio D y F es una antiderivada de f en D. Entonces, para cualquier contorno C en D con punto inicial z_0 y punto terminal z_1,

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0). \tag{4}$$

Demostración A continuación se demuestra (4) en el caso en que C sea una curva suave definida por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Utilizando (3) de la sección 10.1 y el hecho de que $F'(z) = f(z)$ para cada z en D se tiene

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))z'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt \leftarrow \text{regla de la cadena} \\
&= F(z(t))\Big|_a^b \\
&= F(z(b)) - F(z(a)) = F(z_1) - F(z_0). \qquad \square
\end{aligned}$$

Ejemplo 2 Aplicación de una antiderivada

En el ejemplo 1 se plantea que la integral $\int_C 2z\,dz$, donde C se muestra en la figura 10.20, es independiente de la trayectoria. Ahora, ya que $f(z) = 2z$ es una función entera, también es continua. Además, $F(z) = z^2$ es una antiderivada de f, puesto que $F'(z) = 2z$. Por lo tanto, mediante (4) se tiene

$$\int_{-1}^{-1+i} 2z\,dz = z^2\Big|_{-1}^{-1+i} = (-1+i)^2 - (-1)^2 = -1 - 2i. \qquad \square$$

Ejemplo 3 Aplicación de una antiderivada

Calcule $\int_C \cos z\,dz$, donde C es cualquier contorno con punto inicial $z = 0$ y punto terminal $z = 2 + i$.

Solución $F(z) = \operatorname{sen} z$ es una antiderivada de $f(z) = \cos z$, ya que $F'(z) = \cos z$. Por lo tanto, de (4) se tiene que

$$\int_C \cos z\,dz = \int_0^{2+i} \cos z\,dz = \operatorname{sen} z\Big|_0^{2+i} = \operatorname{sen}(2+i) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen}(2+i).$$

Si se desea como respuesta un número complejo de la forma $a + ib$ se puede utilizar $\operatorname{sen}(2 + i) = 1.4031 - 0.4891i$ (véase el ejemplo 1 de la sección 9.7). Por lo tanto,

$$\int_C \cos z\,dz = 1.4031 - 0.4891i. \qquad \square$$

Se pueden sacar varias conclusiones inmediatas del teorema 10.7. En primer lugar, se observa que si el contorno C es cerrado, entonces $z_0 = z_1$, en consecuencia,

$$\oint_C f(z)\,dz = 0. \tag{5}$$

A continuación, como el valor de $\int_C f(z)\,dz$ depende sólo de los puntos z_0 y z_1, este valor es el mismo para cualquier contorno C en D que conecte dichos puntos. En otras palabras:

Si una función continua f tiene una antiderivada F en D, entonces $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria. (6)

Asimismo, se tiene la siguiente condición suficiente para la existencia de una antiderivada:

Si f es continua y $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en un dominio D, entonces f tiene una antiderivada en cualquier punto de D. (7)

Esta última afirmación es importante y merece una demostración. Considérese que f es continua, $\int_C f(z)\,dz$ es independiente de la trayectoria en un dominio D y F es una función definida por $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ donde s denota una variable compleja, z_0 es un punto fijo de D y z representa cualquier punto de D. Se desea demostrar que $F'(z) = f(z)$; esto es, que F es una antiderivada de f en D. Ahora,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds. \tag{8}$$

Como D es un dominio, se elige Δz de forma que $z + \Delta z$ esté en D. Es más, z y $z + \Delta z$ se unen mediante un segmento recto que se encuentra en D, como muestra la figura 10.21. Éste es el contorno que se utiliza en la última integral de (8). Una vez fijada z se escribe*

$$f(z)\,\Delta z = f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds \quad \text{y} \quad f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds. \tag{9}$$

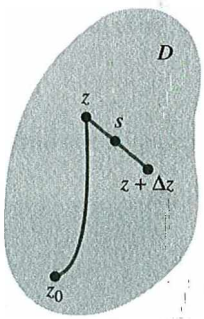


Figura 10.21 Contorno utilizado en la demostración de (7)

*Véase el problema 29 de los ejercicios 10.1.

De (8) y (9) se deduce que

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\, ds.$$

Ahora, f es continua en el punto z. Esto significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ de forma que $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|s - z| < \delta$. En consecuencia, si se selecciona Δz de manera que $|\Delta z| < \delta$ se tiene

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\, ds\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta z}\right| \left|\int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\, ds\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Así, se ha demostrado que

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \text{o} \quad F'(z) = f(z).$$

Si f es una función analítica en un dominio simplemente conexo D, necesariamente es continua en todo D. Este hecho, cuando se combina con los resultados del teorema 10.6 y con (7), conduce a un teorema que establece que una función analítica posee una antiderivada analítica.

TEOREMA 10.8 Existencia de una antiderivada

Si f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces f tiene una antiderivada en D; esto es, existe una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para cualquier z en D.

En (9) de la sección 9.6 se plantea que $1/z$ es la derivada de Ln z. Esto significa que, en ciertas circunstancias, Ln z es una antiderivada de $1/z$. Se debe tener cuidado al utilizar este resultado. Por ejemplo, supóngase que D es el plano complejo completo sin el origen. La función $1/z$ es analítica en este dominio *múltiplemente conexo*. Si C es cualquier contorno cerrado simple que contenga al origen, *no* se deduce de (5) que $\oint_C dz/z = 0$. De hecho, de (4) de la sección 10.2, junto con la igualdad $z_0 = 0$ se observa que

$$\oint_C \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

En este caso, Ln z no es una antiderivada de $1/z$ en D, puesto que Ln z no es analítica en D. Recuérdese que Ln z deja de ser analítica en el eje real no positivo (el corte de ramificación de la rama principal del logaritmo).

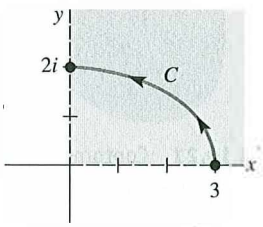


Figura 10.22 Contorno del ejemplo 4

Ejemplo 4 Uso de la función logarítmica

Calcule $\int_C \frac{1}{z}\, dz$, donde C es el contorno mostrado en la figura 10.22.

Solución Supóngase que D es el dominio simplemente conexo definido por $x = \text{Re}(z) > 0$, $y = \text{Im}(z) > 0$. En este caso, Ln z es una antiderivada de $1/z$, puesto que ambas funciones son analíticas en D. Por lo tanto, mediante (4),

$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \operatorname{Ln} z\Big|_3^{2i} = \operatorname{Ln} 2i - \operatorname{Ln} 3.$$

De (7) de la sección 9.6, se tiene que

$$\operatorname{Ln} 2i = \log_e 2 + \frac{\pi}{2}\,i \quad \text{y} \quad \operatorname{Ln} 3 = \log_e 3$$

y así
$$\int_3^{2i} \frac{1}{z}\,dz = \log_e \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}\,i = -0.4055 + 1.5708i. \qquad \square$$

Comentarios

Supóngase que f y g son analíticas en un dominio simplemente conexo D que contiene al contorno C. Si z_0 y z_1 son los puntos inicial y terminal de C, entonces la fórmula de **integración por partes** es válida en D:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)\,dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)g(z)\,dz.$$

Esto se demuestra en forma directa utilizando el teorema 10.7 sobre la función $(d/dz)(fg)$. Véanse problemas del 21 al 24 de los ejercicios 10.3.

EJERCICIOS 10.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas 1 y 2, calcule la integral indicada en que C es el contorno dado en la figura: *a*) encontrando una trayectoria alternativa de integración y *b*) utilizando el teorema 10.7.

1. $\displaystyle\int_C (4z - 1)\,dz$

2. $\displaystyle\int_C e^z\,dz$

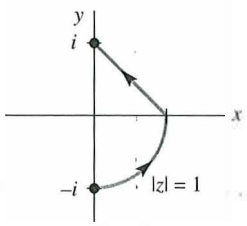


Figura 10.23 Contorno del problema 1

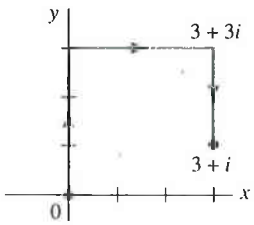


Figura 10.24 Contorno del problema 2

En los problemas 3 y 4, calcule la integral indicada a lo largo del contorno propuesto C.

3. $\displaystyle\int_C 2z\,dz$, donde C es $z(t) = 2t^3 + i(t^4 - 4t^3 + 2)$, $-1 \le t \le 1$

4. $\displaystyle\int_C 6z^2\,dz$, donde C es $z(t) = 2\cos^3 \pi t - i\,\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4}\,t$, $0 \le t \le 2$

En los problemas del 5 al 24, utilice el teorema 10.7 para calcular la integral indicada. Escriba cada respuesta en la forma $a + ib$.

5. $\displaystyle\int_0^{3+i} z^2\,dz$

6. $\displaystyle\int_{-2i}^{1} (3z^2 - 4z + 5i)\,dz$

7. $\displaystyle\int_{1-i}^{1+i} z^3\,dz$

8. $\displaystyle\int_{-3i}^{2i} (z^3 - z)\,dz$

9. $\displaystyle\int_{-i/2}^{1-i} (2z + 1)^2\,dz$

10. $\displaystyle\int_1^{i} (iz + 1)^3\,dz$

11. $\displaystyle\int_{i/2}^{i} e^{\pi z}\,dz$

12. $\displaystyle\int_{1-i}^{1+2i} ze^{z^2}\,dz$

13. $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi+2i} \operatorname{sen}\frac{z}{2}\,dz$

14. $\displaystyle\int_{1-2i}^{\pi i} \cos z\,dz$

15. $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z\,dz$

16. $\displaystyle\int_{i}^{1+(\pi/2)i} \operatorname{senh} 3z\,dz$

17. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz$, C es el arco del círculo $z = 4e^{it}$, $-\pi/2 \le t \le \pi/2$

18. $\displaystyle\int_C \frac{1}{z}\,dz$, C es el segmento de línea recta entre $z_1 = 1 + i$ y $z = 4 + 4i$

19. $\displaystyle\int_{-4i}^{4i} \frac{1}{z^2}\,dz$, C es cualquier contorno que no pase por el origen

20. $\displaystyle\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz$, C es cualquier contorno en el semiplano derecho $\operatorname{Re}(z) > 0$

21. $\displaystyle\int_{\pi}^{i} e^z \cos z\,dz$

22. $\displaystyle\int_0^{i} z \operatorname{sen} z\,dz$

23. $\displaystyle\int_{-i}^{1+i} ze^z\,dz$

24. $\displaystyle\int_0^{\pi i} z^2 e^z\,dz$

10.4 Fórmulas integrales de Cauchy

Introducción En las dos secciones previas se explica la importancia del teorema de Cauchy-Goursat para el cálculo de integrales de contorno. En esta sección se explican algunas consecuencias adicionales del teorema de Cauchy-Goursat. Indiscutiblemente, la más significativa de éstas es el siguiente resultado:

El valor de una función analítica f en cualquier punto z_0 de un dominio simplemente conexo se representa por medio de una integral de contorno.

Una vez planteado este enunciado se utiliza para mostrar que:

Una función analítica f en un dominio simplemente conexo posee derivadas de todos los órdenes.

Las derivaciones de estos dos resultados ocupan el resto de esta sección y también parte del siguiente capítulo.

Primera fórmula Se comienza con la fórmula integral de Cauchy. La idea en el siguiente teorema es: si f es analítica en un dominio simplemente conexo y z_0 es cualquier punto D, entonces el cociente $f(z)/(z - z_0)$ *no* es analítico en D. Como consecuencia, la integral de $f(z)/(z - z_0)$ alrededor de un contorno cerrado simple C que contiene a z_0 no es necesariamente cero, pero tiene, como se ve a continuación, el valor $2\pi i f(z_0)$. Este resultado poco común indica que los valores de una función analítica f en puntos *dentro* de un contorno cerrado simple C se determinan por medio de los valores de f *sobre* el contorno C.

TEOREMA 10.9 Fórmula integral de Cauchy

Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D, y sea C un contorno cerrado simple que se localiza completamente en D. Si z_0 es cualquier punto dentro de C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{1}$$

Demostración Sean D un dominio simplemente conexo, C un contorno cerrado simple en D y z_0 un punto interior de C. Además, sea C_1 un círculo centrado en z_0 con un radio lo suficientemente pequeño como para que sea interior a C. Por el principio de deformación de los contornos, se puede escribir

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{2}$$

Se desea mostrar que el valor de la integral de la derecha es $2\pi i f(z_0)$. Con este fin se suma y se sustrae la constante $f(z_0)$ en el numerador:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz &= \oint_{C_1} \frac{f(z_0) - f(z_0) + f(z)}{z - z_0}\, dz \\ &= f(z_0) \oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Ahora, de (4) de la sección 10.2 se sabe que

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

Entonces, (3) se convierte en

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = 2\pi i f(z_0) + \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz. \tag{4}$$

Como f es continua en z_0 para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe una $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ siempre y cuando $|z - z_0| < \delta$. En particular, si se elige el círculo C_1 como $|z - z_0| = \delta/2 < \delta$, entonces por la desigualdad ML (teorema 10.3) el valor absoluto de la integral en la derecha de (4) cumple con

$$\left| \oint_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{\delta/2} 2\pi \left(\frac{\delta}{2}\right) = 2\pi\varepsilon.$$

En otras palabras, el valor absoluto de la integral puede hacerse arbitrariamente pequeño tomando el radio del círculo C_1 suficientemente pequeño. Esto sólo sucede si la integral es cero. La fórmula de la integral de Cauchy (1) se deduce de (4) dividiendo ambos lados entre $2\pi i$. ❑

La fórmula integral de Cauchy (1) se utiliza para calcular integrales de contorno. Como a menudo se resuelven problemas sin un dominio simplemente conexo que esté definido de manera explícita, se hace un replanteamiento más práctico del teorema 10.9:

Si f es analítica en todos los puntos sobre un contorno cerrado simple C y en los puntos en su interior, y z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \tag{5}$$

Ejemplo 1 Uso de la fórmula integral de Cauchy

Calcule $\oint_C \dfrac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 2$.

Solución En primer lugar, se identifica $f(z) = z^2 - 4z + 4$ y $z_0 = -i$ como un punto dentro del círculo C. A continuación, se observa que f es analítica en todos los puntos del interior y sobre el contorno C. Así, por medio de la fórmula integral de Cauchy se obtiene

$$\oint_C \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i}\, dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = 2\pi(-4 + 3i).$$ ❑

Ejemplo 2 Aplicación de la fórmula integral de Cauchy

Calcule $\oint_C \dfrac{z}{z^2 + 9}\, dz$, donde C es el círculo $|z - 2i| = 4$.

Solución Factorizando el denominador como $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ se observa que $3i$ es el único punto dentro del contorno cerrado para el cual el integrando deja de ser analítico; véase la figura 10.25. Ahora, escribiendo

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\dfrac{z}{z + 3i}}{z - 3i},$$

se identifica $f(z) = z/(z + 3i)$. Esta función es analítica en todos los puntos del interior y sobre el contorno C. De la fórmula integral de Cauchy se tiene entonces

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9}\, dz = \oint_C \frac{\dfrac{z}{z + 3i}}{z - 3i}\, dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i.$$ ❑

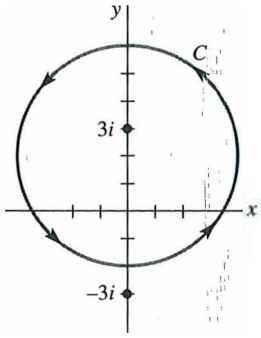
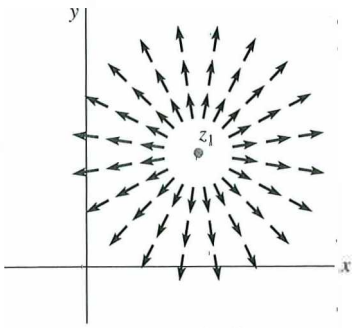
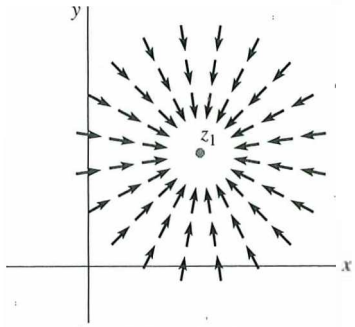


Figura 10.25 Contorno del ejemplo 2



a) Fuente: $k > 0$



b) Pozo: $k < 0$

Figura 10.26 Campos vectoriales del ejemplo 3

Ejemplo 3 Flujo y fórmula de la integral de Cauchy

La función compleja $f(z) = k/(\bar{z} - \bar{z}_1)$, donde $k = a + ib$ y z_1 son números complejos, da lugar a un flujo en el dominio $z \neq z_1$. Si C es un contorno cerrado simple que contiene a $z = z_1$ en su interior, entonces, a partir de la fórmula de la integral de Cauchy se tiene

$$\oint_C \overline{f(z)}\, dz = \oint_C \frac{a - ib}{z - z_1}\, dz = 2\pi i(a - ib).$$

Así, la circulación alrededor de C es $2\pi b$ y el flujo neto a través de C es $2\pi a$. Si z_1 estuviera en el exterior de C, tanto la circulación como el flujo neto serían cero por el teorema de Cauchy.

Obsérvese que cuando k es real, la circulación alrededor de C es cero, pero el flujo neto a través de C es $2\pi k$. El número complejo z_1 es una **fuente** para el flujo cuando $k > 0$ y un **pozo** cuando $k < 0$. Los campos vectoriales correspondientes a estos dos casos se muestran en la figura 10.26*a*) y *b*). ❑

■ **Segunda fórmula** Se utiliza ahora el teorema 10.9 para demostrar que una función analítica posee derivadas de cualquier orden; esto es, si f es analítica en un punto z_0, entonces f', f'', f''', etc., son también analíticas en z_0. Además, los valores de las derivadas $f^{(n)}(z_0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, vienen dados por una fórmula similar a (1).

TEOREMA 10.10 Fórmula integral de Cauchy para derivadas

Sea f una función analítica en un dominio simplemente conexo D, y C un contorno cerrado simple comprendido enteramente dentro de D. Si z_0 es cualquier punto interior a C, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz. \tag{6}$$

Demostración parcial A continuación se demuestra (6) únicamente para el caso $n = 1$. El resto de la demostración puede completarse con el principio de inducción matemática.

Se comienza con la definición de derivada y (1):

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i\, \Delta z}\left[\oint_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)}\, dz - \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz\right] \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\, dz. \end{aligned}$$

Antes de proceder se establecen algunos conceptos preliminares. Puesto que f es continua en C, está acotada; esto es, existe un número real M tal que $|f(z)| \leq M$ para cualquier punto z de C. Asimismo, sea L la longitud de C y sea δ la distancia más corta entre los puntos de C y el punto z_0. Así, para cualquier punto z de C, se tiene que

$$|z - z_0| \geq \delta \quad \text{o} \quad \frac{1}{|z - z_0|^2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Por otra parte, si se elige $|\Delta z| \leq \delta/2$, entonces

$$|z - z_0 - \Delta z| \geq \big||z - z_0| - |\Delta z|\big| \geq \delta - |\Delta z| \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{y así} \quad \frac{1}{|z - z_0 - \Delta z|} \leq \frac{2}{\delta}.$$

Ahora,

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz - \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}\, dz\right| = \left|\oint_C \frac{-\Delta z f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - \Delta z)}\, dz\right| \leq \frac{2ML|\Delta z|}{\delta^3}.$$

Como esta última expresión tiende a cero cuando $\Delta z \to 0$ se acaba de demostrar que

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz. \qquad \square$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto, entonces sus derivadas de cualquier orden existen en ese punto y son continuas. En consecuencia, de

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f''(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial x} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

$$\vdots$$

se concluye que las funciones reales u y v tienen derivadas parciales continuas de cualquier orden en un punto de analiticidad.

Al igual que (1), en ocasiones (6) se utiliza para calcular integrales.

Ejemplo 4 Uso de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Calcule $\oint_C \frac{z + 1}{z^4 + 4z^3}\, dz$, donde C es el círculo $|z| = 1$.

Solución La inspección del integrando muestra que no es analítico en $z = 0$ ni en $z = -4$, únicamente $z = 0$ se encuentra dentro del contorno cerrado. Escribiendo el integrando como

$$\frac{z + 1}{z^4 + 4z^3} = \frac{\dfrac{z + 1}{z + 4}}{z^3},$$

se pueden identificar $z_0 = 0$, $n = 2$ y $f(z) = (z + 1)/(z + 4)$. Por medio de la regla del cociente, $f''(z) = -6/(z + 4)^3$ y con ayuda (6) se tiene que

$$\oint_C \frac{z + 1}{z^4 + 4z^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = -\frac{3\pi}{32} i. \qquad \square$$

Ejemplo 5 Uso de la fórmula integral de Cauchy para derivadas

Calcule $\oint_C \frac{z^2 + 3}{z(z - i)^2}\, dz$, donde C es el contorno mostrado en la figura 10.27.

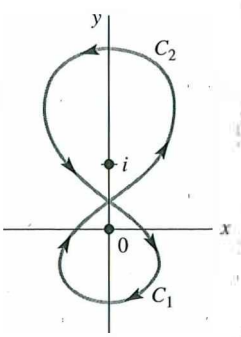


Figura 10.27 Contorno del ejemplo 5

Solución Aunque C no es un contorno cerrado simple se puede pensar en él como la unión de dos contornos cerrados simples C_1 y C_2, como se indica en la figura 10.27. Escribiendo

$$\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2}\, dz = \oint_{C_1} \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2}\, dz + \oint_{C_2} \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2}\, dz$$

$$= -\oint_{C_1} \frac{\dfrac{z^3 + 3}{(z - i)^2}}{z}\, dz + \oint_{C_2} \frac{\dfrac{z^3 + 3}{z}}{(z - i)^2}\, dz = -I_1 + I_2,$$

se está en condiciones de usar tanto (1) como (6).

Para calcular I_1 se identifica $z_0 = 0$ y $f(z) = (z^3 + 3)/(z - i)^2$. Por medio de (1) se deduce que

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{\dfrac{z^3 + 3}{(z - i)^2}}{z}\, dz = 2\pi i f(0) = -6\pi i.$$

Para calcular I_2 se identifica $z_0 = i$, $n = 1$, $f(z) = (z^3 + 3)/z$ y $f'(z) = (2z^3 - 3)/z^2$. De (6) se obtiene

$$I_2 = \oint_{C_2} \frac{\frac{z^3 + 3}{z}}{(z - i)^2}\, dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = 2\pi i(3 + 2i) = 2\pi(-2 + 3i).$$

Finalmente, se obtiene

$$\oint_C \frac{z^3 + 3}{z(z - i)^2}\, dz = -I_1 + I_2 = 6\pi i + 2\pi(-2 + 3i) = 4\pi(-1 + 3i). \qquad \square$$

■ **Teorema de Liouville** Si se considera el contorno C como el círculo $|z - z_0| = r$ se deduce de (6) y de la desigualdad ML que

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}, \tag{7}$$

donde M es un número real tal que $|f(z)| \leq M$ para cualquier punto z de C. El resultado (7), llamado **desigualdad de Cauchy**, se utiliza para demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 10.11 Teorema de Liouville

Las únicas funciones enteras y acotadas son las constantes.

Demostración Supóngase que f es una función entera y acotada, esto es, $|f(z)| \leq M$ para cualquier z. Entonces, para cualquier punto z_0, (7) da $|f'(z_0)| \leq M/r$. Tomando r arbitrariamente grande se puede hacer que $|f'(z_0)|$ sea tan pequeño como se desee. Esto significa que $f'(z_0) = 0$ para cualquier punto z_0 del plano complejo. Por lo tanto, f debe ser constante. $\square$

■ **Teorema fundamental del álgebra** El teorema de Liouville permite demostrar, a su vez, un resultado aprendido en álgebra elemental: si $P(z)$ es un polinomio no constante, entonces la ecuación $P(z) = 0$ tiene al menos una raíz. Este resultado se conoce como el **teorema fundamental del álgebra**. Para demostrarlo, supóngase que $P(z) \neq 0$ para cualquier z. Esto implica que el recíproco de P, $f(z) = 1/P(z)$, es una función entera. Ahora, ya que $|f(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$, la función f debe estar acotada para cualquier z finita. Se deduce del teorema de Liouville que f es una constante y por lo tanto P es una constante. Pero esto es contradictorio con la hipótesis de que P *no* es un polinomio constante, por lo que se concluye que debe existir al menos un número z para el cual $P(z) = 0$.

EJERCICIOS 10.4

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 24, utilice los teoremas 10.9 y 10.10, cuando así convenga, para calcular la integral indicada a lo largo del contorno o los contornos cerrados proporcionados.

1. $\oint_C \frac{4}{z - 3i}\, dz;\ |z| = 5$
2. $\oint_C \frac{z^2}{(z - 3i)^2}\, dz;\ |z| = 5$
3. $\oint_C \frac{e^z}{z - \pi i}\, dz;\ |z| = 4$
4. $\oint_C \frac{1 + 2e^z}{z}\, dz;\ |z| = 1$
5. $\oint_C \frac{z^2 - 3z + 4i}{z + 2i}\, dz;\ |z| = 3$
6. $\oint_C \frac{\cos z}{3z - \pi}\, dz;\ |z| = 1.1$
7. $\oint_C \frac{z^2}{z^2 + 4}\, dz;\quad a)\ |z - i| = 2,\quad b)\ |z + 2i| = 1$

8. $\oint_C \frac{z^2 + 3z + 2i}{z^2 + 3z - 4}\,dz$; $a)|z| = 2$, $b)|z + 5| = \frac{3}{2}$

9. $\oint_C \frac{z^2 + 4}{z^2 - 5iz - 4}\,dz$; $|z - 3i| = 1.3$

10. $\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 + \pi^2}\,dz$; $|z - 2i| = 2$

11. $\oint_C \frac{e^z}{(z - i)^3}\,dz$; $|z - i| = 1$

12. $\oint_C \frac{z}{(z + i)^4}\,dz$; $|z| = 2$

13. $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^5}\,dz$; $|z| = 1$

14. $\oint_C \frac{e^{-z}\operatorname{sen} z}{z^3}\,dz$; $|z - 1| = 3$

15. $\oint_C \frac{2z + 5}{z^2 - 2z}\,dz$; $a)|z| = \frac{1}{2}$, $b)|z + 1| = 2$, $c)|z - 3| = 2$, $d)|z + 2i| = 1$

16. $\oint_C \frac{z}{(z - 1)(z - 2)}\,dz$; $a)|z| = \frac{1}{2}$, $b)|z + 1| = 1$, $c)|z - 1| = 1/2$, $d)|z| = 4$

17. $\oint_C \frac{z + 2}{z^2(z - 1 - i)}\,dz$; $a)|z| = 1$, $b)|z - 1 - i| = 1$

18. $\oint_C \frac{1}{z^3(z - 4)}\,dz$; $a)|z| = 1$, $b)|z - 2| = 1$

19. $\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z - i)^3}\right)dz$; $|z| = 6$

20. $\oint_C \left(\frac{\cosh z}{(z - \pi)^3} - \frac{\operatorname{sen}^2 z}{(2z - \pi)^3}\right)dz$; $|z| = 3$

21. $\oint_C \frac{1}{z^3(z - 1)^2}\,dz$; $|z - 2| = 5$

22. $\oint_C \frac{1}{z^2(z^2 + 1)}\,dz$; $|z - i| = \frac{3}{2}$

23. $\oint_C \frac{3z + 1}{z(z - 2)^2}\,dz$; C viene dado en la figura 10.28

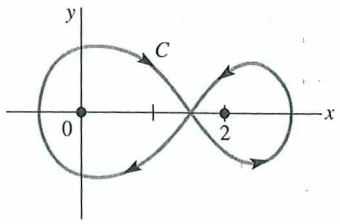


Figura 10.28 Contorno del problema 23

24. $\oint_C \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}\,dz$; ; C viene dado en la figura 10.29

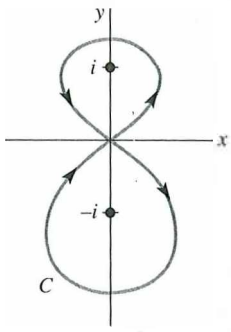


Figura 10.29 Contorno del problema 24

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 10

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

Resuelva los problemas del 1 al 12 sin consultar el texto. Llene el espacio en blanco o conteste verdadero/falso.

1. El sector definido por $-\pi/6 < \arg z < \pi/6$ es un dominio simplemente conexo. _____

2. Si $\oint_C f(z)\,dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C, entonces f es analítica dentro de C y en C. _____

3. El valor de $\int_C \frac{z - 2}{z}\,dz$ es el mismo para cualquier trayectoria C del semiplano derecho $\operatorname{Re}(z) > 0$ entre $z = 1 + i$ y $z = 10 + 8i$. _____

4. Si g es entera, entonces $\oint_C \frac{g(z)}{z - i}\,dz = \oint_{C_1} \frac{g(z)}{z - i}\,dz$, donde C es el círculo $|z| = 3$ y C_1 es la elipse $x^2 + y^2/9 = 1$. _____

5. Si f es un polinomio y C es una curva cerrada simple, entonces $\oint_C f(z)\,dz =$ _____.

6. Si $f(z) = \oint_C \frac{\xi^2 + 6\xi - 2}{\xi - z}\,d\xi$, donde C es $|z| = 3$, entonces $f(1 + i) =$ _____.

7. Si $f(z) = z^3 + e^z$ y C es el contorno $z = 8e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, entonces $\oint_C \frac{f(z)}{(z + \pi i)^3}\, dz =$ _____.

8. Si f es entera y $|f(z)| \le 10$ para cualquier z, entonces $f(z) =$ _____.

9. $\oint_C \frac{1}{(z - z_0)(z - z_1)}\, dz = 0$ para cualquier contorno cerrado simple C que delimite a los puntos z_0 y z_1. _____

10. Si f es analítica dentro de y sobre el contorno cerrado simple C, y z_0 es un punto contenido en C, entonces

$$\oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$ _____.

11. $\oint_C z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ _____} \\ 2\pi i, & \text{si } n \text{ _____} \end{cases}$

donde n es un entero y C es $|z| = 1$.

12. Si $|f(z)| \le 2$ sobre $|z| = 3$, entonces $\left|\oint_C f(z)\, dz\right| \le$ _____.

En los problemas del 13 al 28, calcule la integral indicada utilizando las técnicas planteadas en este capítulo.

13. $\int_C (x + iy)\, dz$; C es el contorno mostrado en la figura 10.30

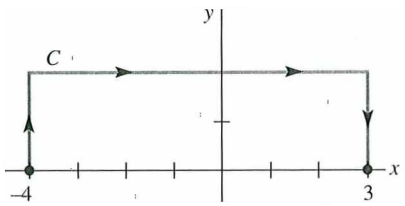


Figura 10.30 Contorno del problema 13

14. $\int_C (x - iy)\, dz$; C es el contorno mostrado en la figura 10.30

15. $\int_C |z^2|\, dz$; C es $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 2$

16. $\int_C e^{\pi z}\, dz$; C es el segmento de línea desde $z = i$ hasta $z = 1 + i$

17. $\oint_C e^{\pi z}\, dz$; C es la elipse $x^2/100 + y^2/64 = 1$

18. $\int_{3i}^{1-i} (4z - 6)\, dz$

19. $\int_C \operatorname{sen} z\, dz$; C es $z(t) = t^4 + i(1 + t^3)^2$, $-1 \le t < 1$

20. $\int_C (4z^3 + 3z^2 + 2z + 1)\, dz$; C es el segmento de línea desde 0 hasta $2i$

21. $\oint_C (z^{-2} + z^{-1} + z + z^2)\, dz$; C es el círculo $|z| = 1$

22. $\oint_C \frac{3z + 4}{z^2 - 1}\, dz$; C es el círculo $|z| = 2$

23. $\oint_C \frac{e^{-2z}}{z^4}\, dz$; C es el círculo $|z - 1| = 3$

24. $\oint_C \frac{\cos z}{z^3 - z^2}\, dz$; C es el círculo $|z| = \frac{1}{2}$

25. $\oint_C \frac{1}{2z^2 + 7z + 3}\, dz$; C es la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$

26. $\oint_C z \csc z\, dz$; C es el rectángulo de vértices $1 + i$, $1 - i$, $2 + i$, $2 - i$

27. $\oint_C \frac{z}{z + i}\, dz$; C es el contorno mostrado en la figura 10.31

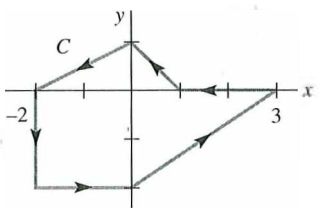


Figura 10.31 Contorno del problema 27

28. $\oint_C \frac{e^{i\pi z}}{2z^2 - 5z + 2}\, dz$; C es *a*) $|z| = 1$, *b*) $|z - 3| = 2$, *c*) $|z + 3| = 2$

29. Sea $f(z) = z^n g(z)$, donde n es un entero positivo, $g(z)$ es entera y $g(z) \ne 0$ para cualquier z. Sea C un círculo con centro en el origen. Calcule $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$.

30. Sea C el segmento de línea recta desde i hasta $2 + i$. Demuestre que

$$\left|\int_C \operatorname{Ln}(z + 1)\, dz\right| \le \log_e 10 + \frac{\pi}{2}.$$

Por Dayet

CAPÍTULO

11

Series y residuos

Estructura del capítulo

11.1 Sucesiones y series
11.2 Serie de Taylor
11.3 Serie de Laurent
11.4 Ceros y polos
11.5 Residuos y teorema del residuo
11.6 Cálculo de integrales reales
Ejercicios de repaso del capítulo 11

La fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas indica que si una función f es analítica en un punto z_0, entonces, dicho punto tiene derivadas de todos los órdenes. Como consecuencia del resultado anterior, en este capítulo se plantea que f puede expandirse siempre en una serie de potencias centrada en dicho punto. Por otro lado, si f no es analítica en un punto z_0, es posible expandirla aun en un tipo diferente de serie conocida como **serie de Laurent**. El concepto de serie de Laurent conduce al concepto de un **residuo**, el que a su vez lleva a otra forma de calcular integrales complejas.

11.1 Sucesiones y series

Introducción Gran parte de la teoría de sucesiones y series complejas es análoga a la existente en cálculo real. En esta sección se analizan las definiciones de convergencia y divergencia para sucesiones complejas y series infinitas complejas. Además, se proporcionan algunas pruebas para la convergencia de series infinitas. Se sugiere poner atención especial a lo expuesto sobre *series geométricas*, ya que este tipo de series son importantes en secciones posteriores de este capítulo.

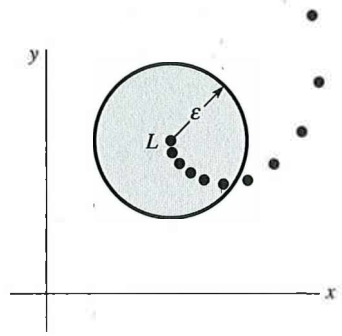


Figura 11.1 Si $\{z_n\}$ converge a L, todos excepto un número finito de términos se encuentran en una ϵ-vecindad de L

Sucesiones Una **sucesión** $\{z_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos; en otras palabras, a cada entero $n = 1, 2, 3, \ldots$, se le asigna un número complejo z_n. Por ejemplo, la sucesión $\{1 + i^n\}$ es

$$\begin{array}{cccccc} 1+i, & 0, & 1-i, & 2, & 1+i, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ n=1, & n=2, & n=3, & n=4, & n=5, \ldots . \end{array} \tag{1}$$

Se dice que si $\lim_{n\to\infty} z_n = L$ la sucesión $\{z_n\}$ es **convergente**. En otras palabras, $\{z_n\}$ **converge** al número L si, para cada número positivo ϵ, se encuentra un N tal que $|z_n - L| < \epsilon$ siempre que $n > N$. Como se muestra en la figura 11.1, cuando una sucesión $\{z_n\}$ converge a L, todos excepto un número finito de términos de la sucesión se hallan dentro de una ϵ-vecindad de L. La sucesión $\{1 + i^n\}$ ilustrada en (1) es divergente, puesto que el término general $z_n = 1 + i^n$ no tiende a un número complejo fijo cuando $n \to \infty$. De hecho, los primeros cuatro términos de esta sucesión se repiten infinitamente al incrementarse n.

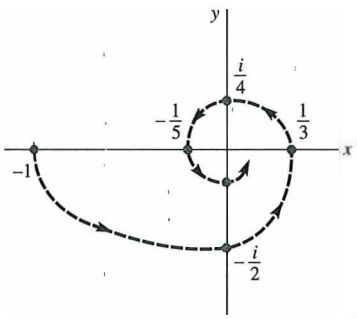


Figura 11.2 Los términos de la sucesión se acercan a 0 espiralmente

Ejemplo 1 Una sucesión convergente

La sucesión $\left\{\dfrac{i^{n+1}}{n}\right\}$ converge, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{i^{n+1}}{n} = 0.$$

Como se observa de

$$-1, -\frac{i}{2}, \frac{1}{3}, \frac{i}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots,$$

y la figura 11.2, los términos de la sucesión avanzan hacia el punto $z = 0$ en forma de espiral. ❑

El siguiente teorema debería ser intuitivo:

TEOREMA 11.1 Criterio para la convergencia

Una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número complejo L si, y sólo si, $\text{Re}(z_n)$ converge a $\text{Re}(L)$ e $\text{Im}(z_n)$ converge a $\text{Im}(L)$.

Ejemplo 2 Ilustración del teorema 11.1

La sucesión $\left\{\dfrac{ni}{n + 2i}\right\}$ converge a i. Obsérvese que $\text{Re}(i) = 0$ e $\text{Im}(i) = 1$. Entonces, de

$$z_n = \frac{ni}{n + 2i} = \frac{2n}{n^2 + 4} + i\frac{n^2}{n^2 + 4},$$

se observa que $\text{Re}(z_n) = 2n/(n^2 + 4) \to 0$ e $\text{Im}(z_n) = n^2/(n^2 + 4) \to 1$ cuando $n \to \infty$. ❑

Series Una **serie infinita** de números complejos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

es **convergente** si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$, donde

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n,$$

converge. Si $S_n \to L$ cuando $n \to \infty$ se dice que la **suma** de la serie es L.

Serie geométrica Para la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots \tag{2}$$

el término n-ésimo de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}. \tag{3}$$

Multiplicando S_n por z y restándole este resultado a S_n se obtiene $S_n - zS_n = a - az^n$. Despejando S_n se obtiene

$$S_n = \frac{a(1 - z^n)}{1 - z}. \tag{4}$$

Como $z^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, siempre y cuando $|z| < 1$ se concluye de (4) que (2) converge a

$$\frac{a}{1 - z}$$

para $|z| < 1$; la serie diverge cuando $|z| \geq 1$. La serie geométrica especial

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{5}$$

y

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots \tag{6}$$

válida para $|z| < 1$, es de utilidad particular en las siguientes dos secciones. Asimismo, en las demostraciones de los dos principales teoremas de este capítulo se utiliza

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} \tag{7}$$

o, en su forma alternativa,

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1 - z}. \tag{8}$$

Ejemplo 3 Serie geométrica convergente

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{5^k} = \frac{1 + 2i}{5} + \frac{(1 + 2i)^2}{5^2} + \frac{(1 + 2i)^3}{5^3} + \cdots$$

es una serie geométrica con $a = (1 + 2i)/5$ y $z = (1 + 2i)/5$. Como $|z| = \sqrt{5}/5 < 1$, la serie converge y entonces se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2i)^k}{5^k} = \frac{\dfrac{1 + 2i}{5}}{1 - \dfrac{1 + 2i}{5}} = \frac{i}{2}.$$ ❑

TEOREMA 11.2 Condición necesaria para la convergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Una forma equivalente del teorema 11.2 es la conocida prueba del n-ésimo término para la divergencia de una serie infinita.

TEOREMA 11.3 La prueba del n-ésimo término para la divergencia

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ diverge.

Por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (k + 5i)/k$ diverge puesto que $z_n = (n + 5i)/n \to 1$ cuando $n \to \infty$. La serie geométrica (2) diverge cuando $|z| \geq 1$, ya que, $\lim_{n\to\infty} |z^n|$ no existe en este caso.

DEFINICIÓN 11.1 Convergencia absoluta

Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge.

Ejemplo 4 Convergencia absoluta

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} (i^k/k^2)$ es absolutamente convergente puesto que $|i^k/k^2| = 1/k^2$ y la serie real $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^2)$ converge. De los cursos de cálculo recuerde que una serie real de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k^p)$ se denomina una serie p, la cual converge para $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$. ❑

Al igual que en cálculo real,

La convergencia absoluta implica convergencia.

Así, en el ejemplo 4, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2} = i - \frac{1}{2^2} - \frac{i}{3^2} + \cdots$$

converge.

Las dos pruebas siguientes son las versiones complejas de las pruebas de la razón y de raíz encontradas en cálculo:

TEOREMA 11.4 Prueba de la razón

Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos no nulos tales que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L. \tag{9}$$

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

TEOREMA 11.5 Prueba de raíz

Supóngase que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es una serie de términos complejos tales que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|} = L. \tag{10}$$

i) Si $L < 1$, entonces la serie converge absolutamente.

ii) Si $L > 1$ o $L = \infty$, entonces la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, la prueba no es concluyente.

Fundamentalmente, se tiene interés en aplicar estas pruebas a las series de potencias.

Series de potencias El concepto de series de potencias es importante en el estudio de funciones analíticas. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \tag{11}$$

donde los coeficientes a_k son constantes complejas, se denomina **series de potencias** en $z - z_0$. Se dice que la serie de potencias (11) está **centrada en** z_0, y el punto complejo z_0 se conoce como el **centro** de la serie. En (11) es conveniente también definir $(z - z_0)^0 = 1$ incluso cuando $z = z_0$.

Círculo de convergencia Todas las series de potencias complejas tienen **radio de convergencia** R. En forma análoga al concepto de *intervalo* de convergencia en cálculo real, una serie de potencias compleja (11) tiene **un círculo de convergencia** definido por $|z - z_0| = R$ cuando $0 < R < \infty$. La serie de potencias converge absolutamente para todos los z que satisfagan $|z - z_0| < R$ y diverge para $|z - z_0| > R$. Véase la figura 11.3. El radio de convergencia R puede ser:

i) cero (en cuyo caso (11) converge únicamente en $z = z_0$),

ii) un número finito (en cuyo caso (11) converge en todos los puntos interiores del círculo $|z - z_0| = R$), o

iii) ∞ (en cuyo caso (11) converge para cualquier z).

Una serie de potencias puede converger en algunos, todos o ninguno de los puntos *del* círculo de convergencia.

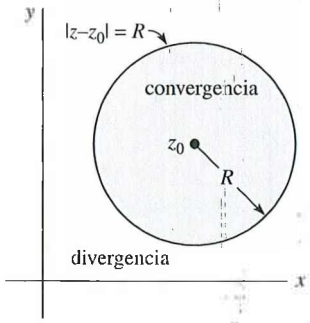


Figura 11.3 Una serie de potencias converge en todos los puntos dentro del círculo de convergencia

Ejemplo 5 Círculo de convergencia

Considérese la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} (z^{k+1}/k)$. Por medio de la prueba de la razón (9),

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+2}}{n+1}}{\frac{z^{n+1}}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|z| = |z|.$$

Así pues, la serie converge absolutamente para $|z| < 1$. El círculo de convergencia es $|z| = 1$ y el radio de convergencia es $R = 1$. Obsérvese que en el círculo de convergencia, la serie no converge absolutamente, puesto que la serie de valores absolutos es la muy conocida serie armónica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} (1/k)$. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que esto no significa que la serie diverja en el círculo de convergencia. De hecho, en $z = -1$, $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^{k+1}/k)$ es la serie armónica alternante convergente, y puede demostrarse que la serie converge en todos los puntos sobre la circunferencia $|z| = 1$ excepto en $z = 1$. ❑

Debería ser claro a partir del teorema 11.4 y del ejemplo 5 que para una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$, el límite (9) depende únicamente de los coeficientes a_k. Así, si

i) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \neq 0$, el radio de convergencia es $R = 1/L$;

ii) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, el radio de convergencia es ∞;

iii) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, el radio de convergencia es $R = 0$.

Pueden realizarse observaciones similares para la prueba de raíz (10) utilizando $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Ejemplo 6 Radio de convergencia

Considérese la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(z-1-i)^k}{k!}$. Igualando $a_n = (-1)^{n+1}/n!$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Así, el radio de convergencia es ∞; la serie de potencias con centro $1 + i$ converge completamente para todas las z. ❑

Ejemplo 7 Radio de convergencia

Considérese la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6k+1}{2k+5}\right)^k(z-2i)^k$. Con $a_n = \left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$, la prueba de raíz en la forma

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{2n+5} = 3$$

muestra que el radio de convergencia de la serie es $R = \frac{1}{3}$. El círculo de convergencia es $|z - 2i| = \frac{1}{3}$; la serie converge absolutamente para $|z - 2i| < \frac{1}{3}$. ❑

EJERCICIOS 11.1 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 4, escriba los primeros cinco términos de la sucesión indicada.

1. $\{5i^n\}$
2. $\{2 + (-i)^n\}$
3. $\{1 + e^{n\pi i}\}$
4. $\{(1 + i)^n\}$ [*Sugerencia:* Escríbalos en forma polar.]

En los problemas del 5 al 10, determine si la sucesión indicada converge o diverge.

5. $\left\{\dfrac{3ni + 2}{n + ni}\right\}$
6. $\left\{\dfrac{ni + 2^n}{3ni + 5^n}\right\}$
7. $\left\{\dfrac{(ni + 2)^2}{n^2 i}\right\}$
8. $\left\{\dfrac{n(1 + i^n)}{n + 1}\right\}$
9. $\left\{\dfrac{n + i^n}{\sqrt{n}}\right\}$
10. $\{e^{1/n} + 2(\tan^{-1} n)i\}$

En los problemas 11 y 12, demuestre que la sucesión indicada $\{z_n\}$ converge a un número complejo L calculando $\lim_{n\to\infty} \text{Re}(z_n)$ y $\lim_{n\to\infty} \text{Im}(z_n)$.

11. $\left\{\dfrac{4n + 3ni}{2n + i}\right\}$
12. $\left\{\left(\dfrac{1 + i}{4}\right)^n\right\}$

En los problemas 13 y 14, utilice la sucesión de sumas parciales para mostrar que la serie indicada es convergente.

13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k + 2i} - \frac{1}{k + 1 + 2i}\right]$
14. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i}{k(k + 1)}$

En los problemas del 15 al 20, determine si la serie geométrica indicada es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

15. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1 - i)^k$
16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}4i\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$
17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k$
18. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}i^k$
19. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}3\left(\frac{2}{1 + 2i}\right)^k$
20. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{i^k}{(1 + i)^{k-1}}$

En los problemas del 21 al 28, encuentre el círculo y el radio de convergencia de la serie de potencias indicada.

21. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1 - 2i)^{k+1}}(z - 2i)^k$
22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{i}{1 + i}\right)^k z^k$
23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k2^k}(z - 1 - i)^k$
24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(3 + 4i)^k}(z + 3i)^k$
25. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(1 + 3i)^k(z - i)^k$
26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^k}$
27. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z - 4 - 3i)^k}{5^{2k}}$
28. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1 + 2i}{2}\right)^k(z + 2i)^k$

29. Demuestre que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z - i)^k}{k2^k}$ no es absolutamente convergente sobre su círculo de convergencia. Determine al menos un punto de dicho círculo en el que la serie de potencias converja.

30. *a*) Demuestre que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^2}$ converge en todos los puntos de su círculo de convergencia.

    b) Demuestre que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kz^k$ diverge en todos los puntos de su círculo de convergencia.

11.2 Serie de Taylor

Introducción La correspondencia entre un número complejo z del interior del círculo de convergencia y el número al que converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z - z_0)^k$ tiene un único valor. En este sentido, una serie de potencias *define* o *representa* una función f; para una z específica en el interior del círculo de convergencia, el número L al que converge la serie de potencias se define como el valor de f en z, esto es, $f(z) = L$. En esta sección se presentan algunos datos importantes sobre la naturaleza de esta función f.

En la sección anterior se plantea que todas las series de potencias tienen un radio de convergencia R. A lo largo de la argumentación de esta sección se plantea que una serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z - z_0)^k$ tiene un radio R de convergencia que es *positivo* o

infinito. Los siguientes tres teoremas ofrecen algunos elementos importantes sobre la naturaleza de una serie de potencias en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, $R \neq 0$.

TEOREMA 11.6 Continuidad

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ representa una función continua f en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$.

TEOREMA 11.7 Integración término a término

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ puede integrarse término a término en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$, para cualquier contorno C, que se encuentre completamente en el interior de dicho círculo.

TEOREMA 11.8 Derivación término a término

Una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ puede derivarse término a término en el interior de su círculo de convergencia $|z - z_0| = R$, siendo $R \neq 0$.

Serie de Taylor Supóngase que una serie de potencias representa una función f para $|z - z_0| < R$, siendo $R \neq 0$; esto es,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \cdots. \quad (1)$$

Del teorema 11.8 se infiere que las derivadas de f son

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_k(z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \cdots \quad (2)$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(z - z_0) + \cdots \quad (3)$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \cdots \quad (4)$$

etc. Cada una de las series resultantes de la derivación tiene el mismo radio de convergencia que la serie original. Asimismo, como la serie de potencias original representa una función f derivable en el interior de su círculo de convergencia, se concluye que cuando $R \neq 0$, *una serie de potencias representa a una función analítica en el interior de su círculo de convergencia.*

Existe una relación entre los coeficientes a_k y las derivadas de f. Calculando (1), (2), (3) y (4) en $z = z_0$ se obtienen

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = 1!a_1, \quad f''(z_0) = 2!a_2, \quad \text{y} \quad f'''(z_0) = 3!a_3,$$

respectivamente. En general, $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ o

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \geq 0. \quad (5)$$

Cuando $n = 0$, la derivada cero se interpreta como $f(z_0)$ y $0! = 1$. Sustituyendo (5) en (1) se obtiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \quad (6)$$

Esta serie se denomina la **serie de Taylor** centrada en z_0 para f. Una serie de Taylor con centro en $z_0 = 0$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k, \tag{7}$$

se conoce como **serie de Maclaurin**.

Se ha visto que una serie de potencias con un radio de convergencia no nulo representa una función analítica. Por otro lado, si se tiene una función f que es analítica en algún dominio D, ¿puede representarse mediante una serie de potencias de las formas (6) y (7)? Puesto que una serie de potencias converge en un dominio circular, y un dominio D no es generalmente circular, la pregunta se convierte en: ¿puede expandirse f en *una o más* serie de potencias que sean válidas en dominios circulares todos ellos contenidos en D? La pregunta se contesta afirmativamente en el siguiente teorema.

TEOREMA 11.9 Teorema de Taylor

Sea f analítica dentro de un dominio D y sea z_0 un punto en D. Entonces f tiene la representación serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \tag{8}$$

válida para el círculo más grande C, con centro en z_0 y radio R, comprendido enteramente dentro de D.

Demostración Sea z un punto fijo dentro del círculo C y sea s la variable de integración. El círculo C se describe entonces por $|s - z_0| = R$; véase la figura 11.4. Para comenzar, se utiliza la fórmula integral de Cauchy a fin de obtener el valor de f en z:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s - z}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0) - (z - z_0)}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s - z_0} \left\{ \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}} \right\} ds. \end{aligned} \tag{9}$$

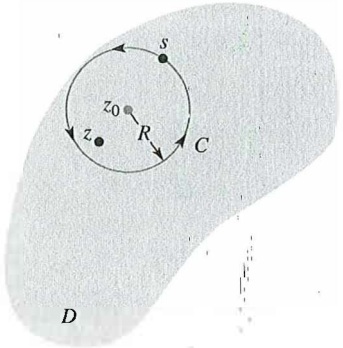


Figura 11.4 Contorno circular C utilizado en la demostración del teorema 11.9

Reemplazando z por $(z - z_0)/(s - z_0)$ en (8) de la sección 11.1, se tiene

$$\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{s - z_0}} = 1 + \frac{z - z_0}{s - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z)(s - z_0)^{n-1}},$$

por lo que (9) resulta en

$$\begin{aligned} f(z) = {} & \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{s - z_0}\, ds + \frac{z - z_0}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^2}\, ds + \frac{(z - z_0)^2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^3}\, ds + \cdots \\ & + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^n}\, ds + \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds. \end{aligned} \tag{10}$$

Utilizando la fórmula de la integral de Cauchy para las derivadas, (10) se reescribe como

$$\begin{aligned} f(z) = {} & f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \\ & + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} + R_n(z), \end{aligned} \tag{11}$$

donde $$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds.$$

La ecuación (11) se denomina fórmula de Taylor con resto R_n. Se desea mostrar a continuación que $R_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Como f es analítica en D, $|f(z)|$ tiene un valor máximo M sobre el contorno C. Además, puesto que z está en el interior de C, se tiene que $|z - z_0| < R$ y, en consecuencia,

$$|s - z| = |s - z_0 - (z - z_0)| \geq |s - z_0| - |z - z_0| = R - d,$$

donde $d = |z - z_0|$ es la distancia entre z y z_0. La desigualdad ML da entonces

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z)(s - z_0)^n}\, ds \right| \leq \frac{d^n}{2\pi} \cdot \frac{M}{(R - d)R^n} \cdot 2\pi R = \frac{MR}{R - d}\left(\frac{d}{R}\right)^n.$$

Debido a que $d < R$, $(d/R)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se concluye que $|R_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se deduce entonces que la serie infinita

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

converge a $f(z)$. En otras palabras, el resultado de (8) es válido para cualquier punto z interior a C. ❑

El radio de convergencia de una serie de Taylor se encuentra exactamente de la misma forma que en los ejemplos del 5 al 7 de la sección 11.1. Sin embargo, es mucho más simple observar que el radio de convergencia es la *distancia* desde el centro z_0 de la serie a la *singularidad aislada* más cercana a f. En la próxima sección se discute más a fondo este concepto, sin embargo se puede adelantar que una singularidad aislada es un punto z_0 en el que f deja de ser analítica, pero es analítica en el resto de todos los puntos de *alguna* vecindad de z_0. Por ejemplo, $z = 5i$ es una singularidad aislada de $f(z) = 1/(z - 5i)$. Si la función f es entera, entonces el radio de convergencia de una serie de Taylor centrada en cualquier punto z_0 es necesariamente ∞. Utilizando (8) y esta última afirmación se puede decir que las representaciones de la serie de Maclaurin

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{12}$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{13}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \tag{14}$$

son válidas para cualquier z.

Si dos series de potencias con centro en z_0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$$

representan la misma función y tienen el mismo radio de convergencia no nulo, entonces $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dicho de otra manera, la expansión en serie de potencias de una función con centro en z_0 es *única*. En forma práctica, esto significa que una expansión de una serie de potencias para una función analítica f centrada en z_0 es la expansión de la serie de Taylor de la función, independientemente del método utilizado para obtenerla. Por ejemplo, (14) se obtiene derivando simplemente (13) término a término. La serie de Maclaurin para e^{z^2} se obtiene reemplazando el símbolo z de (12) por z^2.

Ejemplo 1 Serie de Maclaurin

Encuentre la expansión de Maclaurin para $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

Solución Desde luego, se puede comenzar calculando los coeficientes con (8). Sin embargo, se sabe de (5) de la sección 11.1 que para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots. \tag{15}$$

Derivando ambos lados del último resultado respecto a z se produce

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

Como se está utilizando el teorema 11.8, el radio de convergencia de esta última serie es el mismo que el de la serie original, $R = 1$. ❑

Ejemplo 2 Serie de Taylor

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ en una serie de Taylor de centro $z_0 = 2i$.

Solución A continuación se resuelve este problema de dos formas; se comienza utilizando (8). De las primeras derivadas,

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad f''(z) = \frac{2 \cdot 1}{(1-z)^3}, \quad f'''(z) = \frac{3 \cdot 2}{(1-z)^4},$$

se concluye que $f^{(n)}(z) = n!/(1-z)^{n+1}$ y por lo tanto $f^{(n)}(2i) = n!/(1-2i)^{n+1}$. Así, de (8) se obtiene la serie de Taylor

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-2i)^{k+1}} (z-2i)^k. \tag{16}$$

Puesto que la distancia desde el centro $z_0 = 2i$ hasta la singularidad más próxima $z = 1$ es $\sqrt{5}$, se concluye que el círculo de convergencia para la serie de potencias en (16) es $|z - 2i| = \sqrt{5}$. Esto se verifica por medio de la prueba de la razón explicada en la sección anterior.

Solución alterna En esta solución se utiliza de nuevo la serie geométrica (15). Sumando y restando $2i$ en el denominador de $1/(1-z)$, se escribe

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z+2i-2i} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}.$$

Ahora se plantea $\dfrac{1}{1-\dfrac{z-2i}{1-2i}}$ como una serie de potencias utilizando (15) y reemplazando el símbolo z por $(z-2i)/(1-2i)$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i}\left[1 + \frac{z-2i}{1-2i} + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2 + \frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3 + \cdots.$$

Se deja al lector verificar que esta última serie sea exactamente la misma que (16). ❑

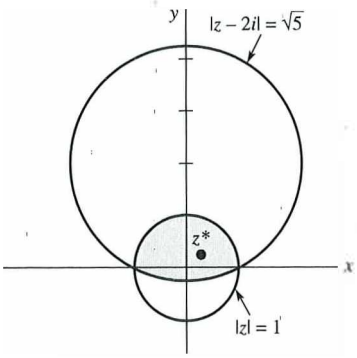


Figura 11.5 Las series (15) y (16) convergen dentro de la región sombreada

En (15) y (16) se representa la misma función $1/(1 - z)$ por medio de dos series de potencias diferentes. La primera serie

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

tiene cero de centro y uno de radio de convergencia. La segunda serie

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i} + \frac{1}{(1-2i)^2}(z-2i) + \frac{1}{(1-2i)^3}(z-2i)^2 + \frac{1}{(1-2i)^4}(z-2i)^3 + \cdots$$

tiene centro $2i$ y radio de convergencia $\sqrt{5}$. Los dos círculos de convergencia se ilustran en la figura 11.5. El interior de la intersección de los dos círculos (parte sombreada) es la región donde *ambas* series convergen; en otras palabras, en un punto específico z^* de esta región, ambas series convergen al mismo valor $f(z^*) = 1/(1 - z^*)$. Fuera de la región sombreada, por lo menos una de las dos series debe divergir.

EJERCICIOS 11.2 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-27.

En los problemas del 1 al 12, expanda la función indicada en una serie de Maclaurin. Indique cuál es el radio de convergencia de cada serie.

1. $f(z) = \dfrac{z}{1+z}$
2. $f(z) = \dfrac{1}{4-2z}$
3. $f(z) = \dfrac{1}{(1+2z)^2}$
4. $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^3}$
5. $f(z) = e^{-2z}$
6. $f(z) = ze^{-z^2}$
7. $f(z) = \operatorname{senh} z$
8. $f(z) = \cosh z$
9. $f(z) = \cos\dfrac{z}{2}$
10. $f(z) = \operatorname{sen} 3z$
11. $f(z) = \operatorname{sen} z^2$
12. $f(z) = \cos^2 z$ [*Sugerencia:* Utilice una identidad trigonométrica.]

En los problemas del 13 al 22, expanda la función proporcionada en una serie de Taylor centrada en el punto indicado. Indique cuál es el radio de convergencia de cada serie.

13. $f(z) = 1/z,\ z_0 = 1$
14. $f(z) = 1/z,\ z_0 = 1 + i$
15. $f(z) = \dfrac{1}{3-z},\ z_0 = 2i$
16. $f(z) = \dfrac{1}{1+z},\ z_0 = -i$
17. $f(z) = \dfrac{z-1}{3-z},\ z_0 = 1$
18. $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z},\ z_0 = i$
19. $f(z) = \cos z,\ z_0 = \pi/4$
20. $f(z) = \operatorname{sen} z,\ z_0 = \pi/2$
21. $f(z) = e^z,\ z_0 = 3i$
22. $f(z) = (z-1)e^{-2z},\ z_0 = 1$

En los problemas 23 y 24, utilice (7) para encontrar los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin para la función indicada.

23. $f(z) = \tan z$
24. $f(z) = e^{1/(1+z)}$

En los problemas 25 y 26, utilice fracciones parciales como ayuda para obtener la serie de Maclaurin para la función indicada. Indique cuál es el radio de convergencia de la serie.

25. $f(z) = \dfrac{i}{(z-i)(z-2i)}$
26. $f(z) = \dfrac{z-7}{z^2-2z-3}$

En los problemas 27 y 28, determine, sin efectuar realmente la expansión, el radio de convergencia de la serie de Taylor de la función proporcionada que está centrada en el punto indicado.

27. $f(z) = \dfrac{4+5z}{1+z^2},\ z_0 = 2 + 5i$
28. $f(z) = \cot z,\quad z_0 = \pi i$

En los problemas 29 y 30, expanda la función proporcionada en la serie de Taylor centrada en los puntos indicados. Señale cuál es el radio de convergencia de cada serie. Bosqueje la región en la cual ambas series convergen.

29. $f(z) = \dfrac{1}{2+z},\ z_0 = -1, z_0 = i$
30. $f(z) = \dfrac{1}{z},\ z_0 = 1 + i,\ z_0 = 3$
31. *a)* Supóngase que la ramificación principal del logaritmo $f(z) = \operatorname{Ln} z = \log_e|z| + i \operatorname{Arg} z$ se expande en una serie de Taylor con centro $z_0 = -1 + i$. Explique por qué $R = 1$ es el radio del círculo más grande centrado en $z_0 = -1 + i$, dentro del cual, f es analítica.

b) Demuestre que en el interior del círculo $|z - (-1 + i)| = 1$ la serie de Taylor para f es

$$\text{Ln } z = \frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{3\pi}{4}i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1+i}{2}\right)^k (z + 1 - i)^k.$$

c) Demuestre que el radio de convergencia para la serie de potencias del inciso *b*) es $R = \sqrt{2}$. Explique por qué esto no contradice el resultado del inciso *a*).

32. *a*) Considérese que la función $f(z) = \text{Ln}(1 + z)$. ¿Cuál es el radio del círculo más grande centrado en el origen dentro del cual f es analítica?

b) Expanda f en una serie de Maclaurin. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

c) Utilice el resultado del inciso *b*) a fin de hallar una serie de Maclaurin para $\text{Ln}(1 - z)$.

d) Encuentre una serie de Maclaurin para $\text{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

En los problemas 33 y 34, aproxime el valor de la expresión proporcionada utilizando el número indicado de términos de una serie de Maclaurin.

33. $e^{(1+i)/10}$, tres términos 34. $\text{sen}\left(\frac{1+i}{10}\right)$, dos términos

35. En la sección 7.1 se define la función error como

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt.$$

Encuentre una serie de Maclaurin para fer(z).

36. Utilice la serie de Maclaurin para e^{iz} con el fin de demostrar la fórmula de Euler para una z compleja:

$$e^{iz} = \cos z + i \text{ sen } z.$$

11.3 Serie de Laurent

■ **Introducción** Si una función compleja f deja de ser analítica en un punto $z = z_0$, entonces se dice que este punto es una **singularidad** o un **punto singular** de la función. Por ejemplo, los números complejos $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de la función $f(z) = z/(z^2 + 4)$ ya que f es discontinua en cada uno de estos puntos. Recuérdese de la sección 9.6 que el valor principal del logaritmo, Ln z, es analítico en todos los puntos excepto en aquellos del corte de ramificación asociado al eje x no positivo; esto es, el punto de ramificación $z = 0$, así como todos los números reales negativos son puntos singulares de Ln z. Esta sección se concentra en un nuevo tipo de expansión de "serie de potencias" de f respecto a una **singularidad aislada** z_0. Esta nueva serie involucra potencias enteras negativas y no negativas de $z - z_0$.

■ **Singularidades aisladas** Supóngase que $z = z_0$ es una singularidad de una función compleja f. Se dice que el punto $z = z_0$ es una **singularidad aislada** de la función f si existe *alguna* vecindad de z_0, de la cual se ha suprimido este punto, o disco abierto perforado, $0 < |z - z_0| < R$ de z_0 en donde f es analítica. Por ejemplo, se acaba de ver que $z = 2i$ y $z = -2i$ son singularidades de $f(z) = z/(z^2 + 4)$. Tanto $2i$ como $-2i$ son singularidades aisladas, puesto que f es analítica en todos los puntos de la vecindad definida por $|z - 2i| < 1$, excepto en $z = 2i$ y en cada punto de la vecindad definida por $|z - (-2i)| < 1$, excepto en $z = -2i$. En otras palabras, f es analítica en los discos perforados $0 < |z - 2i| < 1$ y $0 < |z + 2i| < 1$. Por otro lado, el punto de ramificación $z = 0$ *no* es una singularidad aislada de Ln z, puesto que todas las vecindades de $z = 0$ deben contener puntos sobre el eje x negativo. Se dice que un punto singular $z = z_0$ de una función f es **no aislado** si *cualquier* vecindad de z_0 contiene por lo menos una singularidad de f diferente de z_0. Por ejemplo, el punto de ramificación $z = 0$ es una singularidad no aislada de Ln z, ya que cualquier vecindad de $z = 0$ contiene puntos sobre el eje real negativo.

■ **Un nuevo tipo de serie** Si $z = z_0$ es una singularidad de una función f, entonces ciertamente f no puede expandirse en una serie de potencias con z_0 como su centro. Sin embargo, respecto a una singularidad aislada $z = z_0$, es posible representar f por medio de un nuevo tipo de serie que involucra potencias enteras negativas y no negativas de $z - z_0$; esto es,

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Utilizando notación sumatoria, esta última expresión se escribe como la suma de dos series

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k. \tag{1}$$

Las dos series del lado derecho de (1) reciben nombres especiales. La parte con potencias negativas de $z - z_0$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

se denomina la **parte principal** de la serie (1) y converge para $|1/(z - z_0)| < r^*$ o, en forma equivalente, para $|z - z_0| > 1/r^* = r$. La parte formada por las potencias no negativas de $z - z_0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

se denomina la **parte analítica** de la serie (1) y converge para $|z - z_0| < R$. Así, la suma de estas partes converge cuando z cumple con $|z - z_0| > r$ y $|z - z_0| < R$, es decir, cuando z es un punto de un dominio anular definido por $r < |z - z_0| < R$.

Sumando los enteros negativos y no negativos, (1) se escribe en forma compacta como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k.$$

El siguiente ejemplo ilustra una serie de la forma (1) cuya parte principal está formada por un número finito de términos no nulos, pero cuya parte analítica consiste en un número infinito de términos no nulos.

Ejemplo 1 Un nuevo tipo de serie

La función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^3$ no es analítica en $z = 0$ y, por lo tanto, no puede expandirse en una serie de Maclaurin. Sin embargo, sen z es una función entera, y de (13) de la sección 11.2 se sabe que su serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots,$$

converge para cualquier z. Dividiendo esta serie de potencias entre z^3 se obtiene la siguiente serie con potencias enteras negativas y no negativas de z:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \cdots. \tag{2}$$

Esta serie converge para cualquier z excepto $z = 0$, o sea, para $0 < |z|$. ❑

Una representación en serie de una función f que tenga la forma dada en (1), por ejemplo (2), se denomina una **serie de Laurent** o una **expansión de Laurent** de f.

TEOREMA 11.10 Teorema de Laurent

Sea f analítica dentro del dominio anular D definido por $r < |z - z_0| < R$. Entonces f tiene la representación serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{3}$$

que es válida para $r < |z - z_0| < R$. Los coeficientes a_k vienen dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{4}$$

donde C es una curva cerrada simple localizada enteramente dentro de D y que tiene a z_0 en su interior (véase la figura 11.6).

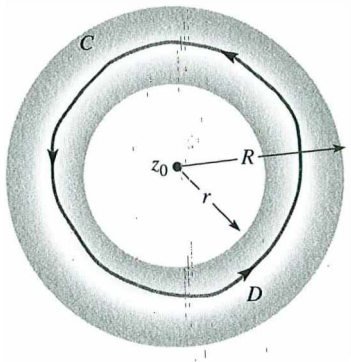


Figura 11.6 Contorno del teorema 11.10

Demostración Sean C_1 y C_2 círculos concéntricos de centro z_0 y radios R_1 y R_2, donde $r < r_1 < R_2 < R$. Sea z un punto fijo en D que también satisface $r_1 < |z - z_0| < R_2$; véase la figura 11.7. Introduciendo un corte cruzado entre C_1 y C_2 se encuentra a partir de la fórmula integral de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\,ds. \tag{5}$$

Procediendo como en la demostración del teorema 11.9 se escribe

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z}\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{6}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

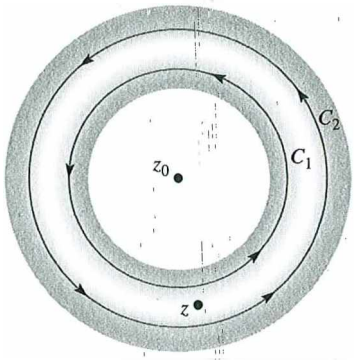


Figura 11.7 C_1 y C_2 son círculos concéntricos

Ahora, utilizando (5) y (8) de la sección 11.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(z - z_0) - (s - z_0)}\,ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z - z_0}\left\{\frac{1}{1 - \dfrac{s - z_0}{z - z_0}}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{z - z_0}\left\{1 + \frac{s - z_0}{z - z_0} + \left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^2 + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s - z_0}{z - z_0}\right)^{n-1} + \frac{(s - z_0)^n}{(z - s)(z - z_0)^{n-1}}\right\} ds \qquad (8) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + R_n(z),
\end{aligned}$$

donde

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-k+1}}\,ds, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

y

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n}\oint_{C_1} \frac{f(s)(s - z_0)^n}{z - s}\,ds.$$

Ahora, sea d la distancia de z a z_0, esto es, $|z - z_0| = d$, y sea M el valor máximo de $|f(z)|$ en el contorno C_1. Como $|s - z_0| = r_1$,

$$|z - s| = |z - z_0 - (s - z_0)| \geq |z - z_0| - |s - z_0| = d - r_1.$$

La desigualdad ML lleva entonces a

$$|R_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i (z - z_0)^n}\oint_{C_1} \frac{f(s)(s - z_0)^n}{z - s}\,ds\right| \leq \frac{1}{2\pi d^n} \cdot \frac{M r_1^n}{d - r_1} \cdot 2\pi r_1 = \frac{M r_1}{d - r_1}\left(\frac{r_1}{d}\right)^n.$$

Como $r_1 < d$, $(r_1/d)^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $|R_n(z)| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Así, se ha demostrado que

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}, \tag{10}$$

donde los coeficientes a_{-k} vienen dados en (9). Combinando (6) y (10) se observa que (5) produce

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}. \tag{11}$$

Finalmente, sumando los enteros negativos y no negativos, (11) se escribe como $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Sin embargo, (7) y (9) se escriben como una integral simple:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(s)}{(z-z_0)^{k+1}}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

donde, a partir de (3) de la sección 10.2, se han reemplazado los contornos C_1 y C_2 por cualquier contorno cerrado simple C en D con z_0 en su interior. ❑

En el caso en que $a_{-k} = 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, la serie de Laurent (3) es una serie de Taylor. Debido a esto, una expansión de Laurent es una generalización de una serie de Taylor.

El dominio anular del teorema 11.10 definido por $r < |z - z_0| < R$ no necesita tener la forma de "anillo" ilustrada en la figura 11.7. Otros posibles dominios anulares son: *i)* $r = 0$, R finito; *ii)* $r \neq 0$, $R \to \infty$, y *iii)* $r = 0$, $R \to \infty$. En el primer caso, la serie converge en el dominio anular definido por $0 < |z - z_0| < R$, que corresponde al interior del círculo $|z - z_0| = R$, excepto el punto z_0. En el segundo caso, el dominio anular viene definido por $r < |z - z_0|$; en otras palabras, el dominio está formado por todos los puntos exteriores al círculo $|z - z_0| = r$. En el tercer caso, el dominio está definido por $0 < |z - z_0|$, lo que representa a todo el plano complejo exceptuando al punto z_0. La serie obtenida en (2) es válida para este último tipo de dominio.

En la práctica real, rara vez se utiliza la fórmula (4) para los coeficientes de una serie de Laurent. Como consecuencia, generalmente no es fácil hallar la serie de Laurent de una función en cierto dominio anular específico. A menudo se utilizan las series geométricas (5) y (6) de la sección 11.1 o, como se plantea en el ejemplo 1, otras series conocidas. Sin embargo, independientemente de la forma en que se obtiene una expansión de Laurent de una función f, aquélla es *la* serie de Laurent; esto es, la serie que se obtiene es única.

Ejemplo 2 Expansiones de Laurent

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para: *a)* $0 < |z| < 1$, *b)* $1 < |z|$, *c)* $0 < |z - 1| < 1$ y *d)* $1 < |z - 1|$.

Solución Los cuatro dominios anulares especificados se muestran en la figura 11.8. En los incisos *a)* y *b)*, se desea representar a f en una serie que involucre únicamente potencias enteras negativas y no negativas de z, mientras que en los incisos *c)* y *d)* se desea representar a f en una serie que contenga potencias enteras negativas y no negativas de $z - 1$.

a) Escribiendo $$f(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z},$$

se usa (5) de la sección 11.1:

$$f(z) = -\frac{1}{z}[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots].$$

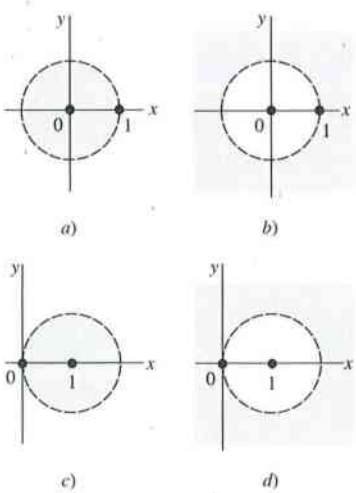


Figura 11.8 Dominios anulares para el ejemplo 2

La serie dentro de los corchetes converge para $|z| < 1$, pero una vez multiplicada por $1/z$, la serie resultante

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

b) Para obtener una serie que converja en $1 < |z|$ se comienza construyendo una serie que converja para $|1/z| < 1$. Con este objetivo, se reescribe la función f como

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{z}}$$

y se utiliza de nuevo (5) de la sección 11.1, reemplazando z por $1/z$:

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right].$$

La serie dentro de los corchetes converge para $|1/z| < 1$ o, en forma equivalente, para $1 < |z|$. Así, la serie de Laurent requerida es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots.$$

c) Aquí se tiene básicamente el mismo problema que en el inciso *a*), excepto porque se necesitan todas las potencias de $z - 1$. Para tal fin, se suma y se resta 1 en el denominador, y se aplica (6) de la sección 11.1 con z reemplazada por $z - 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1 - 1 + z)(z - 1)} \\ &= \frac{1}{z - 1}\frac{1}{1 + (z - 1)} \\ &= \frac{1}{z - 1}[1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \cdots] \\ &= \frac{1}{z - 1} - 1 + (z - 1) - (z - 1)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

La serie entre corchetes converge para $|z - 1| < 1$, por lo que esta última serie converge para $0 < |z - 1| < 1$.

d) Procediendo como en el inciso *b*) se escribe

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - 1}\frac{1}{1 + (z - 1)} = \frac{1}{(z - 1)^2}\frac{1}{1 + \frac{1}{z - 1}} \\ &= \frac{1}{(z - 1)^2}\left[1 - \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{(z - 1)^3} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{(z - 1)^3} + \frac{1}{(z - 1)^4} - \frac{1}{(z - 1)^5} + \cdots. \end{aligned}$$

Como la serie entre corchetes converge para $|1/(z - 1)| < 1$, la serie final converge para $1 < |z - 1|$. ❑

Ejemplo 3 Expansiones de Laurent

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{(z - 1)^2(z - 3)}$ en una serie de Laurent que sea válida para: *a*) $0 < |z - 1| < 2$ y *b*) $0 < |z - 3| < 2$.

Solución *a*) Al igual que en los incisos *c*) y *d*) del ejemplo 2, se requieren únicamente potencias de $z - 1$, por lo que se necesita expresar $z - 3$ en función de $z - 1$. Esto se consigue escribiendo

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{-2+(z-1)}$$

$$= \frac{-1}{2(z-1)^2}\frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}}$$

y entonces aplicando (5) de la sección 11.1 reemplazando z por $(z - 1)/2$:

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)^2}\left[1 + \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} + \frac{(z-1)^3}{2^3} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \cdots. \tag{12}$$

b) Para obtener potencias de $z - 3$ se escribe $z - 1 = 2 + (z - 3)$ y

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{z-3}[2+(z-3)]^{-2} = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{z-3}{2}\right]^{-2}.$$

En este punto se expande $\left[1 + \dfrac{z-3}{2}\right]^{-2}$ en una serie de potencias utilizando el teorema general de los binomios:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)}\left[1 + \frac{(-2)}{1!}\left(\frac{z-3}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{z-3}{2}\right)^3 + \cdots\right].$$

La serie binomial es válida para $|(z - 3)/2| < 1$, o $|z - 3| < 2$. Multiplicando esta serie por $1/4(z - 3)$ se tiene una serie de Laurent válida para $0 < |z - 3| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \cdots. \qquad \square$$

Ejemplo 4 Una expansión de Laurent

Expanda $f(z) = \dfrac{8z+1}{z(1-z)}$ en una serie de Laurent que sea válida para $0 < |z| < 1$.

Solución Aplicando (5) de la sección 11.1 se escribe

$$f(z) = \frac{8z+1}{z(1-z)} = \frac{8z+1}{z}\frac{1}{1-z} = \left(8 + \frac{1}{z}\right)(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots).$$

Posteriormente, se multiplica la serie por $8 + 1/z$ y se agrupan los términos similares

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 + 9z + 9z^2 + \cdots.$$

La serie geométrica converge para $|z| < 1$. Tras multiplicar por $8 + 1/z$, la serie de Laurent resultante es válida para $0 < |z| < 1$. $\square$

En los ejemplos anteriores, el punto en el centro del dominio anular de validez para cada serie de Laurent es una singularidad aislada de la función f. Reexaminando el teorema 11.10 se ve que esto no necesita ser así.

Ejemplo 5 Una expansión de Laurent

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para $1 < |z-2| < 2$.

Solución El dominio anular especificado se muestra en la figura 11.9. El centro de este dominio, $z = 2$, es un punto de analiticidad de la función f. El objetivo es encontrar dos series que contengan potencias enteras de $z-2$: una que converja en $1 < |z-2|$ y otra en $|z-2| < 2$. Para conseguir esto se comienza descomponiendo f en fracciones parciales:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = f_1(z) + f_2(z). \tag{13}$$

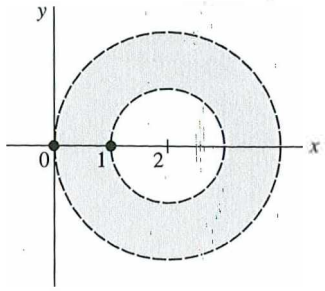


Figura 11.9 Dominio anular del ejemplo 5

A continuación, $f_1(z) = -\dfrac{1}{z} = -\dfrac{1}{2+z-2}$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-2}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{2^2} - \frac{(z-2)^3}{2^3} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots.$$

Esta serie converge en $|(z-2)/2| < 1$ o en $|z-2| < 2$. Por otra parte,

$$f_2(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z-2}}$$

$$= \frac{1}{z-2}\left[1 - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \cdots$$

converge en $|1/(z-2)| < 1$ o bien $1 < |z-2|$. Sustituyendo entonces estos dos resultados en (13) se obtiene

$$f(z) = \cdots - \frac{1}{(z-2)^4} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \cdots.$$

Esta representación es válida para $1 < |z-2| < 2$. ❑

Ejemplo 6 Una expansión de Laurent

Expanda $f(z) = e^{3/z}$ en una serie de Laurent que sea válida para $0 < |z|$.

Solución A partir de (12) de la sección 11.2 se sabe que para cualquier z finita,

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots. \tag{14}$$

Reemplazando en (14) z por $3/z$, con $z \neq 0$, se obtiene la serie de Laurent

$$e^{3/z} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \cdots.$$

Esta serie es válida para $0 < |z|$. ❑

Comentarios

En conclusión, se hace hincapié en un resultado que es de particular importancia para las secciones 11.5 y 11.6. Reemplazando la variable compleja s por el símbolo típico z, se observa que cuando $k = -1$ se tiene de la expresión (4) para los coeficientes de Laurent que

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$$

o, más importante, la integral puede escribirse como

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{15}$$

EJERCICIOS 11.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas del 1 al 6, expanda la función indicada en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

1. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$, $0 < |z|$
2. $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$, $0 < |z|$
3. $f(z) = e^{-1/z^2}$, $0 < |z|$
4. $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{z^2}$, $0 < |z|$
5. $f(z) = \dfrac{e^z}{z - 1}$, $0 < |z - 1|$
6. $f(z) = z \cos \dfrac{1}{z}$, $0 < |z|$

En los problemas del 7 al 12, expanda la función $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

7. $0 < |z| < 3$
8. $|z| > 3$
9. $0 < |z - 3| < 3$
10. $|z - 3| > 3$
11. $1 < |z - 4| < 4$
12. $1 < |z + 1| < 4$

En los problemas del 13 al 16, expanda la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

13. $1 < |z| < 2$
14. $|z| > 2$
15. $0 < |z - 1| < 1$
16. $0 < |z - 2| < 1$

En los problemas del 17 al 20, expanda la función $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

17. $0 < |z + 1| < 3$
18. $|z + 1| > 3$
19. $1 < |z| < 2$
20. $0 < |z - 2| < 3$

En los problemas 21 y 22, expanda la función $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)^2}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

21. $0 < |z| < 1$
22. $|z| > 1$

En los problemas 23 y 24, expanda la función $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)^3}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

23. $0 < |z - 2| < 1$
24. $0 < |z - 1| < 1$

En los problemas 25 y 26, expanda la función $f(z) = \dfrac{7z - 3}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

25. $0 < |z| < 1$
26. $0 < |z - 1| < 1$

En los problemas 27 y 28, expanda la función $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$ en una serie de Laurent que sea válida para el dominio anular propuesto.

27. $1 < |z - 1|$
28. $0 < |z - 2|$

11.4 Ceros y polos

Introducción Supóngase que $z = z_0$ es una singularidad aislada de una función f y que

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \tag{1}$$

es la representación de f como serie de Laurent válida para el disco abierto perforado $0 < |z - z_0| < R$. La sección anterior plantea que una serie de Laurent (1) está compuesta por dos partes. La parte de la serie (1) que tiene potencias negativas de $z - z_0$, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} \tag{2}$$

es la **parte principal** de la serie. En la siguiente argumentación se asignan diferentes nombres a la singularidad aislada $z = z_0$ según el número de términos de la parte principal.

Clasificación de los puntos singulares aislados Un punto singular aislado $z = z_0$ de una función compleja f se clasifica dependiendo de si la parte principal (2) de su expansión de Laurent (1) contiene cero, un número finito o un número infinito de términos.

i) Si la parte principal es cero, esto es, *todos* los coeficientes a_{-k} de (2) son cero, entonces $z = z_0$ se denomina una **singularidad removible**.

ii) Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ se denomina un **polo**. Si, para este caso, el último coeficiente no nulo de (2) es a_{-n}, donde $n \geq 1$, se dice entonces que $z = z_0$ es un **polo de orden n**. Si $z = z_0$ es un polo de orden 1, entonces la parte principal (2) contiene exactamente un término de coeficiente a_{-1}. A un polo de orden 1 se le conoce comúnmente como **polo simple**.

iii) Si la parte principal (2) contiene un número infinito de términos no nulos, entonces $z = z_0$ se denomina **singularidad esencial**.

La siguiente tabla sintetiza la forma de la serie de Laurent para una función f cuando $z = z_0$ es uno de los tipos anteriores de singularidad aislada. Desde luego, el valor de R en dicha tabla podría ser de ∞.

$z = z_0$	**Serie de Laurent**
Singularidad removible	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Polo de orden n	$\dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dfrac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Polo simple	$\dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Singularidad esencial	$\cdots + \dfrac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$

Ejemplo 1 Discontinuidad removible

Procediendo como en (2) de la sección 11.3, se observa de

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \tag{2}$$

que $z = 0$ es una singularidad removible de la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$. ❑

Si una función f tiene una singularidad removible en el punto $z = z_0$, entonces siempre es posible encontrar una definición apropiada para el valor de $f(z_0)$ de manera que f resulte analítica en el punto. Por ejemplo, como el lado derecho de (2) es 1 en $z = 0$, tiene sentido definir $f(0) = 1$. Con esta definición, la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ del ejemplo 1 es ahora analítica en $z = 0$.

Ejemplo 2 Polos y singularidad esencial

a) De

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \overbrace{\frac{1}{z}}^{\text{parte principal}} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots,$$

para $0 < |z|$, se observa que $a_{-1} \neq 0$, por lo que $z = 0$ es un polo simple de la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^2$. La función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z^3$ representada por la serie (2) de la sección 11.3 tiene un polo de orden 2 en $z = 0$.

b) En el ejemplo 3 de la sección 11.3 se muestra que la expansión de Laurent de $f(z) = 1/(z-1)^2(z-3)$, que es válida para $0 < |z-1| < 2$, es

$$f(z) = \overbrace{-\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}}^{\text{parte principal}} - \frac{1}{8} - \frac{z-1}{16} - \cdots.$$

Como $a_{-2} \neq 0$ se concluye que $z = 1$ es un polo de orden 2.

c) Se observa de la serie de Laurent del ejemplo 6 de la sección 11.3 que la parte principal de la función $f(z) = e^{3/z}$ contiene un número infinito de términos. Así, $z = 0$ es una singularidad esencial. ❑

En el inciso *b*) del ejemplo 2 de la sección 11.3, se muestra que la representación como serie de Laurent de $f(z) = 1/z(z-1)$, que es válida para $1 < |z|$, es

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots.$$

El punto $z = 0$ es una singularidad aislada de f y la serie de Laurent contiene un número infinito de términos con potencias enteras negativas de z. ¿Significa esto que $z = 0$ es una singularidad esencial de f? La respuesta es no. Para esta función en particular, se observa de la revisión de (1) que la serie de Laurent en la que estamos interesados es la que tiene un dominio anular $0 < |z| < 1$. Del inciso *a*) del mismo ejemplo se tiene que

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

es válida para $0 < |z| < 1$. De esta manera se ve que $z = 0$ es un polo simple.

Ceros Recuérdese que z_0 es un **cero** de una función f si $f(z_0) = 0$. Una función analítica f tienen un **cero de orden *n*** en $z = z_0$ si

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad f''(z_0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad \text{pero } f^{(n)}(z_0) \neq 0. \tag{3}$$

Por ejemplo, para $f(z) = (z-5)^3$ se observa que $f(5) = 0, f'(5) = 0, f''(5) = 0$, pero $f'''(5) = 6$. Por ello, $z = 5$ es un cero de orden 3. Si una función analítica f tiene un cero de orden n en $z = z_0$, se concluye de (3) que la expansión de f como serie de Taylor centrada en z_0 debe tener la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + a_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + \cdots \\ &= (z-z_0)^n[a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + \cdots], \end{aligned}$$

donde $a_n \neq 0$.

Ejemplo 3 Orden de un cero

La función analítica $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$ tiene un cero en $z = 0$. Reemplazando z por z^2 en (13) de la sección 11.2 se obtiene

$$\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \cdots$$

y entonces $$f(z) = z \operatorname{sen} z^2 = z^3\left[1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \cdots\right].$$

Por lo tanto, $z = 0$ es un cero de orden 3. ❑

Un cero z_0 de una función analítica no trivial f está *aislado* en el sentido de que existe alguna vecindad de z_0 para la cual $f(z) \neq 0$ en cualquier punto z de dicha vecindad, excepto en $z = z_0$. Como consecuencia, si z_0 es un cero de una función analítica no trivial f, entonces la función $1/f(z)$ tiene una singularidad aislada en el punto $z = z_0$. El siguiente resultado permite, en algunas circunstancias, determinar los polos de una función por simple inspección.

TEOREMA 11.11 Polo de orden n

Si las funciones f y g son analíticas en $z = z_0$ y f tiene un cero de orden n en $z = z_0$ y $g(z_0) \neq 0$, entonces la función $F(z) = g(z)/f(z)$ tiene un polo de orden n en $z = z_0$.

Ejemplo 4 Orden de los polos

a) Inspeccionando la función racional

$$F(z) = \frac{2z + 5}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)^4}$$

se observa que el denominador tiene ceros de orden 1 en $z = 1$ y $z = -5$, así como un cero de orden 4 en $z = 2$. Como el numerador no es cero en dichos puntos, se tiene del teorema 11.11 que f tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -5$, y un polo de orden 4 en $z = 2$.

b) En el ejemplo 3 se plantea que $z = 0$ es un cero de orden 3 de $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$. Del teorema 11.11 se concluye que la función $F(z) = 1/(z \operatorname{sen} z^2)$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$. ❑

De la argumentación anterior, debería ser intuitivamente claro que si una función tiene un polo en $z = z_0$, entonces $|f(z)| \to \infty$ cuando $z \to z_0$ desde cualquier dirección.

EJERCICIOS 11.4 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas 1 y 2, demuestre que $z = 0$ es una singularidad removible de la función indicada. Proporcione asimismo una definición de $f(0)$ tal que f sea analítica en $z = 0$.

1. $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} 4z - 4z}{z^2}$

En los problemas del 3 al 8, determine los ceros y sus órdenes para la función indicada.

3. $f(z) = (z + 2 - i)^2$

4. $f(z) = z^4 - 16$

5. $f(z) = z^4 + z^2$

6. $f(z) = z + \dfrac{9}{z}$

7. $f(z) = e^{2z} - e^z$

8. $f(z) = \operatorname{sen}^2 z$

En los problemas del 9 al 12, el número proporcionado es un cero de la función indicada. Utilice una serie de Maclaurin o de Taylor para determinar el orden del cero.

9. $f(z) = z(1 - \cos z^2)$; $z = 0$

10. $f(z) = z - \operatorname{sen} z$; $z = 0$

11. $f(z) = 1 - e^{z^{-1}}$; $z = 1$

12. $f(z) = 1 - \pi i + z + e^{z}$; $z = \pi i$

En los problemas del 13 al 22, determine el orden de los polos para la función indicada.

13. $f(z) = \dfrac{3z - 1}{z^2 + 2z + 5}$

14. $f(z) = 5 - \dfrac{6}{z^2}$

15. $f(z) = \dfrac{1 + 4i}{(z + 2)(z + i)^4}$

16. $f(z) = \dfrac{z - 1}{(z + 1)(z^3 + 1)}$

17. $f(z) = \tan z$

18. $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2}$

19. $f(z) = \dfrac{1 - \cosh z}{z^4}$

20. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$

21. $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$

22. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2 - z}$

23. Determine si $z = 0$ es una singularidad aislada o no aislada de $f(z) = \tan(1/z)$.

24. Demuestre que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = z^3 \operatorname{sen}(1/z)$.

11.5 Residuos y teorema del residuo

■ **Introducción** En la anterior sección se plantea que si la función compleja f tiene una *singularidad aislada* en el punto z_0, entonces f posee una representación como serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

que converge para cualquier z *cercano a* z_0. Particularmente, dicha representación es válida en cierta vecindad de z_0, excluyendo al propio z_0, o disco abierto perforado, $0 < |z - z_0| < R$. La presente sección se centra en el coeficiente a_{-1} y en su importancia para el cálculo de integrales de contorno.

■ **Residuo** El coeficiente a_{-1} de $1/(z - z_0)$, de la serie de Laurent indicada anteriormente, se denomina **residuo** de la función f en la singularidad aislada z_0. Se utiliza entonces la notación

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), z_0)$$

para denotar el residuo de f en z_0. Es conveniente recordar que si la parte principal de la serie de Laurent que es válida para $0 < |z - z_0| < R$ contiene un número finito de términos, siendo a_{-n}, el último coeficiente no nulo, entonces z_0 es un polo de orden n; si la parte principal de la serie contiene un número infinito de términos con coeficientes no nulos, entonces z_0 es una singularidad esencial.

Ejemplo 1 Residuos

a) En el ejemplo 2 de la sección 11.4 se plantea que $z = 1$ es un polo de orden 2 de la función $f(z) = 1/(z - 1)^2(z - 3)$. De la serie de Laurent indicada en dicho ejemplo se observa que el coeficiente de $1/(z - 1)$ es $a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), 1) = -\frac{1}{4}$.

b) El ejemplo 6 de la sección 11.3 plantea que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = e^{3/z}$. De la serie de Laurent indicada en dicho ejemplo se observa que el coeficiente de $1/z$ es $a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), 0) = 3$. ❑

Más adelante en esta sección se muestra por qué el coeficiente a_{-1} es tan importante. Mientras tanto se examinarán formas de obtener este número complejo cuando z_0 sea un *polo* de la función f sin necesidad de expandir f en una serie de Laurent en z_0. Se comienza con el residuo en un polo simple.

TEOREMA 11.12 Residuo en un polo simple

Si f tiene un polo simple en $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{1}$$

Demostración Como $z = z_0$ es un polo simple, la expansión de Laurent de f alrededor de este punto tiene la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots.$$

multiplicando ambos lados por $z - z_0$ y tomando entonces el límite cuando $z \to z_0$, se obtiene $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots] = a_{-1} = \text{Res}(f(z), z_0)$. ❑

TEOREMA 11.13 Residuo en un polo de orden n

Si f tiene un polo de orden n en $z = z_0$, entonces

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z). \tag{2}$$

Demostración Como se considera que f tiene un polo de orden n, la expresión correspondiente para su expansión de Laurent en $0 < |z - z_0| < R$ debe tener la forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots.$$

Multiplicando esta última expresión por $(z - z_0)^n$:

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \cdots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots$$

y derivando entonces $n - 1$ veces:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) = (n-1)! a_{-1} + n! a_0(z - z_0) + \cdots. \tag{3}$$

Como todos los términos del lado derecho que siguen al primero contienen potencias enteras positivas de $z - z_0$, el límite de (3) cuando $z \to z_0$ es

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) = (n-1)! a_{-1}.$$

Despejando a_{-1} de esta última ecuación se obtiene (2). ❑

Obsérvese que (2) se reduce a (1) cuando $n = 1$.

Ejemplo 2 Residuo en un polo

La función $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ tiene un polo simple en $z = 3$ y un polo de orden 2 en $z = 1$. Utilice los teoremas 11.12 y 11.13 para encontrar los residuos.

Solución Como $z = 3$ es un polo simple, se utiliza (1):

$$\text{Res}(f(z), 3) = \lim_{z\to 3}(z - 3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ahora, en el polo de orden 2 se tiene de (2) que

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), 1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2 f(z)\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-3}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

❑

Cuando f no es una función racional, el cálculo de los residuos por medio de (1) en algunas ocasiones puede ser tedioso. Sin embargo, es posible crear fórmulas alternativas para el residuo. En particular, supóngase que una función f se escribe como un cociente $f(z) = g(z)/h(z)$, donde g y h son analíticas en $z = z_0$. Si $g(z_0) \neq 0$ y si la función h tiene un cero de orden 1 en z_0, entonces f tiene un polo simple en $z = z_0$ y

Un método alternativo para calcular un residuo en un polo simple.

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{4}$$

Para ver este último resultado, se emplea (1), y el hecho de que $h(z_0) = 0$ y que el $\lim_{z\to z_0}(h(z) - h(z_0))/(z - z_0)$ es una definición de la derivada $h'(z_0)$:

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Para residuos en polos de orden mayor que 1, las fórmulas análogas son complicadas, razón por la que no se indican aquí.

Ejemplo 3 Empleo de (4) para el cálculo de un residuo

El polinomio $z^4 + 1$ puede factorizarse como $(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$, donde z_1, z_2, z_3 y z_4 son las cuatro raíces distintas de la ecuación $z^4 + 1 = 0$. Del teorema 11.11 se deduce que la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

tiene cuatro polos simples. Así, de (10) de la sección 9.2 se tiene que $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{5\pi i/4}$, $z_4 = e^{7\pi i/4}$. Para calcular los residuos, se utilizan (4) y la fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), z_1) &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i\\ \text{Res}(f(z), z_2) &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i\\ \text{Res}(f(z), z_3) &= \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{-15\pi i/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i\\ \text{Res}(f(z), z_4) &= \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{-21\pi i/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i.\end{aligned}$$

❑

Teorema del residuo En este punto se llega a la justificación de la importancia del concepto de residuo. El siguiente teorema establece que, en ciertas circunstancias, se pueden calcular integrales complejas $\oint_C f(z)\,dz$ sumando los residuos en las singularidades aisladas de f dentro del contorno cerrado C.

TEOREMA 11.14 Teorema del residuo de Cauchy

Sea D un dominio simplemente conexo y C un contorno cerrado simple que se halla completamente dentro de D. Si una función f es analítica sobre y en el interior de C, excepto en un número finito de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots, z_n$ del interior de C, entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k). \tag{5}$$

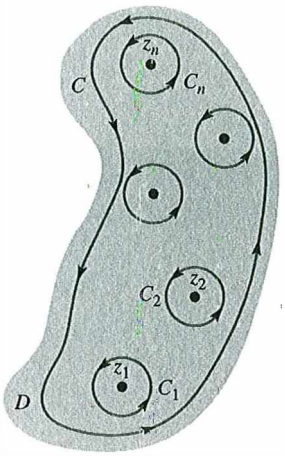


Figura 11.10 n puntos singulares en el interior del contorno C

Demostración Supóngase que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son círculos centrados en $z_1, z_2, \ldots, z_n$, respectivamente, y que cada círculo C_k tiene un radio r_k lo suficientemente pequeño como para que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sean mutuamente disjuntos e interiores a la curva cerrada simple C; véase la figura 11.10. Recordando que (15) de la sección 11.3 implica que $\oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f(z), z_k)$, el teorema 10.5 lleva entonces a

$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k). \qquad \square$$

Ejemplo 4 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\oint_C \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$, donde

a) el contorno C es el rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$; *b*) el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución *a*) Puesto que los polos $z = 1$ y $z = 3$ yacen dentro del cuadrado, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i[\text{Res}(f(z), 1) + \text{Res}(f(z), 3)].$$

Estos residuos están calculados en los ejemplos 2 y 3, por lo que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] = 0.$$

b) Como únicamente el polo $z = 1$ yace dentro del círculo $|z| = 2$, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f(z), 1) = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}i. \qquad \square$$

Ejemplo 5 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\oint_C \dfrac{2z+6}{z^2+4}\,dz$, donde el contorno C es el círculo $|z - i| = 2$.

Solución Escribiendo $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$ se observa que el integrando tiene polos simples en $-2i$ y $2i$. Ahora, como únicamente $2i$ se halla en el interior del contorno C, se tiene de (5) que

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f(z), 2i).$$

Pero
$$\text{Res}(f(z), 2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i) \frac{2z + 6}{(z - 2i)(z + 2i)}$$
$$= \frac{6 + 4i}{4i} = \frac{3 + 2i}{2i}.$$

Por lo tanto,
$$\oint_C \frac{2z + 6}{z^2 + 4} dz = 2\pi i \left(\frac{3 + 2i}{2i} \right) = \pi(3 + 2i). \quad \square$$

Ejemplo 6 Cálculo por medio del teorema del residuo

Calcule $\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución Como $z^4 + 5z^3 = z^3(z + 5)$, se ve que el integrando tiene un polo de orden 3 en $z = 0$ y un polo simple en $z = -5$. Ya que únicamente $z = 0$ se halla en el interior del contorno indicado, se tiene de (5) y (2) que

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz = 2\pi i \, \text{Res}(f(z), 0)$$
$$= 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 \frac{e^z}{z^3(z + 5)}$$
$$= \pi i \lim_{z \to 0} \frac{(z^2 + 8z + 17)e^z}{(z + 5)^3} = \frac{17\pi}{125} i. \quad \square$$

Ejemplo 7 Cálculo por el teorema del residuo

Calcule $\oint_C \tan z \, dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 2$.

Solución El integrando $\tan z = \text{sen } z/\cos z$ tiene polos simples en los puntos donde $\cos z = 0$. En la sección 9.7 se establece que los únicos ceros para $\cos z$ son los números reales $z = (2n + 1)\pi/2$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Como sólo $-\pi/2$ y $\pi/2$ se hallan en el interior del círculo $|z| = 2$, se tiene que

$$\oint_C \tan z \, dz = 2\pi i \left[\text{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) + \text{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right) \right].$$

Ahora, de (4) haciendo $g(z) = \text{sen } z$, $h(z) = \cos z$ y $h'(z) = -\text{sen } z$, se observa que

$$\text{Res}\left(f(z), -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}(-\pi/2)}{-\text{sen}(-\pi/2)} = -1 \quad \text{y} \quad \text{Res}\left(f(z), \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{sen}(\pi/2)}{-\text{sen}(\pi/2)} = -1.$$

Por lo tanto,
$$\oint_C \tan z \, dz = 2\pi i[-1 - 1] = -4\pi i. \quad \square$$

Ejemplo 8 Cálculo por el teorema del residuo

Calcule $\oint_C e^{3/z} dz$, donde el contorno C es el círculo $|z| = 1$.

Solución Como se ha visto, $z = 0$ es una singularidad esencial del integrando $f(z) = e^{3/z}$, por lo que ni la fórmula (1) ni la (2) son aplicables para encontrar el residuo de f en dicho punto. Sin embargo, en el ejemplo 1 se plantea que la serie de Laurent de f en $z = 0$ resulta en $\text{Res}(f(z), 0) = 3$. Por lo tanto, de (5) se tiene

$$\oint_C e^{3/z} dz = 2\pi i \, \text{Res}(f(z), 0) = 6\pi i. \quad \square$$

Comentarios

En la aplicación de las fórmulas en el límite (1) y (2) para el cálculo de residuos, puede obtenerse la forma indeterminada 0/0. Aunque no se va a demostrar aquí, debe resaltarse que la **regla de L'Hôpital** es válida en el análisis complejo. Si $f(z) = g(z)/h(z)$, donde g y h son analíticas en $z = z_0$, $g(z_0) = 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)}.$$

EJERCICIOS 11.5 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas del 1 al 6, utilice una serie de Laurent para encontrar el residuo indicado.

1. $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z+4)}$; $\text{Res}(f(z), 1)$
2. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$; $\text{Res}(f(z), 0)$
3. $f(z) = \dfrac{4z-6}{z(2-z)}$; $\text{Res}(f(z), 0)$
4. $f(z) = (z+3)^2 \operatorname{sen} \dfrac{2}{z+3}$; $\text{Res}(f(z), -3)$
5. $f(z) = e^{-2/z^2}$; $\text{Res}(f(z), 0)$
6. $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-2)^2}$; $\text{Res}(f(z), 2)$

En los problemas del 7 al 16, utilice (1), (2) o (4) para encontrar el residuo en cada polo de la función proporcionada.

7. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+16}$
8. $f(z) = \dfrac{4z+8}{2z-1}$
9. $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^3-2z^2}$
10. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2}$
11. $f(z) = \dfrac{5z^2-4z+3}{(z+1)(z+2)(z+3)}$
12. $f(z) = \dfrac{2z-1}{(z-1)^4(z+3)}$
13. $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$
14. $f(z) = \dfrac{e^z}{e^z-1}$
15. $f(z) = \sec z$
16. $f(z) = \dfrac{1}{z \operatorname{sen} z}$

En los problemas del 17 al 20 utilice, donde sea apropiado, el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada a la largo de los contornos indicados.

17. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}\,dz$

    a) $|z| = \frac{1}{2}$ *b*) $|z| = \frac{3}{2}$ *c*) $|z| = 3$

18. $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)}\,dz$

    a) $|z| = 1$ *b*) $|z-2i| = 1$ *c*) $|z-2i| = 4$

19. $\displaystyle\oint_C z^3 e^{-1/z^2}\,dz$

    a) $|z| = 5$ *b*) $|z+i| = 2$ *c*) $|z-3| = 1$

20. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z \operatorname{sen} z}\,dz$

    a) $|z-2i| = 1$ *b*) $|z-2i| = 3$ *c*) $|z| = 5$

En los problemas del 21 al 32, utilice el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada a lo largo del contorno indicado.

21. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4z+13}\,dz$, C: $|z-3i| = 3$
22. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4}\,dz$, C: $|z-2| = 3/2$
23. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$, C: $|z| = 2$
24. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z+1)(z^2+1)}\,dz$, siendo C la elipse $16x^2 + y^2 = 4$
25. $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}\,dz$, C: $|z| = 2$
26. $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}\,dz$, C: $|z| = 3$
27. $\displaystyle\oint_C \frac{\tan z}{z}\,dz$, C: $|z-1| = 2$
28. $\displaystyle\oint_C \frac{\cot \pi z}{z^2}\,dz$, C: $|z| = \frac{1}{2}$
29. $\displaystyle\oint_C \cot \pi z\,dz$, siendo C el rectángulo definido por $x = \frac{1}{2}$, $x = \pi$, $y = -1$, $y = 1$
30. $\displaystyle\oint_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)}\,dz$, siendo C el rectángulo definido por $x = -2$, $x = 1$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$
31. $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz} + \operatorname{sen} z}{(z-\pi)^4}\,dz$, C: $|z-3| = 1$
32. $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^2(z^2+9)}\,dz$, C: $|z-1| = 1$

11.6 Cálculo de integrales reales

■ **Introducción** En esta sección se plantea cómo utilizar la teoría de residuos para calcular integrales *reales* como las siguientes:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\, dx, \tag{3}$$

donde F en (1) y f en (2) y (3) son funciones racionales. Para la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ en (2) y (3) se considera que los polinomios p y q no tienen factores en común.

■ **Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$** La idea básica consiste en convertir una integral de la forma (1) en una integral compleja donde el contorno C sea un círculo unitario centrado en el origen. Este contorno se parametriza por medio de $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Utilizando

$$dz = ie^{i\theta}\, d\theta, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

se reemplazan $d\theta$, $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ por, respectivamente, por

$$d\theta = \frac{dz}{iz}, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}(z + z^{-1}), \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}(z - z^{-1}). \tag{4}$$

La integral (1) se convierte entonces en

$$\oint_C F\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1}), \frac{1}{2i}(z - z^{-1})\right)\frac{dz}{iz},$$

donde C es $|z| = 1$.

Ejemplo 1 Una integral trigonométrica real

Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}\, d\theta.$

Solución Utilizando las sustituciones en (4) y simplificando posteriormente se llega a la integral de contorno

$$\frac{4}{i}\oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz.$$

Con la ayuda de la fórmula cuadrática se escribe

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{z}{(z - z_0)^2(z - z_1)^2},$$

donde $z_0 = -2 - \sqrt{3}$ y $z_1 = -2 + \sqrt{3}$. Como únicamente z_1 se halla en el interior del círculo unitario C, se tiene que

$$\oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), z_1).$$

Ahora, z_1 es un polo de orden 2, por lo que de (2) de la sección 11.5,

$$\text{Res}(f(z), z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz}(z - z_1)^2 f(z) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \frac{z}{(z - z_0)^2}$$

$$= \lim_{z \to z_1} -\frac{z + z_0}{(z - z_0)^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{4}{i} \oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\, dz = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \,\text{Res}(f(z), z_1) = \frac{4}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

y finalmente $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2 + \cos\theta)^2}\, d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$ ❑

■ **Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$** Cuando f es continua en $(-\infty, \infty)$ conviene recordar de cálculo que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ se define en función de dos límites particulares:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{0} f(x)\, dx + \lim_{R \to \infty} \int_{0}^{R} f(x)\, dx. \tag{5}$$

Si existen ambos límites de (5) se dice que la integral es **convergente**; si uno o ambos límites no existen, la integral es **divergente**. En el caso de que se conozca *(a priori)* que una integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ converge, ésta se calcula procesando un único límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx. \tag{6}$$

Es importante notar que el límite simétrico de (6) puede existir aunque la integral impropia sea divergente. Por ejemplo, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx$ es diveregente puesto que $\lim_{R \to \infty} \int_0^R x\, dx = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2}R^2 = \infty$. Sin embargo, utilizando (6) se obtiene

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} x\, dx = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2} \right] = 0. \tag{7}$$

El límite en (6) se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral y se escribe

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

En (7) se muestra que V.P. $\int_{-\infty}^{\infty} x\, dx = 0$. En síntesis, cuando una integral de la forma (2) converge, su valor principal de Cauchy es el mismo que el valor de la integral. Si la integral diverge, puede tener todavía un valor principal de Cauchy.

Para calcular una integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, donde $f(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, por medio de teoría de residuos se reemplaza x por la variable compleja z y se integra la función compleja f sobre un contorno cerrado C compuesto por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje real y por un semicírculo C_R de radio lo suficientemente grande para abarcar todos los polos de $f(z) = P(z)/Q(z)$ en el semiplano superior $\text{Re}(z) > 0$; véase la figura 11.11. Por medio del teorema 11.14 se tiene

$$\oint_C f(z)\, dz = \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k),$$

donde z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, denota los polos del semiplano superior. Si se demuestra que la integral $\int_{C_R} f(z)\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$ se tiene entonces que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f(z), z_k). \tag{8}$$

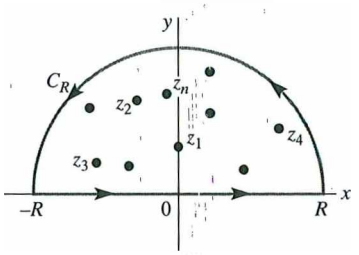


Figura 11.11 Contorno cerrado C compuesto por el semicírculo C_R y el intervalo $[-R, R]$

Ejemplo 2 V.P. de Cauchy para una integral impropia

Calcule el valor principal de Cauchy para

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx.$$

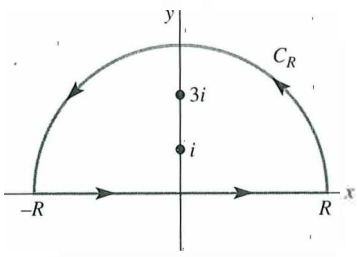


Figura 11.12 Contorno cerrado C del ejemplo 2

Solución Sea $f(z) = 1/(z^2 + 1)(z^2 + 9)$. Como

$$(z^2 + 1)(z^2 + 9) = (z - i)(z + i)(z - 3i)(z + 3i),$$

se plantea que C sea el contorno cerrado formado por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje x y el semicírculo C_R de radio $R > 3$. Como se observa de la figura 11.12,

$$\oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}\, dz$$

$$= I_1 + I_2$$

e

$$I_1 + I_2 = 2\pi i[\text{Res}(f(z), i) + \text{Res}(f(z), 3i)].$$

En los polos simples $z = i$ y $z = 3i$ se encuentran, respectivamente,

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{1}{16i} \quad \text{y} \quad \text{Res}(f(z), 3i) = -\frac{1}{48i},$$

de forma que

$$I_1 + I_2 = 2\pi i\left[\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right] = \frac{\pi}{12}. \tag{9}$$

Ahora se desea que $R \to \infty$ en (9). Antes de hacer esto se observa que en C_R,

$$|(z^2 + 1)(z^2 + 9)| = |z^2 + 1||z^2 + 9| \geq |\,|z|^2 - 1|\,|\,|z|^2 - 9| = (R^2 - 1)(R^2 - 9),$$

por lo que de la desigualdad ML de la sección 10.1 se escribe

$$|I_2| = \left| \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}\, dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)(R^2 - 9)}.$$

Este último resultado muestra que $|I_2| \to 0$ cuando $R \to \infty$, de lo cual se concluye que $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$. De (9) se deduce que $\lim_{R\to\infty} I_1 = \pi/12$; en otras palabras,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx = \frac{\pi}{12} \quad \text{o} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\, dx = \frac{\pi}{12}. \square$$

Usualmente es tedioso tener que mostrar que la integral de contorno a lo largo de C_R tiende a cero cuando $R \to \infty$. Las siguientes son condiciones suficientes para que esto sea siempre cierto:

TEOREMA 11.15 Comportamiento de la integral cuando $R \to \infty$

Supóngase $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde el grado de $P(z)$ es n y el de $Q(z)$ es $m \geq n + 2$. Si C_R es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces $\int_{C_R} f(z)\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

En otras palabras, la integral a lo largo de C_R tiende a cero cuando $R \to \infty$ si el denominador de f es de una potencia mayor que la del numerador en por lo menos dos unidades. La demostración de esto se desarrolla de la misma forma que en el ejemplo 2. Obsérvese en dicho ejemplo que las condiciones estipuladas en el teorema 11.15 se satisfagan, puesto que el grado de $P(z) = 1$ es 0 y el de $Q(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 9)$ es 4.

Ejemplo 3 V.P. de Cauchy para una integral impropia

Calcule el valor principal de Cauchy para $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$.

Solución Inspeccionando el integrando se observa que se satisfacen las condiciones dadas en el teorema 11.15. Asimismo, del ejemplo 3 de la sección 11.5 se sabe que el semiplano superior f tiene polos simples en $z_1 = e^{\pi i/4}$ y $z_2 = e^{3\pi i/4}$. También se obtiene en dicho ejemplo que los residuos en estos polos son

$$\text{Res}(f(z), z_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i \quad \text{y} \quad \text{Res}(f(z), z_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$

Así, por (8),

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx = 2\pi i[\text{Res}(f(z), z_1) + \text{Res}(f(z), z_2)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \qquad \square$$

Integrales de las formas $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ o $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx$

Se plantean integrales de este tipo al estudiar las transformadas de Fourier en la sección 7.4, por lo que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx$, donde $\alpha > 0$, se conocen como **integrales de Fourier**, las cuales aparecen como las partes real e imaginaria de la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx$. Utilizando la fórmula de Euler $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x\, dx \qquad (10)$$

siempre que ambas integrales del lado derecho converjan. Cuando $f(x) = P(x)/Q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$ se pueden calcular las dos integrales al mismo tiempo considerando la integral $\int_C f(z)e^{i\alpha z}\, dz$, donde $\alpha > 0$ y el contorno C de nuevo está formado por el intervalo $[-R, R]$ sobre el eje real y por un contorno semicircular C_R de radio lo suficientemente grande como para abarcar a los polos de $f(z)$ en el semiplano superior.

Antes de proceder se indican, sin demostrar, las condiciones que son suficientes para que la integral de contorno a lo largo de C_R tienda a cero cuando $R \to \infty$:

TEOREMA 11.16 Comportamiento de la integral cuando $R \to \infty$

Supóngase $f(z) = P(z)/Q(z)$, donde el grado de $P(z)$ es n y el de $Q(z)$ es $m \geq n + 1$. Si C_R es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ y $\alpha > 0$, entonces $\int_{C_R} (P(z)/Q(z))e^{i\alpha z}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$.

Ejemplo 4 Uso de la simetría

Calcule el valor principal de Cauchy para $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx$.

Solución Obsérvese en primer lugar que los límites de integración no son de $-\infty$ a ∞ como el método requiere. Esto se corrige observando que el integrando es una función impar de x, por lo que se puede escribir

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9}\, dx. \qquad (11)$$

Con $\alpha = 1$ se forma ahora la integral de contorno

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz}\, dz,$$

donde C es el mismo contorno mostrado en la figura 11.12. Por el teorema 11.14,

$$\int_{C_R} \frac{z}{z^2+9} e^{iz}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+9} e^{ix}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i),$$

donde $f(z) = z/(z^2 + 9)$. De (4) de la sección 11.5,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i) = \left.\frac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{2}.$$

Así pues, considerando el teorema 11.16 se concluye que $\int_{C_R} f(z)e^{iz}\, dz \to 0$ cuando $R \to \infty$ por lo que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix}\, dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-3}}{2}\right) = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Pero por (10),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9}\, dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Igualando las partes real e imaginaria de la línea anterior se obtiene el resultado adicional

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+9} dx = 0 \quad \text{junto con} \quad \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{e^3}.$$

Finalmente, tomando en cuenta (11) se obtiene el valor de la integral prescrita:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \text{ V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{2e^3}. \qquad \square$$

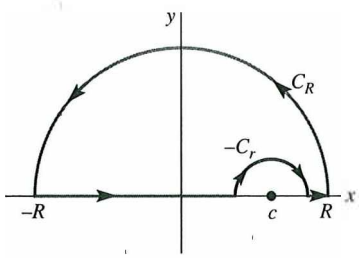


Figura 11.13 Contorno mellado

Contornos mellados Las integrales impropias de la forma (2) y (3) consideradas hasta este momento son continuas en el intervalo $[-\infty, \infty]$. En otras palabras, la función compleja $f(z) = P(z)/Q(z)$ no ha tenido polos sobre el eje real. En el caso de que f tenga polos en el eje real, se debe modificar el procedimiento empleado en los ejemplos del 2 al 4. Por ejemplo, para calcular $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ por residuos cuando $f(z)$ tiene un polo en $z = c$, siendo c un número real, se usa un **contorno mellado** tal como se ilustra en la figura 11.13. El símbolo C_r denota un contorno semicircular centrado en $z = c$ y orientado en la dirección *positiva*. El siguiente teorema es importante para esta argumentación.

TEOREMA 11.17 Comportamiento de la integral cuando $r \to 0$

Supóngase que f tiene un polo simple $z = c$ sobre el eje real. Si C_r es el contorno definido por $z = c + re^{i\theta}$, donde $0 \le \theta \le \pi$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)\, dz = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

Demostración Como f tiene un polo simple en $z = c$, su serie de Laurent es

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z),$$

donde $a_{-1} = \operatorname{Res}(f(z), c)$ y g es analítica en c. Utilizando la serie de Laurent y la parametrización de C_r se tiene

$$\int_{C_r} f(z)\, dz = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta + ir\int_0^{\pi} g(c + re^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta = I_1 + I_2. \qquad (12)$$

Primero, se observa que

$$I_1 = a_{-1}\int_0^{\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = a_{-1}\int_0^{\pi} i\, d\theta = \pi i a_{-1} = \pi i \operatorname{Res}(f(z), c).$$

Después, g es analítica en c y por lo tanto es continua en dicho punto y acotada en una vecindad del mismo; esto es, existe un $M > 0$ para el cual $|g(c + re^{i\theta})| \leq M$. Por lo tanto,

$$|I_2| = \left| ir \int_0^{\pi} g(c + re^{i\theta}) e^{i\theta}\, d\theta \right| \leq r \int_0^{\pi} M\, d\theta = \pi r M.$$

De esta última desigualdad se deduce que $\lim_{r\to 0}|I_2| = 0$ y en consecuencia $\lim_{r\to 0} I_2 = 0$. El teorema se demuestra calculando el límite de (12) cuando $r \to 0$. ❑

Ejemplo 5 Uso de un contorno mellado

Calcule el valor principal de Cauchy para $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx$.

Solución Como la integral es de la forma (3), se considera la integral de contorno $\oint_C e^{iz}\, dz/z(z^2 - 2z + 2)$. La función $f(z) = 1/z(z^2 - 2z + 2)$ tiene polos simples en $z = 0$ y en $z = 1 + i$ en el semiplano superior. El contorno C mostrado en la figura 11.14 está mellado en el origen. Adoptando una notación obvia se tiene

$$\oint_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i), \qquad (13)$$

donde $\int_{-C_r} = -\int_{C_r}$. Calculando los límites de (13) cuando $R \to \infty$ y cuando $r \to 0$ se encuentra a partir de los teoremas 11.16 y 11.17 que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx - \pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i).$$

Ahora,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i) = -\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i).$$

Por lo tanto,

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \pi i\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi i\left(-\frac{e^{-1+i}}{4}(1 + i)\right).$$

Mediante $e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)$, simplificando e igualando las partes real e imaginaria, se tiene de la última igualdad que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-1}(\operatorname{sen} 1 + \cos 1)$$

y

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)}\, dx = \frac{\pi}{2}[1 + e^{-1}(\operatorname{sen} 1 - \cos 1)]. \quad ❑$$

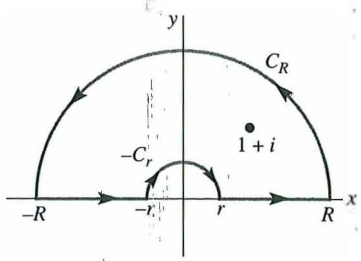


Figura 11.14 Contorno mellado de C para el ejemplo 5

EJERCICIOS 11.6 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

En los problemas del 1 al 10, calcule la integral trigonométrica indicada.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 0.5\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{10 - 6\cos\theta}\, d\theta$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3 + \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$
4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + 3\cos^2\theta}\, d\theta$
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2 - \cos\theta}\, d\theta$ [*Sugerencia:* Sea $t = 2\pi - \theta$.]
6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$
7. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta$
8. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{3 - \operatorname{sen}\theta}\, d\theta$
9. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta$
10. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 3}\, d\theta$

En los problemas del 11 al 30, calcule el valor principal de Cauchy para la integral impropia indicada.

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 6x + 25}\,dx$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 4)^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^3}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 4)^3}\,dx$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)}$

19. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 + 1}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}\,dx$

24. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2}\,dx$

25. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 5}\,dx$

27. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^4 + 1}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4 + 1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\,dx$

En los problemas 31 y 32, utilice un contorno mellado y residuos para comprobar el resultado proporcionado.

31. V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$

32. V.P. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + 1)}\,dx = \pi(1 - e^{-1})$

33. Compruebe el siguiente resultado general

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2 - 1})^3}, \quad a > 1$$

y utilícelo para verificar la solución del ejemplo 1.

34. Compruebe el siguiente resultado general

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta = \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2 - b^2}), \quad a > b > 0$$

y utilícelo para verificar la solución del problema 7.

35. Utilice el contorno de la figura 11.15 para demostrar que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}, \quad 0 < a < 1.$$

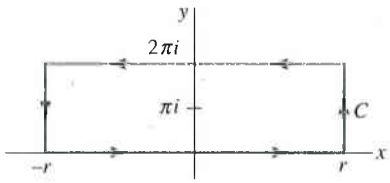


Figura 11.15 Contorno del problema 35

36. La temperatura de estado estable $u(x, y)$ en una placa infinita está determinada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \ y > 0$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = \frac{2y}{y^4 + 4}, \ y > 0$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Utilice una transformada de Fourier y el método del residuo para demostrar que

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha} \operatorname{sen}\alpha \operatorname{senh}\alpha x}{\operatorname{senh}\alpha\pi} \operatorname{sen}\alpha y\,d\alpha.$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-28.

Resuelva los problemas del 1 al 12 sin consultar el texto. Llene los espacios en blanco o conteste verdadero/falso.

1. Una función f es analítica en un punto z_0 si f puede expandirse en una serie de potencias convergente centrada en z_0. _____
2. Una serie de potencias representa una función continua en todos los puntos dentro y en su círculo de convergencia. _____
3. Para $f(z) = 1/(z - 3)$, la serie de Laurent que es válida para $|z| > 3$ es $z^{-1} + 3z^{-2} + 9z^{-3} + \cdots$. Como existe un número infinito de potencias negativas de $z = z - 0$, $z = 0$ es una singularidad esencial. _____
4. Las únicas singularidades posibles en una función racional son los polos. _____
5. La función $f(z) = e^{1/(z-1)}$ tiene una singularidad esencial en $z = 1$. _____
6. La función $f(z) = z/(e^z - 1)$ tiene una singularidad removible en $z = 0$. _____
7. La función $f(z) = z(e^z - 1)$ posee un cero de orden 2 en $z = 0$. _____
8. La función $f(z) = (z + 5)/(z^3 \operatorname{sen}^2 z)$ tiene un polo de orden _____ en $z = 0$.
9. Si $f(z) = \cot \pi z$, entonces $\operatorname{Res}(f(z), 0) =$ _____.
10. La serie de Laurent para f que es válida para $0 < |z - 1|$ viene dada por

$$(z - 1)^{-3} - \frac{(z - 1)^{-1}}{3!} + \frac{(z - 1)}{5!} - \frac{(z - 1)^3}{7!} + \cdots.$$

De esta serie se observa que f tiene un polo de orden _____ en $z = 1$ y Res$(f(z), 1) =$ _____.

11. El círculo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2+i)^{k+1}}$ es _____.

12. La serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ converge en $z = 2i$. _____

13. Encuentre una expansión de Maclaurin para $f(z) = e^z \cos z$. [*Sugerencia:* Utilice la identidad $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$.]

14. Muestre que la función $f(z) = 1/\text{sen}(\pi/z)$ tiene un número infinito de puntos singulares. ¿Algunos de estos puntos singulares son puntos aislados?

En los problemas del 15 al 18, utilice resultados conocidos como ayuda para expandir la función proporcionada en una serie de Laurent que sea válida para la región anular indicada.

15. $f(z) = \dfrac{1 - e^{iz}}{z^4}$, $0 < |z|$

16. $f(z) = e^{z/(z-2)}$, $0 < |z - 2|$

17. $f(z) = (z - i)^2 \,\text{sen}\, \dfrac{1}{z - i}$, $0 < |z - i|$

18. $f(z) = \dfrac{1 - \cos z^2}{z^5}$, $0 < |z|$

19. Expanda $f(z) = \dfrac{2}{z^2 - 4z + 3}$ en una serie apropiada que sea válida para

a) $|z| < 1$ *b)* $1 < |z| < 3$ *c)* $|z| > 3$

d) $0 < |z - 1| < 2$.

20. Expanda $f(z) = \dfrac{1}{(z - 5)^2}$ en una serie apropiada que sea válida para

a) $|z| < 5$ *b)* $|z| > 5$ *c)* $0 < |z - 5|$.

En los problemas del 21 al 30, utilice el teorema del residuo de Cauchy para calcular la integral proporcionada sobre el contorno indicado.

21. $\displaystyle\oint_C \frac{2z + 5}{z(z + 2)(z - 1)^4}\, dz$, C: $|z + 2| = \frac{5}{2}$

22. $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{(z - 1)^3(z^2 + 4)}\, dz$, C es la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$

23. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{2\,\text{sen}\, z - 1}\, dz$, C: $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{3}$

24. $\displaystyle\oint_C \frac{z + 1}{\text{senh}\, z}\, dz$, C es el rectángulo definido por $x = -1$, $x = 1$, $y = 4$, $y = -1$

25. $\displaystyle\oint_C \frac{e^{2z}}{z^4 + 2z^3 + 2z^2}\, dz$, C: $|z| = 4$

26. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^4 - 2z^2 + 4}\, dz$, C es el cuadrado definido por $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$

27. $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z(e^z - 1)}\, dz$, C: $|z| = 1$ [*Sugerencia:* Utilice la serie de Maclaurin para $z(e^z - 1)$.]

28. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z + 1)(z - 1)^{10}}\, dz$, C: $|z - 1| = 3$

29. $\displaystyle\oint_C \left[ze^{3/z} + \frac{\text{sen}\, z}{z^2(z - \pi)^3} \right] dz$, C: $|z| = 6$

30. $\displaystyle\oint_C \csc \pi z\, dz$, C es el rectángulo definido por $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$, $y = -1$, $y = 1$

En los problemas 31 y 32, calcule el valor principal de Cauchy para la integral impropia indicada.

31. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2}\, dx$

32. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a \cos x + x \,\text{sen}\, x}{x^2 + a^2}\, dx$, $a > 0$ [*Sugerencia:* Considere $e^{iz}/(z - ai)$.]

En los problemas 33 y 34, calcule la integral trigonométrica indicada.

33. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{2 + \text{sen}\, \theta}\, d\theta$

34. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos \theta}\, d\theta$

35. Utilice un contorno mellado para demostrar que

$$\text{V.P.} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

36. Demuestre que $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = e^{-b^2/4a^2}\sqrt{\pi}/2a$ considerando la integral compleja $\oint_C e^{-a^2z^2} e^{ibz}\, dz$ a lo largo del contorno C mostrado en la figura 11.16. Utilice el resultado conocido $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}\, dx = \sqrt{\pi}/a$.

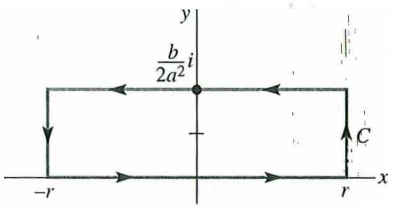


Figura 11.16 Contorno del problema 36

37. Puede mostrarse que la expansión de Laurent para $f(z) = e^{(u/2)(z - 1/z)}$ que es válida para $0 < |z|$ es $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(u) z^k$, donde $J_k(u)$ es la función de Bessel de primer tipo de orden k. Utilice (4) de la sección 11.3 y el contorno C: $|z| = 1$ para mostrar que los coeficientes $J_k(u)$ vienen dados por

$$J_k(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt - u \,\text{sen}\, t)\, dt.$$

CAPÍTULO

12

Transformaciones conformes

Estructura del capítulo

12.1 Funciones complejas como transformaciones
12.2 Transformaciones conformes
12.3 Transformaciones racionales lineales
12.4 Transformaciones de Schwarz-Christoffel
12.5 Fórmulas integrales de Poisson
12.6 Aplicaciones
Ejercicios de repaso del capítulo 12

En este capítulo se estudian las propiedades de las transformaciones para las funciones elementales introducidas en el capítulo 9 y se desarrollan dos nuevos tipos de transformaciones especiales denominadas **transformaciones racionales lineales** y **transformaciones de Schwarz-Christoffel.**

En capítulos previos se utilizaron series de Fourier y transformadas integrales relacionadas con la ecuación de Laplace para resolver problemas de valores en la frontera. Los métodos de la transformación conforme, explicados en el presente capítulo, se utilizan para transferir soluciones conocidas de la ecuación de Laplace de una región a otra. Además, los flujos de fluidos que rodean obstáculos y atraviesan canales pueden determinarse mediante transformaciones conformes.

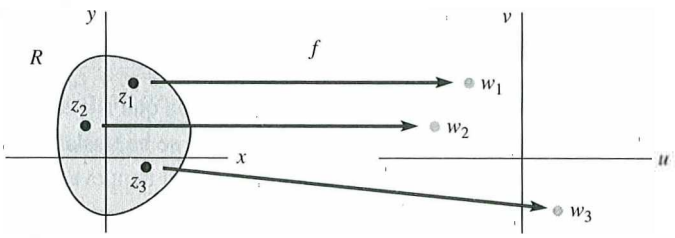
12.1 Funciones complejas como transformaciones

Introducción En el capítulo 9 se hace hincapié en las definiciones algebraicas y las propiedades de las funciones complejas. Para dar una interpretación geométrica a una función compleja $w = f(z)$, se colocan los planos z y w lado a lado y se imagina que un punto $z = x + iy$ del dominio de la definición de f se ha transformado al punto $w = f(z)$ del segundo plano. Así, la función compleja $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ puede considerarse la **transformación en el plano**

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

y $w = f(z)$ se denomina la **imagen** de z bajo f.

La figura 12.1 ilustra las imágenes de un número finito de números complejos en la región R. Se puede obtener información más útil encontrando la imagen de la región R junto con las imágenes de una familia de curvas que se encuentren dentro de R. Usualmente, las curvas que se seleccionan son familias de líneas, de círculos y el sistema de curvas de nivel para las partes real e imaginaria de f.



a) plano z *b*) plano w

Figura 12.1 w_1, w_2, w_3 son imágenes de z_1, z_2, z_3

Imágenes de curvas Obsérvese que si $z(t) = x(t) + iy(t)$, donde $a \leq t \leq b$, describe una curva C en la región, entonces $w = f(z(t))$, donde $a \leq t \leq b$ es una representación paramétrica de la curva correspondientes C' en el plano w. Asimismo, un punto z sobre la curva de nivel $u(x, y) = a$ se transformará en un punto w que se localice en la línea vertical $u = a$, y un punto z en la curva de nivel $v(x, y) = b$ se transformará hacia un punto w que se halle en la línea horizontal $v = b$.

Ejemplo 1 La transformación $f(z) = e^z$

La franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$ se halla en la región fundamental de la función exponencial $f(z) = e^z$. Un segmento de línea vertical $x = a$ de esta región se describe mediante $z(t) = a + it$, $0 \leq t \leq \pi$, y así $w = f(z(t)) = e^a e^{it}$. Entonces, la imagen es un semicírculo con centro en $w = 0$ y de radio $r = e^a$. En forma similar, una línea horizontal $y = b$ se parametriza por medio de $z(t) = t + ib$, $-\infty < t < \infty$, por lo que $w = f(z(t)) = e^t e^{ib}$. Como Arg $w = b$ y $|w| = e^t$, la imagen es un rayo que surge del origen, y como $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi$, la imagen de la franja horizontal completa es el semiplano superior $v \geq 0$. Obsérvese que las líneas horizontales $y = 0$ y $y = \pi$ se transforman sobre los ejes u positivo y negativo, respectivamente. En la figura 12.2 se muestra la transformación para $f(z) = e^z$.

De $w = e^x e^{iy}$ se concluye que $|w| = e^x$ y que $y = \text{Arg } w$. Así, $z = x + iy = \log_e|w| + i \text{ Arg } w = \text{Ln } w$. La función inversa $f^{-1}(w) = \text{Ln } w$ transforma entonces al semiplano superior $v \geq 0$ en la franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$. ❑

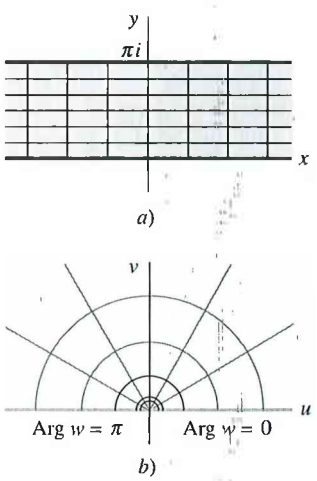
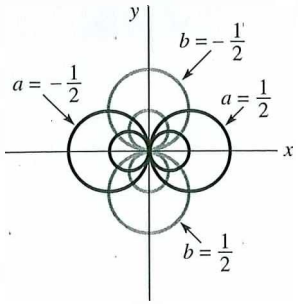
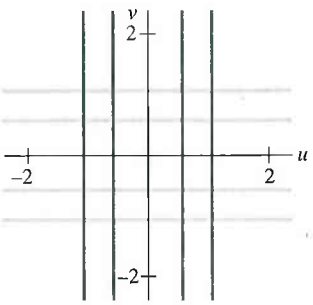


Figura 12.2 Imágenes de las líneas vertical y horizontal del ejemplo 1

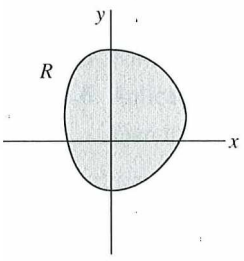


a)

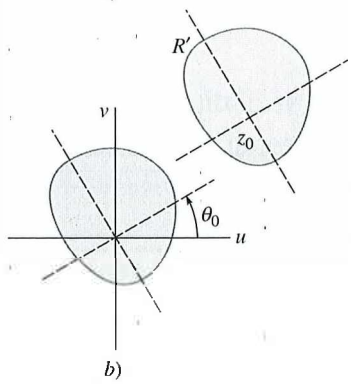


b)

Figura 12.3 Imágenes de círculos para el ejemplo 2



a)



b)

Figura 12.4 Traslación y rotación

Ejemplo 2 La transformación $f(z) = 1/z$

La función compleja $f(z) = 1/z$ tiene dominio $z \neq 0$ y partes real e imaginaria $u(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ y $v(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$, respectivamente. Cuando $a \neq 0$, una curva de nivel $u(x, y) = a$ se escribe como

$$x^2 - \frac{1}{a}x + y^2 = 0 \quad \text{o} \quad \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2a}\right)^2.$$

La curva de nivel es, por lo tanto, un círculo cuyo centro se localiza en el eje x y pasa por el origen. Un punto z diferente de cero de este círculo se transforma en un punto w en la línea $u = a$. De igual modo, la curva de nivel $v(x, y) = b$, $b \neq 0$ se escribe como

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2b}\right)^2 = \left(\frac{1}{2b}\right)^2,$$

y un punto z de este círculo se transforma en un punto w de la línea $v = b$. La figura 12.3 muestra la transformación para $f(z) = 1/z$; la figura 12.3*a*) muestra las dos colecciones de curvas de nivel circulares, y la figura 12.3*b*) muestra sus imágenes correspondientes en el plano w.

Puesto que $w = 1/z$ se tiene que $z = 1/w$. Así, $f^{-1}(w) = 1/w$, por lo que $f = f^{-1}$. Se concluye entonces que f transforma la línea horizontal $y = b$ en el círculo $u^2 + (v + \frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}b)^2$, y que f transforma la línea vertical $x = a$ hacia el círculo $(u - \frac{1}{2}a)^2 + v^2 = (\frac{1}{2}a)^2$. ❑

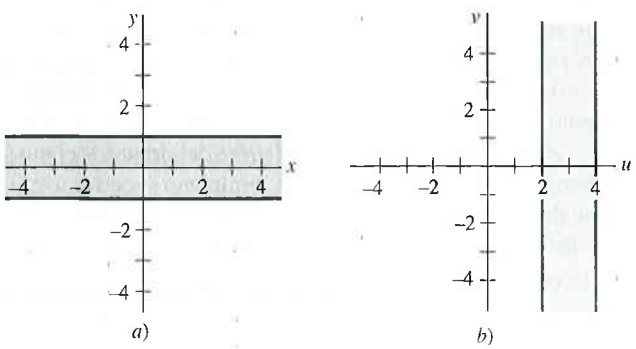
Traslación y rotación La función lineal elemental $f(z) = z + z_0$ puede interpretarse como una **traslación** en el plano z. Para ver esto se plantea que $z = x + iy$ y que $z_0 = h + ik$. Como $w = f(z) = (x + h) + i(y + k)$, el punto (x, y) se ha trasladado h unidades en dirección horizontal y k unidades en la dirección vertical en la nueva posición en $(x + h, y + k)$. Particularmente, el origen O se ha transformado hacia $z_0 = h + ik$.

La función elemental $g(z) = e^{i\theta_0}z$ puede interpretarse como una **rotación** de θ_0 grados, ya que si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = g(z) = re^{i(\theta + \theta_0)}$. Obsérvese que si se aplica la transformación compleja $h(z) = e^{i\theta_0}z + z_0$ a la región R centrada en el origen, la región imagen R' puede obtenerse rotando en primer lugar θ_0 grados a R y entonces trasladando el centro a la nueva posición z_0; véase la transformación por $h(z) = e^{i\theta_0}z + z_0$ en la figura 12.4.

Ejemplo 3 Rotación y traslación

Encuentre una función compleja que transforme la franja horizontal $-1 \leq y \leq 1$ en la franja vertical $2 \leq x \leq 4$.

Solución Si la franja horizontal $-1 \leq y \leq 1$ se rota 90°, se obtiene la franja vertical $-1 \leq x \leq 1$ y al rotar ésta 3 unidades hacia la derecha se obtiene la franja vertical $2 \leq x \leq 4$; véase la figura 12.5. Como $e^{i\pi/2} = i$, entonces $h(z) = iz + 3$ es la transformación buscada.



a) *b)*

❑

Figura 12.5 Imagen de la franja horizontal del ejemplo 3

■ **Amplificación** Una **amplificación** consiste en una función compleja de la forma $f(z) = \alpha z$, donde α es un número real positivo fijo. Obsérvese que $|w| = |\alpha z| = \alpha|z|$, por lo que f cambia la longitud (mas no la dirección) del número complejo z por un factor fijo α. Si $g(z) = az + b$ y $a = r_0 e^{i\theta_0}$, entonces el vector z se rota θ_0 grados, se amplifica por un factor de r_0 y finalmente se traslada una cantidad b.

Ejemplo 4 Contracción y traslación

Encuentre una función compleja que transforme el disco $|z| \leq 1$ en el disco $|w - (1 + i)| \leq \frac{1}{2}$.

Solución En primer lugar se contrae el radio del disco por un factor de 1/2 y entonces se traslada su centro al punto $1 + i$. Por lo tanto, $w = f(z) = \frac{1}{2}z + (1 + i)$ transforma $|z| \leq 1$ en el disco $|w - (1 + i)| \leq \frac{1}{2}$. ❑

■ **Funciones de potencia** Una función de potencia de la forma $f(z) = z^\alpha$, donde α es un número real positivo fijo, se denomina **función real de potencia**. La figura 12.6 muestra el efecto de la función compleja $f(z) = z^\alpha$ sobre la cuña angular $0 \leq \text{Arg } z \leq \theta_0$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = f(z) = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$. Así, $0 \leq \text{Arg } w \leq \alpha\theta_0$ y la abertura de la cuña se cambia por un factor α. No es difícil mostrar que un arco circular con centro en el origen se transforma en un arco circular similar, y que los rayos que surgen del origen se transforman en rayos similares.

Ejemplo 5 La función de potencia $f(z) = z^{1/4}$

Encuentre una función compleja que transforme el semiplano superior $y \geq 0$ en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$.

Solución El semiplano superior $y \geq 0$ se describe también por medio de la desigualdad $0 \leq \text{Arg } z \leq \pi$. Se debe entonces encontrar una transformación compleja que reduzca el ángulo $\theta_0 = \pi$ por un factor de $\alpha = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, $f(z) = z^{1/4}$. ❑

■ **Transformaciones sucesivas** Para encontrar una transformación compleja entre dos regiones R y R', generalmente conviene transformar primero R en una tercera región R'' y entonces hallar una transformación compleja de R'' en R'. Dicho de manera más precisa: si $\zeta = f(z)$ transforma R en R'' y $w = g(\zeta)$ transforma R'' en R', entonces la función compuesta $w = g(f(z))$ transforma R en R'; véase la figura 12.7 para un diagrama de transformaciones sucesivas.

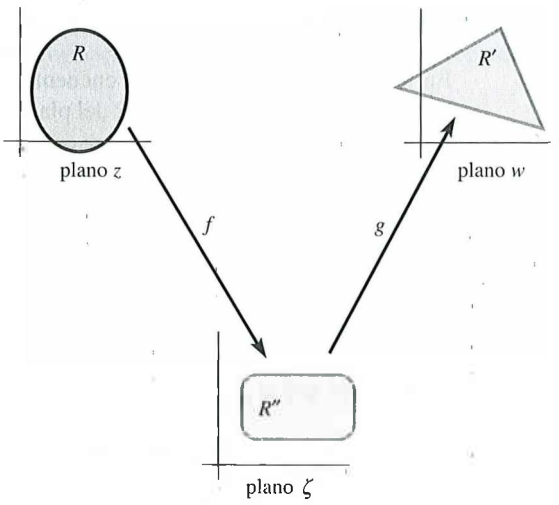


Figura 12.7 R' es imagen de R bajo transformaciones sucesivas

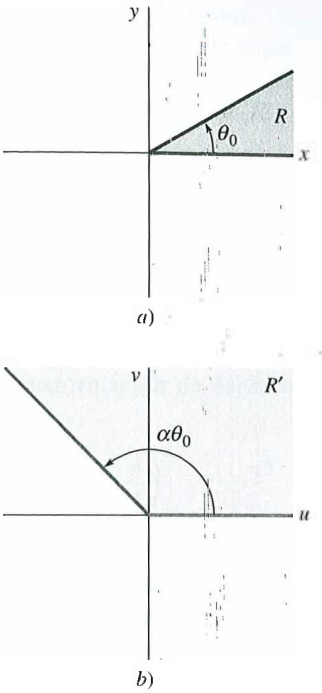


Figura 12.6 R' es imagen de la cuña angular R

Ejemplo 6 Transformaciones sucesivas

Encuentre una función compleja que tranforme la franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$ sobre la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$.

Solución En el ejemplo 1 se plantea que la función compleja $f(z) = e^z$ transforma la franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$ en el semiplano superior $0 \leq \text{Arg } \zeta \leq \pi$. Del ejemplo 5, el semiplano superior $0 \leq \text{Arg } \zeta \leq \pi$ se transforma en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$ por medio de $g(\zeta) = \zeta^{1/4}$. Se deduce entonces que la función compuesta $w = g(f(z)) = g(e^z) = e^{z/4}$ transforma la franja horizontal $0 \leq y \leq \pi$ en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$. ❑

Ejemplo 7 Transformaciones sucesivas

Encuentre una función compleja que transforme la cuña $\pi/4 \leq \text{Arg } z \leq 3\pi/4$ en el semiplano superior $v \geq 0$.

Solución En primer lugar se rota la cuña $\pi/4 \leq \text{Arg } z \leq 3\pi/4$ de forma que quede en la posición estándar mostrada en la figura 12.6. Si $\zeta = f(z) = e^{-i\pi/4}z$, entonces la imagen de esta cuña es la cuña R'' definida por $0 \leq \text{Arg } \zeta \leq \pi/2$. La función real $w = g(\zeta) = \zeta^2$ expande la abertura de R'' por un factor de 2 para dar el semiplano superior $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi$ como su imagen. Por lo tanto, $w = g(f(z)) = (e^{-i\pi/4}z)^2 = -iz^2$ es la transformación buscada. ❑

En las secciones de la 12.2 a la 12.4 se amplía el conocimiento de transformaciones complejas y se muestra cómo se utilizan para resolver la ecuación de Laplace en el plano.

EJERCICIOS 12.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas del 1 al 10, se proporciona una curva en el plano z y una transformación compleja $w = f(z)$. En cada caso, encuentre la curva imagen en el plano w.

1. $y = x$ bajo $w = 1/z$
2. $y = 1$ bajo $w = 1/z$
3. Hipérbola $xy = 1$ bajo $w = z^2$
4. Hipérbola $x^2 - y^2 = 4$ bajo $w = z^2$
5. Semicírculo $|z| = 1$, $y > 0$, bajo $w = \text{Ln } z$
6. Rayo $\theta = \pi/4$ bajo $w = \text{Ln } z$
7. Rayo $\theta = \theta_0$ bajo $w = z^{1/2}$
8. Arco circular $r = 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, bajo $w = z^{1/2}$
9. Curva $e^y \cos y = 1$ bajo $w = e^z$
10. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = z + 1/z$

En los problemas del 11 al 20, se proporciona una región del plano z y una transformación compleja $w = f(z)$. Encuentre en cada caso la región imagen en el plano w.

11. Primer cuadrante bajo $w = 1/z$
12. Franja $0 \leq y \leq 1$ bajo $w = 1/z$
13. Rectángulo $\pi/4 \leq y \leq \pi/2$ bajo $w = e^z$
14. Rectángulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$ bajo $w = e^z$
15. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = z + 4i$
16. Círculo $|z| = 1$ bajo $w = 2z - 1$
17. Franja $0 \leq y \leq 1$ bajo $w = iz$
18. Primer cuadrante bajo $w = (1 + i)z$
19. Cuña $0 \leq \text{Arg } z \leq \pi/4$ bajo $w = z^3$
20. Cuña $0 \leq \text{Arg } z \leq \pi/4$ bajo $w = z^{1/2}$

En los problemas del 21 al 30, encuentre una transformación compleja de la región indicada R del plano z a la región imagen R' del plano w.

21. Franja $1 \leq y \leq 4$ en la franja $0 \leq u \leq 3$
22. Franja $1 \leq y \leq 4$ en la franja $0 \leq v \leq 3$
23. Disco $|z - 1| \leq 1$ en el disco $|w| \leq 2$
24. Franja $-1 \leq x \leq 1$ en la franja $-1 \leq v \leq 1$
25. Cuña $\pi/4 \leq \text{Arg } z \leq \pi/2$ en el semiplano superior $v \geq 0$
26. Franja $0 \leq y \leq 4$ en el semiplano superior $v \geq 0$
27. Franja $0 \leq y \leq \pi$ en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq 3\pi/2$
28. Cuña $0 \leq \text{Arg } z \leq 3\pi/2$ en el semiplano $u \geq 2$

29.

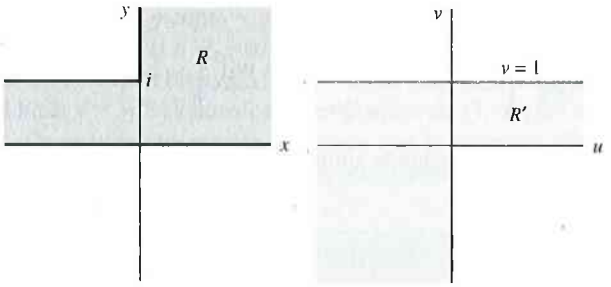


Figura 12.8 Regiones R y R' para el problema 29

30.

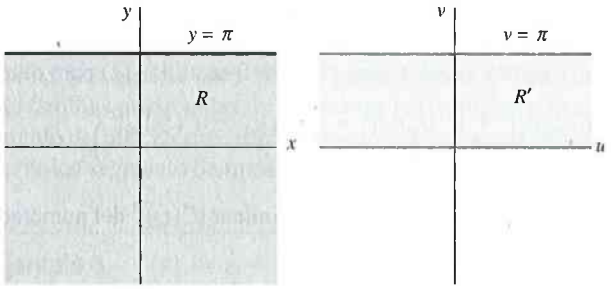


Figura 12.9 Regiones R y R' para el problema 30

31. **Proyecto** La transformación del problema 10 es un caso especial de la transformación $w = z + k^2/z$, donde k es una constante positiva, conocida como **transformación de Joukowski**.

a) Muestre que la transformación de Joukowski transforma cualquier círculo $x^2 + y^2 = R^2$ en la elipse

$$\frac{u^2}{\left(1 + \frac{k^2}{R^2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(1 - \frac{k^2}{R^2}\right)^2} = R^2, k \neq R.$$

b) ¿Cuál es la imagen del círculo cuando $R = k$?

c) La importancia de la transformación $w = z + k^2/z$ no recae en su efecto sobre los círculos $|z| = R$ centrados en el origen, sino en los círculos no centrados en el origen cuyo centro se localiza en el eje real. Demuestre que la transformación de Joukowski puede escribirse como

$$\frac{w - 2k}{w + 2k} = \left(\frac{z - k}{z + k}\right)^2$$

Cuando $k = 1$, esta transformación particular transforma un círculo que pasa por $z = -1$ y contiene al punto $z = 1$ en una curva cerrada con un borde posterior afilado. Este tipo de curva, que recuerda a la sección transversal del ala de un aeroplano, se conoce como perfil de Joukowski.

Escriba un reporte sobre el uso de la transformación de Joukowski en el estudio del flujo de aire alrededor de un perfil aerodinámico. Existe mucha información sobre este tema en Internet; por ejemplo, se puede comenzar con la URL:

www.ae.su.oz.au/aero/jouk/jouk.html

12.2 Transformaciones conformes

Introducción En la sección 12.1 se plantea que una transformación lineal no constante $f(z) = az + b$, siendo a y b números complejos, actúa rotando, amplificando y trasladando puntos en el plano complejo. Como resultado se puede mostrar fácilmente que el ángulo entre dos curvas del plano z que se intersecan es igual al ángulo entre las imágenes de los arcos en el plano w bajo una transformación lineal. En esta sección se estudian otras transformaciones complejas que tienen la propiedad de preservar los ángulos.

Transformaciones que preservan los ángulos Una transformación compleja $w = f(z)$ definida sobre un dominio D se denomina **conforme en $z = z_0$** para D cuando f preserva los ángulos entre dos curvas cualesquiera de D que se intersecan en z_0. Más precisamente: si C_1 y C_2 se intersecan en z_0 de D, y C_1' y C_2' son las correspondientes imágenes en el plano w, se requiere que el ángulo θ entre C_1 y C_2 sea igual al ángulo ϕ entre C_1' y C_2'; véase la figura 12.10.

Estos ángulos se calculan en función de los vectores tangentes a las curvas. Si z_1' y z_2' son vectores tangentes a las curvas C_1 y C_2, respectivamente, entonces, aplicando la ley de cosenos al triángulo determinado por z_1' y z_2', se tiene

$$|z_1' - z_2'|^2 = |z_1'|^2 + |z_2'|^2 - 2|z_1'|\,|z_2'| \cos\theta$$

o

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|z_1'|^2 + |z_2'|^2 - |z_1' - z_2'|^2}{2|z_1'||z_2'|}\right). \tag{1}$$

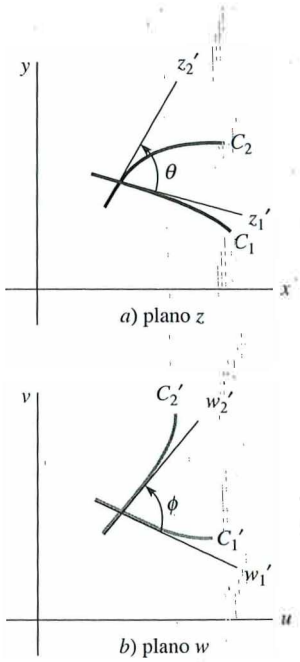


Figura 12.10 Transformación conforme si $\theta = \phi$

De la misma forma, si w_1' y w_2' son los vectores tangentes a las curvas C_1' y C_2', respectivamente, entonces

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|w_1'|^2 + |w_2'|^2 - |w_1' - w_2'|^2}{2|w_1'||w_2'|}\right). \tag{2}$$

El siguiente teorema proporciona una condición simple que garantiza que $\theta = \phi$.

TEOREMA 12.1* Transformación conforme

Si $f(z)$ es analítica en el dominio D y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en $z = z_0$.

Demostración Si una curva C de D se parametriza por medio de $z = z(t)$, entonces $w = f(z(t))$ describe la curva imagen en el plano w. Aplicando la regla de la cadena a $w = f(z(t))$ se obtiene $w' = f'(z(t))z'(t)$. Si las curvas C_1 y C_2 se intersecan en el punto z_0 de D, entonces $w_1' = f'(z_0)z_1'$ y $w_2' = f'(z_0)z_2'$. Como $f'(z_0) \neq 0$ se utiliza (2) para obtener

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|f'(z_0)z_1'|^2 + |f'(z_0)z_2'|^2 - |f'(z_0)z_1' - f'(z_0)z_2'|^2}{2|f'(z_0)z_1'||f'(z_0)z_2'|}\right).$$

Se aplican las leyes del valor absoluto para factorizar y eliminar $|f'(z_0)|^2$ del numerador y del denominador, a fin de obtener

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{|z_1'|^2 + |z_2'|^2 - |z_1' - z_2'|^2}{2|z_1'||z_2'|}\right).$$

Por lo tanto, de (1), $\phi = \theta$. ❑

Ejemplo 1 Transformaciones conformes

a) La función analítica $f(z) = e^z$ es conforme en todos los puntos del plano z, puesto que $f'(z) = e^z$ nunca es cero.

b) La función analítica $g(z) = z^2$ es conforme en todos los puntos excepto en $z = 0$ puesto que $g'(z) = 2z \neq 0$ para $z \neq 0$. De la figura 12.6 se observa que $g(z)$ duplica el ángulo formado por los dos rayos en el origen. ❑

Si $f'(z_0) = 0$ pero $f''(z_0) \neq 0$, es posible mostrar que f *duplica* el ángulo entre dos curvas cualesquiera de D que se intersecan en $z = z_0$. Los dos siguientes ejemplos presentan dos transformaciones complejas importantes que son conformes en todos los números finitos de los puntos de sus dominios, excepto en uno.

Ejemplo 2 $f(z) = \operatorname{sen} z$ como transformación conforme

La franja vertical $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ se denomina la región fundamental de la función trigonométrica $w = \operatorname{sen} z$. Una línea vertical $x = a$ del interior de esta región se describe mediante $z(t) = a + it$, donde $-\infty < t < \infty$. De (6) de la sección 9.7 se tiene que

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$$

y por lo tanto $u + iv = \operatorname{sen}(a + it) = \operatorname{sen} a \cosh t + i \cos a \operatorname{senh} t$.

De la igualdad $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ se tiene que

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1.$$

*También es posible demostrar que f mantiene el *sentido de la dirección* entre los vectores tangentes.

La imagen de la línea vertical $x = a$ es, por ende, una hipérbola con $\pm \operatorname{sen} a$ como intersecciones en u, y como $-\pi/2 < a < \pi/2$, la hipérbola cruza el eje u entre $u = -1$ y $u = 1$. Obsérvese que si $a = -\pi/2$, entonces $w = -\cosh t$, y por lo tanto la línea $x = -\pi/2$ se transforma en el intervalo $(-\infty, -1]$ en el eje u en su lado negativo. De la misma forma, la línea $x = \pi/2$ se transforma en el intervalo $[1, \infty)$ del eje u en su parte positiva.

Un argumento similar establece que el segmento de línea horizontal descrito por $z(t) = t + ib$, $-\pi/2 < t < \pi/2$, se transforma en la porción superior o la porción inferior de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 b} = 1$$

dependiendo de si $b > 0$ o $b < 0$. Estos resultados se sintetizan en la figura 12.11, que muestra la transformación mediante $f(z) = \operatorname{sen} z$. Obsérvese que se utilizan cuidadosamente letras mayúsculas para indicar los puntos de la frontera que se transforman. Así, por ejemplo, el segmento de frontera AB se transforma en $A'B'$.

Ya que $f'(z) = \cos z$, f es conforme en todos los puntos de la región excepto $z = \pm\pi/2$. Las hipérbolas y las elipses son entonces ortogonales ya que son imágenes de las familias ortogonales de segmentos horizontales y líneas verticales. Obsérvese que el ángulo de 180° en $z = -\pi/2$ formado por los segmentos AB y AC se duplica para formar un único segmento de línea en $w = -1$. ❑

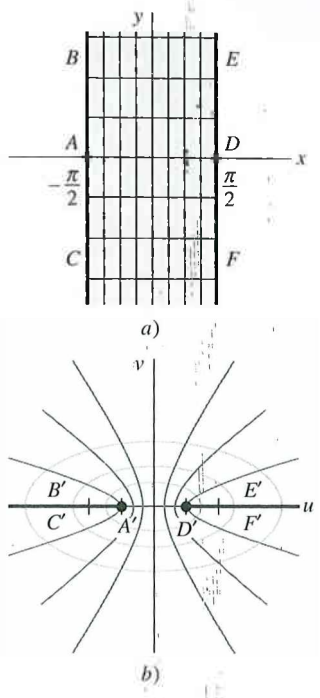


Figura 12.11 Imagen de la franja vertical del ejemplo 2

Ejemplo 3 $f(z) = z + 1/z$ como una transformación conforme

La transformación compleja $f(z) = z + 1/z$ es conforme en todos los valores de z excepto $z = \pm 1$ y $z = 0$. En particular, la función es conforme para todos los valores de z del semiplano superior que satisfacen $|z| > 1$. Si $z = re^{i\theta}$, entonces $w = re^{i\theta} + (1/r)e^{-i\theta}$ y, por lo tanto,

$$u = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta. \tag{3}$$

Nótese que si $r = 1$, entonces $v = 0$ y $u = 2\cos\theta$. En consecuencia, el semicírculo $z = e^{it}$, donde $0 \le t \le \pi$ se transforma en el segmento $[-2, 2]$ del eje u. De (3) se infiere que si $r > 1$, entonces el semicírculo $z = re^{it}$, donde $0 \le t \le \pi$ se transforma en la mitad superior de la elipse $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$, donde $a = r + 1/r$ y $b = r - 1/r$; véase la figura 12.12 para la transformación por medio de $f(z) = z + 1/z$.

Para un valor fijo de θ, el rayo $z = te^{i\theta}$, para $t \ge 1$, se transforma en la porción de la hipérbola $u^2/\cos^2\theta - v^2/\operatorname{sen}^2\theta = 4$ del semiplano superior $v \ge 0$. Esto se deduce de (3), ya que

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = 4.$$

Como f es conforme para $|z| > 1$ y un rayo $\theta = \theta_0$ interseca a un círculo $|z| = r$ con un ángulo recto, las hipérbolas y las elipses del plano w son ortogonales. ❑

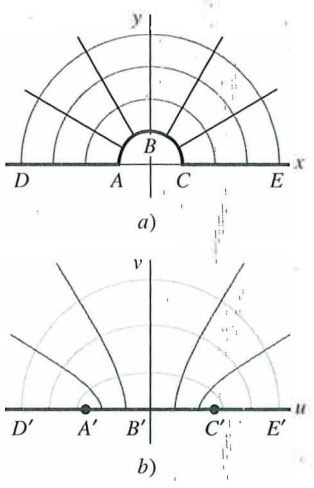


Figura 12.12 Imágenes de los rayos y los círculos del ejemplo 3

■ **Transformaciones conformes utilizando tablas** El apéndice proporciona transformaciones conformes. Dichas transformaciones se clasifican como elementales (de E-1 a E-9), transformaciones en semiplanos (de H-1 a H-6), transformaciones en regiones circulares (de C-1 a C-5) y transformaciones diversas (de M-1 a M-10). Algunas de estas transformaciones complejas se deducen en las secciones 12.3 y 12.4.

Los elementos proporcionados no sólo indican las imágenes de la región R, sino también las imágenes de varias porciones de la frontera de R. Esto es especialmente útil cuando se intenta resolver problemas de valor en la frontera utilizando transformaciones conformes. El apéndice se utiliza de manera semejante a las tablas de integrales para encontrar antiderivadas. En algunos casos se usa una único elemento para encontrar una transformación conforme entre dos regiones dadas R y R'. En otros casos se pueden requerir transformaciones sucesivas para transformar R en R'.

Ejemplo 4 Uso de una tabla de transformaciones conformes

Utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar una transformación conforme entre la franja $0 \leq y \leq 2$ y el semiplano superior $v \geq 0$. ¿Cuál es la imagen del eje x negativo?

Solución Se puede obtener una transformación adecuada directamente de la entrada H-2. Haciendo $a = 2$ entonces $f(z) = e^{\pi z/2}$ y observando las posiciones de E, D, E' y D' de la figura, transforma el eje x en su parte negativa en el intervalo (0, 1) del eje u. ❑

Ejemplo 5 Uso de una tabla de transformaciones conformes

Utilice las transformaciones conformes del apéndice IV para encontrar una transformación conforme entre la franja $0 \leq y \leq 2$ y el disco $|w| \leq 1$. ¿Cuál es la imagen del eje x en su parte negativa?

Solución El apéndice no tiene un elemento que transforme la franja $0 \leq y \leq 2$ directamente en el disco. En el ejemplo 4, la franja se transforma por medio de $f(z) = e^{\pi z/2}$ sobre el semiplano superior y, del elemento C-4, la transformación compleja $w = \dfrac{i - \zeta}{i + \zeta}$ transforma el semiplano en el disco $|w| \leq 1$. Por lo tanto, $w = g(f(z)) = \dfrac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$ transforma la franja $0 \leq y \leq 2$ sobre el disco $|w| \leq 1$.

El eje x en su lado negativo se transforma en primer lugar en el intervalo (0, 1) del plano ζ, y desde la posición de los puntos C y C' en C-4, el intervalo (0, 1) se transforma en el arco circular $w = e^{i\theta}$, donde $0 < \theta < \pi/2$, del plano w. ❑

■ **Funciones armónicas y el problema de Dirichlet** Una función armónica acotada $u = u(x, y)$ que toma en cuenta valores preestablecidos sobre toda la frontera de una región R se conoce como solución al **problema de Dirichlet** en R. En los capítulos del 5 al 7 se plantea una serie de técnicas para resolver la ecuación de Laplace en el plano, e interpretamos la solución a un problema de Dirichlet como la distribución de temperatura en estado estable en el interior de R que resulta de las temperaturas fijas en la frontera.

Existen por lo menos dos desventajas en los métodos de series de Fourier y de transformada integral presentados en los capítulos del 5 al 7. Estos métodos funcionan únicamente para regiones simples del plano y las soluciones toman comúnmente la forma de series infinitas o de integrales impropias. Como tales, son difíciles de calcular. En la sección 9.5 se plantea que las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas. En vista de que hay una gran cantidad de funciones analíticas, se pueden encontrar soluciones cerradas a muchos problemas de Dirichlet y utilizar estas soluciones para bosquejar las isotermas y las líneas de flujo de la distribución de temperatura.

A continuación se muestra cómo es posible utilizar transformaciones conformes para resolver un problema de Dirichlet en una región R una vez conocida la solución al problema de Dirichlet correspondiente en la región imagen R'. El método depende del siguiente teorema:

TEOREMA 12.2 Teorema de la transformación para funciones armónicas

Sea f una función analítica que transforma un dominio D sobre un dominio D'. Si U es armónica en D', entonces la función real $u(x, y) = U(f(z))$ es armónica en D.

Demostración Se proporciona una demostración para el caso especial en el que D' es simplemente conexa. Si U tiene una conjugada armónica V en D', entonces $H = U + iV$ es analítica en D', y por lo tanto la función compuesta $H(f(z)) = U(f(z)) + iV(f(z))$ es analítica en D. Por el teorema 9.4 se deduce que la parte real $U(f(z))$ es armónica en D y la demostración queda completa.

Para establecer que U tiene una conjugada armónica, sea $g(z) = \partial U/\partial x - i\,\partial U/\partial y$. La primera ecuación de Cauchy-Riemann $(\partial/\partial x)(\partial U/\partial x) = (\partial/\partial y)(-\partial U/\partial y)$ es equivalente a la ecuación de Laplace $\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = 0$, que se satisface puesto que U es armónica en D'. La segunda ecuación de Cauchy-Riemann $(\partial/\partial y)(\partial U/\partial x) = -(\partial/\partial x)(-\partial U/\partial y)$ es equivalente a la igualdad de las derivadas parciales combinadas de segundo orden. Por lo tanto, $g(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo D' y así, por el teorema 10.8, tiene una antiderivada $G(z)$. Si $G(z) = U_1 + iV_1$, entonces $g(z) = G'(z) = \partial U_1/\partial x - i\,\partial U_1/\partial y$. Como $g(z) = \partial U/\partial x - i\,\partial U/\partial y$ se deduce que U y U_1 poseen derivadas parciales primeras iguales. Por lo tanto, $H = U + iV_1$ es analítica en D' y, consecuentemente, U tiene una conjugada armónica en D'. ❑

El teorema 12.2 se utiliza para resolver un problema de Dirichlet en una región R transformando el problema a una región R' en la cual la solución U sea evidente o haya sido encontrada por los métodos anteriores (incluidos los métodos por series de Fourier y la transformada integral de los capítulos del 5 al 7). Los pasos clave se sintetizan a continuación.

Resolución de problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes

1. Encuentre una transformación conforme $w = f(z)$ que transforme la región original R en la región imagen R'. La región R' puede ser una región de la que se conozcan muchas soluciones explícitas a problemas de Dirichlet.
2. Transfiera las condiciones de frontera desde la frontera de R a la frontera de R'. El valor de u en un punto fronterizo ξ de R se asigna como el valor de U en el punto de frontera correspondiente $f(\xi)$. Véase la figura 12.13 para una ejemplificación de la transferencia de condiciones de frontera.

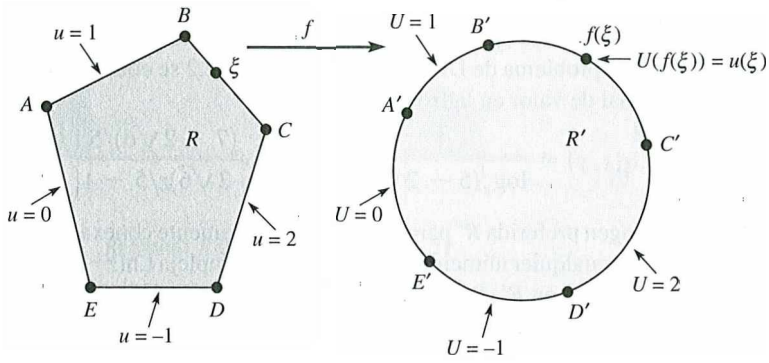


Figura 12.13 R' es la imagen de R bajo una transformación conforme f

3. Resuelva el problema de Dirichlet correspondiente en R'. La solución U puede ser obvia a partir de la simplicidad del problema en R' o puede encontrarse utilizando métodos de Fourier o la transformada integral. (En las secciones 12.13 y 12.5 se presentan métodos adicionales.)
4. La solución al problema de Dirichlet original es $u(x, y) = U(f(z))$.

Ejemplo 6 Resolución de un problema de Dirichlet

La función $U(u, v) = (1/\pi)\,\text{Arg}\,w$ es armónica en el semiplano superior $v > 0$ puesto que es la parte imaginaria de la función analítica $g(w) = (1/\pi)\,\text{Ln}\,w$. Utilice esta función para resolver el problema de Dirichlet de la figura 12.14*a*).

Solución La función analítica $f(z) = \text{sen}\,z$ transforma la región original en el semiplano superior $v \geq 0$ y transforma los segmentos de frontera en los segmentos mostrados en la figura 12.14*b*). La función armónica $U(u, v) = (1/\pi)\,\text{Arg}\,w$ satisface las condiciones de frontera

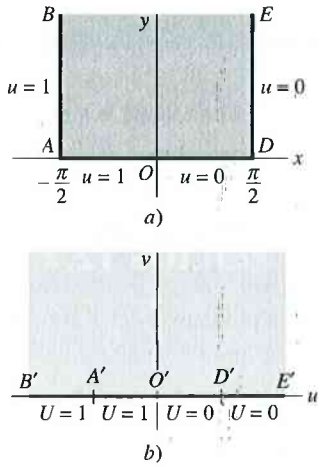


Figura 12.14 Imagen de la franja vertical infinita del ejemplo 6

transferidas $U(u, 0) = 0$ para $u > 0$ y $U(u, 0) = 1$ para $u < 0$. Por lo tanto, $u(x, y) = U(\text{sen } z) = (1/\pi)\,\text{Arg}(\text{sen } z)$ es la solución al problema original. Si $\tan^{-1}(v/u)$ se elige de modo que se halle entre 0 y π, la solución se escribe también como

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen} x \cosh y}\right).$$ ❑

Ejemplo 7 Resolución de un problema de Dirichlet

De C-1 del apéndice IV para transformaciones conformes, la función analítica $f(z) = (z - a)/(az - 1)$, donde $a = (7 + 2\sqrt{6})/5$, transforma la región externa a los dos discos abiertos $|z| < 1$ y $|z - \frac{5}{2}| < \frac{1}{2}$ en la región circular $r_0 \le |w| \le 1$, donde $r_0 = 5 - 2\sqrt{6}$. La figura 12.15*a*) muestra el problema de Dirichlet original, y la figura 12.15*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas.

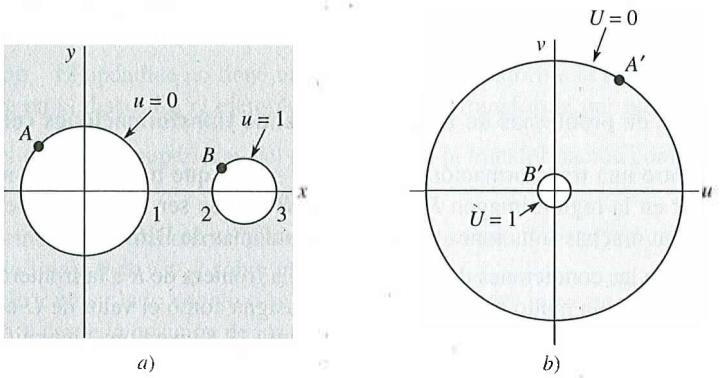


Figura 12.15 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 7

En el problema 10 de los ejercicios 6.1, se encuentra que $U(r, \theta) = (\log_e r)/(\log_e r_0)$ es la solución al nuevo problema de Dirichlet. Del teorema 12.2 se concluye que la solución al problema original de valor en la frontera es

$$u(x, y) = \frac{1}{\log_e(5 - 2\sqrt{6})}\log_e\left|\frac{z - (7 + 2\sqrt{6})/5}{(7 + 2\sqrt{6})z/5 - 1}\right|.$$ ❑

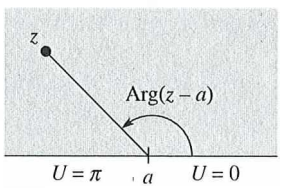


Figura 12.16 Imagen de un problema de Dirichlet

Una región imagen preferida R' para una región simplemente conexa R es el semiplano superior $y \ge 0$. Para cualquier número real a, la función compleja $\text{Ln}(z - a) = \log_e|z - a| + i\,\text{Arg}(z - a)$ es analítica en R'. Por lo tanto, $\text{Arg}(z - a)$ es armónica en R' y es una solución al problema de Dirichlet mostrado en la figura 12.16.

Se deduce entonces que la solución en R' al problema de Dirichlet con

$$U(x, 0) = \begin{cases} c_0, & a < x < b \\ 0, & \text{de otra forma} \end{cases}$$

es la función armónica $U(x, y) = (c_0/\pi)(\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a))$. Un gran número de problemas de Dirichlet en el semiplano superior $y \ge 0$ se resuelve sumando funciones armónicas de esta forma.

EJERCICIOS 12.2 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas del 1 al 6, determine dónde es conforme la transformación compleja indicada.

1. $f(z) = z^3 - 3z + 1$
2. $f(z) = \cos z$
3. $f(z) = z + e^z + 1$
4. $f(z) = z + \text{Ln } z + 1$
5. $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$
6. $f(z) = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(z + 1) + \text{Ln}(z - 1)]$

En los problemas del 7 al 10, utilice los resultados de los ejemplos 3 y 4.

7. Utilice la igualdad $\cos z = \text{sen}(\pi/2 - z)$ para encontrar la imagen de la franja $0 \le x \le \pi$ bajo la transformación compleja $w = \cos z$. ¿Cuál es la imagen de una línea horizontal en la franja?
8. Utilice la identidad $\text{senh } z = -i \text{ sen } (iz)$ para encontrar la imagen de la franja $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, $x \ge 0$, bajo la

transformación compleja $w = \operatorname{senh} z$. ¿Cuál es la imagen de un segmento de línea vertical en la franja?

9. Encuentre la imagen de la región definida por $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $y \geq 0$, bajo la transformación compleja $w = (\operatorname{sen} z)^{1/4}$. ¿Cuál es la imagen del segmento de línea $[-\pi/2, \pi/2]$ sobre el eje x?

10. Encuentre la imagen de la región $|z| \leq 1$ en el semiplano superior bajo la transformación compleja $w = z + 1/z$. ¿Cuál es la imagen del segmento de línea $[-1, 1]$ sobre el eje x?

En los problemas del 11 al 18, utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar una transformación conforme de la región indicada R del plano z en la región objetivo R' en el plano w, y encuentre la imagen de la curva de frontera proporcionada.

11.

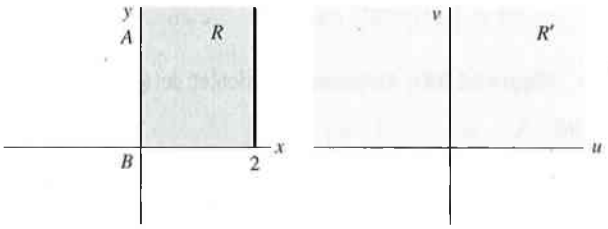


Figura 12.17 Regiones R y R' para el problema 11

12.

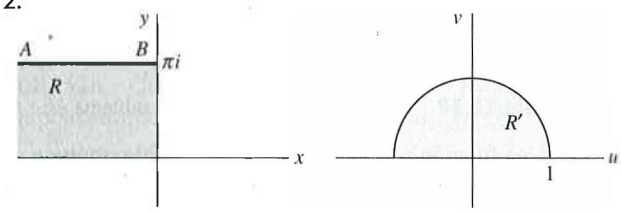


Figura 12.18 Regiones R y R' para el problema 12

13.

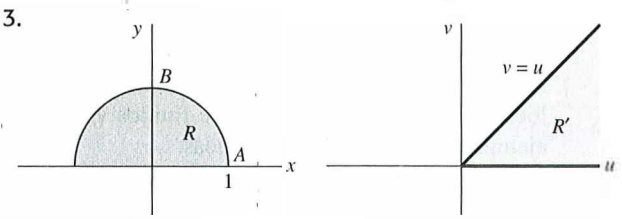


Figura 12.19 Regiones R y R' para el problema 13

14.

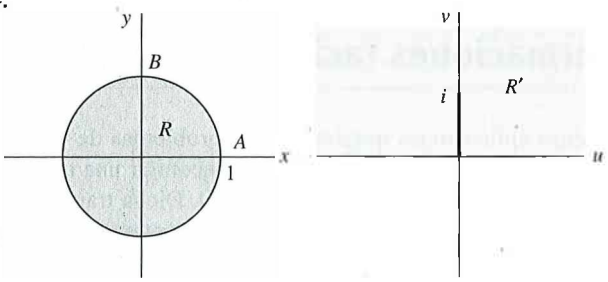


Figura 12.20 Regiones R y R' para el problema 14

15.

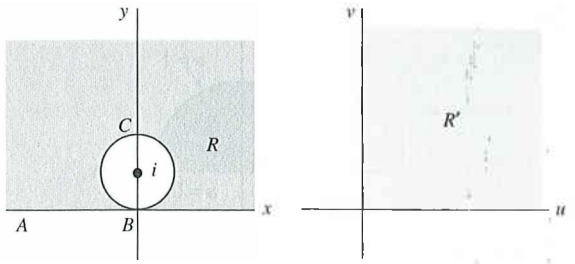


Figura 12.21 Regiones R y R' para el problema 15

16.

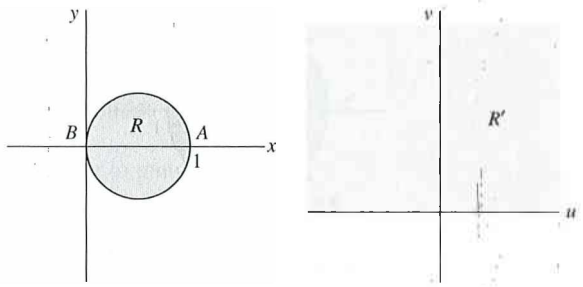


Figura 12.22 Regiones R y R' para el problema 16

17.

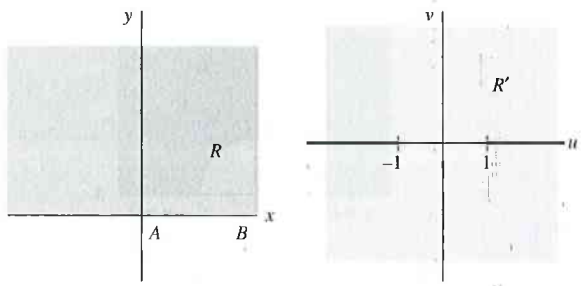


Figura 12.23 Regiones R y R' para el problema 17

18.

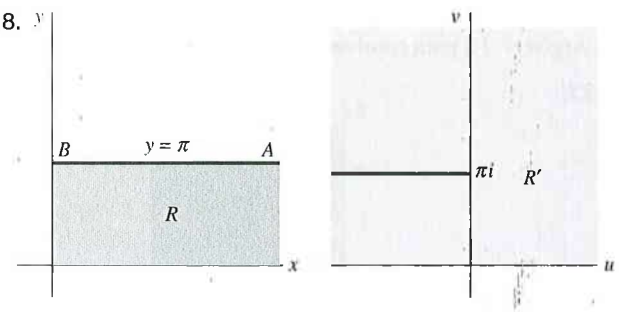


Figura 12.24 Regiones R y R' para el problema 18

En los problemas del 19 al 22, utilice una transformación conforme adecuada y la función armónica $U = (1/\pi)\operatorname{Arg} w$ para resolver el problema de Dirichlet indicado.

19.

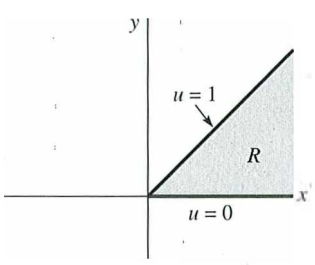


Figura 12.25 Problema de Dirichlet del problema 19

20.

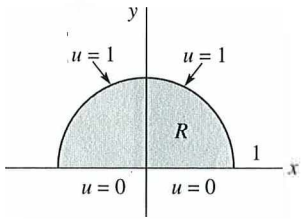


Figura 12.26 Problema de Dirichlet del problema 20

21.

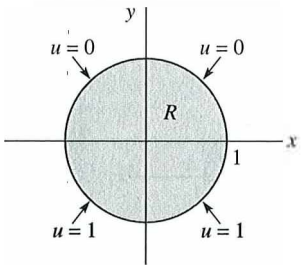


Figura 12.27 Problema de Dirichlet del problema 21

22.

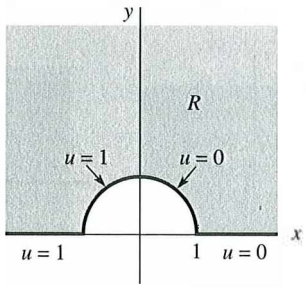


Figura 12.28 Problema de Dirichlet del problema 22

En los problemas del 23 al 26, utilice una transformación conforme adecuada y la función armónica $U = (c_0/\pi)[\text{Arg}(w - 1) - \text{Arg}(w + 1)]$ para resolver el problema de Dirichlet indicado.

23.

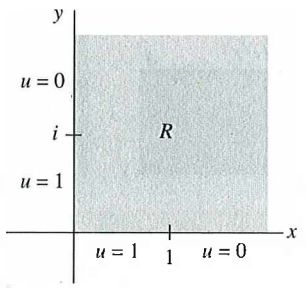


Figura 12.29 Problema de Dirichlet del problema 23

24.

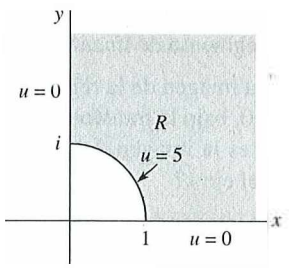


Figura 12.30 Problema de Dirichlet del problema 24

25.

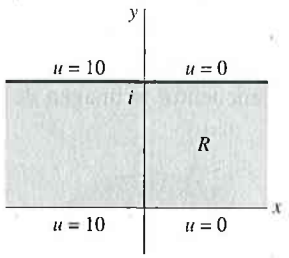


Figura 12.31 Problema de Dirichlet del problema 25

26.

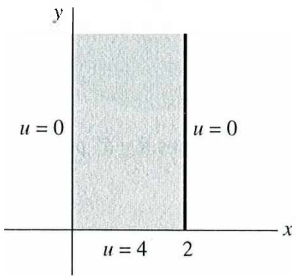


Figura 12.32 Problema de Dirichlet del problema 26

27. Una función real $\phi(x, y)$ se denomina **biarmónica** en un dominio D cuando satisface la ecuación diferencial de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0$$

en todos los puntos de D. La función de esfuerzos de Airy en la mecánica de sólidos y los potenciales de velocidad en el análisis de flujo de fluidos viscosos, son ejemplos de funciones biarmónicas.

a) Demuestre que si ϕ es biarmónica en D, entonces $u = \partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2$ es armónica en D.

b) Si $g(z)$ es analítica en D y $\phi(x, y) = \text{Re}(g(z))$, demuestre que ϕ es biarmónica en D.

12.3 Transformaciones racionales lineales

Introducción En muchas aplicaciones que involucran problemas de valor en la frontera asociados con la ecuación de Laplace, es necesario encontrar una transformación conforme que transforme un disco en el semiplano $v \geq 0$. Dicha transformación tiene que transformar la frontera circular del disco en la línea de frontera del semiplano. Una clase importante de transformaciones conformes elementales que transforman círculos en líneas (y viceversa) son las transformaciones racionales. En esta sección se definen y estudian este tipo especial de transformaciones.

■ **Transformación racional lineal** Si a, b, c y d son constantes complejas con $ad - bc \neq 0$, entonces la función compleja definida por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Se denomina una **transformación racional lineal**. Como

$$T'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

entonces T es conforme en z siempre y cuando $\Delta = ad - bc \neq 0$ y $z \neq -d/c$. (Si $\Delta = 0$, entonces $T'(z) = 0$ y $T(z)$ sería una función constante.) Las transformaciones racionales lineales conservan al círculo en un sentido que se precisa más adelante en esta sección, y, como se muestra en el ejemplo 8 de la sección 12.2, pueden ser útiles para resolver problemas de Dirichlet en regiones acotadas por círculos.

Obsérvese que cuando $c \neq 0$, $T(z)$ tiene un polo simple en $z_0 = -d/c$ y por lo tanto

$$\lim_{z \to z_0} |T(z)| = \infty.$$

Se escribe $T(z_0) = \infty$ como abreviación para este límite. Asimismo, si $c \neq 0$, entonces

$$\lim_{|z| \to \infty} T(z) = \lim_{|z| \to \infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c},$$

y se escribe $T(\infty) = a/c$.

Ejemplo 1 Una transformación racional lineal

Si $T(z) = (2z + 1)/(z - i)$, calcule $T(0)$, $T(\infty)$ y $T(i)$.

Solución Obsérvese que $T(0) = 1/(-i) = i$ y $T(\infty) = \lim_{|z| \to \infty} T(z) = 2$. Como $z = i$ es un polo simple para $T(z)$ se tiene que $\lim_{z \to i} |T(z)| = \infty$ y entonces se escribe $T(i) = \infty$. ❑

■ **Propiedad de conservación de círculo** Si $c = 0$, la transformación racional lineal se reduce a una función lineal $T(z) = Az + B$. En la sección 12.1 se plantea que dicha transformación se considera como la composición de una rotación, una amplificación y una traslación. Como tal, una función lineal transforma un círculo del plano z en un círculo del plano w. Cuando $c \neq 0$ se puede dividir $az + b$ entre $cz + d$ para obtener

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}. \tag{1}$$

Si se establece $A = (bc - ad)/c$ y $B = a/c$, $T(z)$ se escribe como la composición de transformaciones:

$$z_1 = cz + d, \quad z_2 = \frac{1}{z_1}, \quad w = Az_2 + B. \tag{2}$$

Una transformación racional lineal general se escribe entonces como la composición de dos funciones lineales y la inversión $w = 1/z$. Obsérvese que si $|z - z_1| = r$ y $w = 1/z$, entonces

$$\left| \frac{1}{w} - \frac{1}{w_1} \right| = \frac{|w - w_1|}{|w||w_1|} = r \quad \text{o} \quad |w - w_1| = (r|w_1|)|w - 0|. \tag{3}$$

No es difícil mostrar que el conjunto de todos los puntos w que satisfacen

$$|w - w_1| = \lambda |w - w_2| \tag{4}$$

es una línea cuando $\lambda = 1$ y es un círculo cuando $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. De (3) se deduce que la imagen del círculo $|z - z_1| = r$ bajo la inversión $w = 1/z$ es un círculo excepto cuando $r = 1/|w_1| = |z_1|$. En este último caso, el círculo original pasa a través del origen y la imagen es una línea; véase la figura 12.3. De (2) se deduce el siguiente teorema:

TEOREMA 12.3 Propiedad de conservación de círculo

Una transformación racional lineal transforma un círculo del plano z en una línea o en un círculo en el plano w. La imagen es una línea si y sólo si el círculo original pasa a través de un polo de la transformación racional lineal.

Demostración Se ha demostrado que una función lineal transforma un círculo en un círculo, mientras que una inversión transforma un círculo en un círculo o en una línea. De (2) se entiende que un círculo en el plano z se transforma en un círculo o en una línea en el plano w. Si el círculo original pasa por un polo z_0, entonces $T(z_0) = \infty$, de modo que la imagen no es acotada. Por lo tanto, la imagen de tal círculo debe ser una línea. Si el círculo original no pasa por z_0, entonces la imagen está acotada y debe ser un círculo. ❑

Ejemplo 2 Imágenes de círculos

Encuentre las imágenes de los círculos $|z| = 1$ y $|z| = 2$ bajo $T(z) = (z + 2)/(z - 1)$. ¿Cuáles son las imágenes del interior de estos círculos?

Solución El círculo $|z| = 1$ pasa por el polo $z_0 = 1$ de la transformación racional lineal y por ende la imagen es una línea. Como $T(-1) = -\frac{1}{2}$ y $T(i) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ se puede concluir que la imagen es la línea $u = -\frac{1}{2}$. La imagen del interior $|z| < 1$ es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$ o el semiplano $u > -\frac{1}{2}$. Utilizando $z = 0$ como *punto de prueba*, $T(0) = -2$, por lo que la imagen es el semiplano $u < -\frac{1}{2}$.

El círculo $|z| = 2$ no pasa a través del polo y por lo tanto la imagen es un círculo. Para $|z| = 2$,

$$|\bar{z}| = 2 \quad \text{y} \quad \overline{T(z)} = \overline{\frac{z+2}{z-1}} = \frac{\bar{z}+2}{\bar{z}-1} = T(\bar{z}).$$

Entonces, $\overline{T(z)}$ es un punto del círculo imagen, y así el círculo imagen es simétrico respecto al eje u. Como $T(-2) = 0$ y $T(2) = 4$, el centro del círculo es $w = 2$ y la imagen es el círculo $|w - 2| = 2$ (véase la figura 12.33). La imagen del interior $|z| < 2$ es el interior o el exterior del círculo imagen $|w - 2| = 2$. Como $T(0) = -2$ se concluye que la imagen es $|w - 2| > 2$.

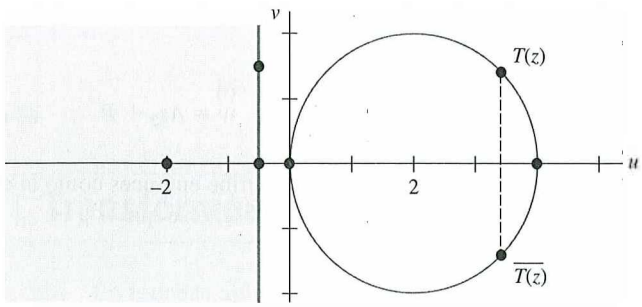


Figura 12.33 Imágenes de los puntos de prueba del ejemplo 2 ❑

■ **Construcción de transformaciones especiales** Con el fin de utilizar transformaciones racionales lineales para resolver problemas de Dirichlet, se deben construir funciones especiales que transformen una región circular dada R en una región objeti-

vo R' en la que el problema de Dirichlet correspondiente se pueda resolver. Como una frontera circular se determina por tres de sus puntos, se debe encontrar una transformación racional lineal $w = T(z)$ que transforme tres puntos dados z_1, z_2 y z_3 de la frontera de R hacia tres puntos w_1, w_2 y w_3 de la frontera de R'. Además, el interior de R' debe ser la imagen del interior de R; véase la figura 12.34.

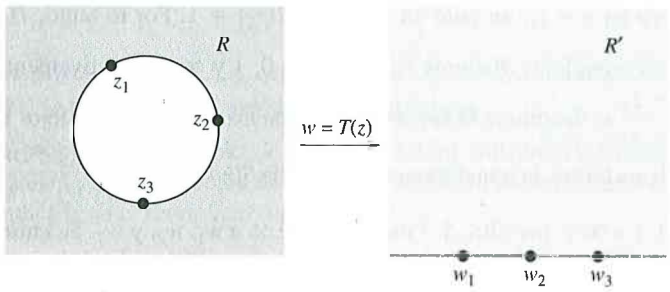


Figura 12.34 R' es la imagen de R bajo T.

■ **Métodos matriciales** Se pueden utilizar métodos matriciales para simplificar muchos de los cálculos. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se asocia con $T(z) = (az + b)/(cz + d)$.* Si $T_1(z) = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1)$ y $T_2(z) = (a_2z + b_2)/(c_2z + d_2)$, entonces la función compuesta $T(z) = T_2(T_1(z))$ viene dada por $T(z) = (az + b)/(cz + d)$, donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Si $w = T(z) = (az + b)/(cz + d)$ se puede despejar z para obtener $z = (dw - b)/(-cw + a)$. Por ende la inversa de la transformación racional lineal T es $T^{-1}(w) = (dw - b)/(-cw + a)$ y se asocia la matriz

$$\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

Con T^{-1}. La matriz adj $\mathbf{A}$ es la matriz adjunta de $\mathbf{A}$ (véase la sección 2.6), que es la matriz para T.

Ejemplo 3 Uso de matrices para encontrar una transformada inversa

Si $T(z) = \dfrac{2z - 1}{z + 2}$ y $S(z) = \dfrac{z - i}{iz - 1}$, encuentre $S^{-1}(T(z))$.

Solución De (5) y (6) se tiene $S^{-1}(T(z)) = (az + b)/(cz + d)$, donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{adj}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + i & 1 + 2i \\ 1 - 2i & 2 + i \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $S^{-1}(T(z)) = \dfrac{(-2 + i)z + 1 + 2i}{(1 - 2i)z + 2 + i}$. ❑

---

*La matriz $\mathbf{A}$ no es única, puesto que el numerador y el denominador de $T(z)$ pueden multiplicarse por una constante no nula.

Triples a triples La transformación racional lineal

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

tiene un cero en $z = z_1$, un polo en $z = z_3$, y $T(z_2) = 1$. Por lo tanto, $T(z)$ transforma tres números complejos *distintos* z_1, z_2 y z_3 en 0, 1 y ∞, respectivamente. El término $\dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$ se denomina la **razón cruzada** de los números complejos z, z_1, z_2 y z_3.

De la misma forma, la transformación compleja $S(w) = \dfrac{w - w_1}{w - w_3}\dfrac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$ manda a w_1, w_2 y w_3 a 0, 1 e ∞ y, por ello, S^{-1} manda 0, 1 e ∞ a w_1, w_2, y w_3. Se entiende entonces que la transformación racional lineal $w = S^{-1}(T(z))$ transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 en w_1, w_2 y w_3. De $w = S^{-1}(T(z))$ se tiene que $S(w) = T(z)$ y se concluye que

$$\frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{7}$$

Al construir una transformación racional lineal que transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 en w_1, w_2 y w_3 se pueden utilizar métodos matriciales para calcular $w = S^{-1}(T(z))$. O bien, se puede sustituir en (7) y resolver la ecuación resultante para w.

Ejemplo 4 Construcción de una transformación racional lineal

Construya una transformación racional lineal que transforme los puntos 1, i y -1 del círculo $|z| = 1$ en los puntos -1, 0 y 1 del eje real.

Solución Sustituyendo en (7) se tiene que

$$\frac{w + 1}{w - 1}\frac{0 - 1}{0 - (-1)} = \frac{z - 1}{z + 1}\frac{i + 1}{i - 1}$$

o

$$-\frac{w + 1}{w - 1} = -i\frac{z - 1}{z + 1}.$$

Despejando w se obtiene $w = -i(z - i)/(z + i)$. O bien, se puede utilizar el método matricial para calcular $w = S^{-1}(T(z))$. ❑

Cuando $z_k = \infty$ desempeña el papel de uno de los puntos de una tripleta, la definición de la relación cruzada se cambia reemplazando cada factor que contenga a z_k por 1. Por ejemplo, si $z_2 = \infty$, tanto $z_2 - z_3$ como $z_2 - z_1$ se reemplazan por 1, dando entonces la relación cruzada $(z - z_1)/(z - z_3)$.

Ejemplo 5 Construcción de una transformación racional lineal

Construya una transformación racional lineal que transforme los puntos ∞, 0 y 1 del eje real hacia los puntos 1, i y -1 del círculo $|w| = 1$.

Solución Como $z_1 = \infty$, los términos $z - z_1$ y $z_2 - z_1$ del producto cruz se reemplazan por 1. Se deduce entonces que

$$\frac{w - 1}{w + 1}\frac{i + 1}{i - 1} = \frac{1}{z - 1}\frac{0 - 1}{1}$$

o

$$S(w) = -i\frac{w - 1}{w + 1} = \frac{-1}{z - 1} = T(z).$$

Si se utiliza el método matricial para encontrar $w = S^{-1}(T(z))$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{adj}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1+i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$$

y así $w = \dfrac{-iz - 1 + i}{-iz + 1 + i} = \dfrac{z - 1 - i}{z - 1 + i}$. ❑

Ejemplo 6 Solución de un problema de Dirichlet

Resuelva el problema de Dirichlet de la figura 12.35*a*) utilizando la transformación conforme y mediante la construcción de una transformación racional lineal que transforme la región indicada en el semiplano superior.

Solución Cada uno de los círculos de frontera $|z| = 1$ y $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ pasan por $z = 1$. Se puede entonces transformar cada círculo de frontera en una línea seleccionando una transformación racional lineal que tenga $z = 1$ como polo. Si se solicita además que $T(i) = 0$ y $T(-1) = 1$, entonces

$$T(z) = \frac{z - i}{z - 1}\,\frac{-1 - 1}{-1 - i} = (1 - i)\frac{z - i}{z - 1}.$$

Como $T(0) = 1 + i$ y $T(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + i$, T transforma el interior del círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior y transforma el círculo $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ en la línea $v = 1$; la figura 12.35*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas.

La función armónica $U(u, v) = v$ es la solución al problema de Dirichlet simplificado en el plano w, y entonces, por el teorema 12.2, $u(x, y) = U(T(z))$ es la solución al problema de Dirichlet original del plano z.

Como la parte imaginaria de $T(z) = (1 - i)\dfrac{z - i}{z - 1}$ es $\dfrac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$, la solución viene dada por

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

Las curvas de nivel $u(x, y) = c$ se escriben como

$$\left(x - \frac{c}{1 + c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{1 + c}\right)^2$$

y son, por lo tanto, círculos que pasan por $z = 1$; véase la figura 12.36. Estas curvas de nivel pueden interpretarse como las isotermas de la distribución de temperatura estado estable inducida por temperaturas de frontera. ❑

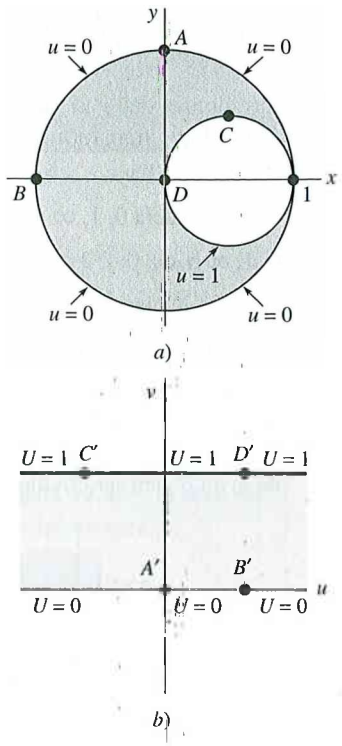


Figura 12.35 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 6

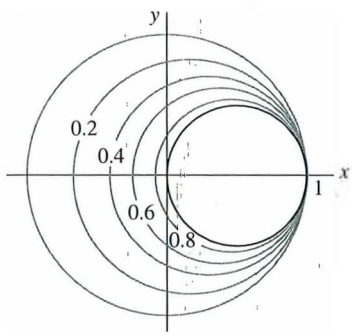


Figura 12.36 Los círculos son las curvas de nivel del ejemplo 6

EJERCICIOS 12.3 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-29.

En los problemas del 1 al 4, se indica una transformación racional lineal.

a) Calcule $T(0)$, $T(1)$ y $T(\infty)$.

b) Encuentre las imágenes de los círculos $|z| = 1$ y $|z - 1| = 1$.

c) Encuentre la imagen del disco $|z| \leq 1$.

1. $T(z) = \dfrac{i}{z}$
2. $T(z) = \dfrac{1}{z - 1}$
3. $T(z) = \dfrac{z + 1}{z - 1}$
4. $T(z) = \dfrac{z - i}{z}$

En los problemas del 5 al 8, utilice el método matricial para calcular $S^{-1}(w)$ y $S^{-1}(T(z))$ para cada par de transformaciones racionales lineales.

5. $T(z) = \dfrac{z}{iz - 1}$ y $S(z) = \dfrac{iz + 1}{z - 1}$
6. $T(z) = \dfrac{iz}{z - 2i}$ y $S(z) = \dfrac{2z + 1}{z + 1}$
7. $T(z) = \dfrac{2z - 3}{z - 3}$ y $S(z) = \dfrac{z - 2}{z - 1}$

8. $T(z) = \dfrac{z - 1 + i}{iz - 2}$ y $S(z) = \dfrac{(2 - i)z}{z - 1 - i}$

En los problemas del 9 al 16, construya una transformación racional lineal que transforme la tripleta indicada z_1, z_2 y z_3 en la tripleta w_1, w_2 y w_3.

9. $-1, 0, 2$ hacia $0, 1, \infty$
10. $i, 0, -i$ hacia $0, 1, \infty$
11. $0, 1, \infty$ hacia $0, i, 2$
12. $0, 1, \infty$ hacia $1 + i, 0, 1 - i$
13. $-1, 0, 1$ hacia $i, \infty, 0$
14. $-1, 0, 1$ hacia $\infty, -i, 1$
15. $1, i, -i$ hacia $-1, 0, 3$
16. $1, i, -i$ hacia $i, -i, 1$
17. Utilice los resultados del ejemplo 2 y la función armónica $U = (\log_e r)/(\log_e r_0)$ para resolver el problema de Dirichlet de la figura 12.37. Explique por qué las curvas de nivel deben ser círculos.

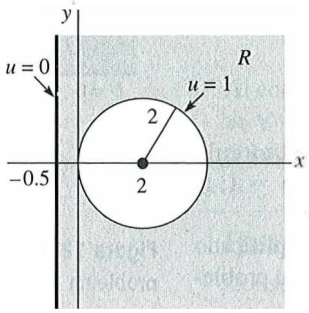


Figura 12.37 Problema de Dirichlet del problema 17

18. Utilice la transformación racional lineal que transforma $-1, 1, 0$ en $0, 1, \infty$ para resolver el problema de Dirichlet de la figura 12.38. Explique por qué, con una excepción, todas las curvas de nivel deben ser círculos. ¿Qué curva de nivel es una línea?

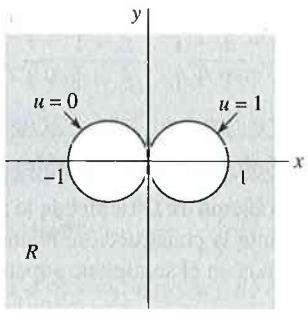
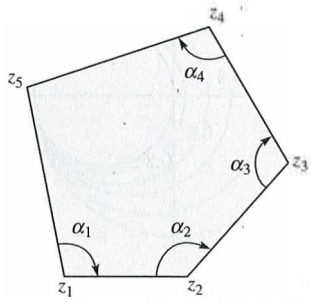
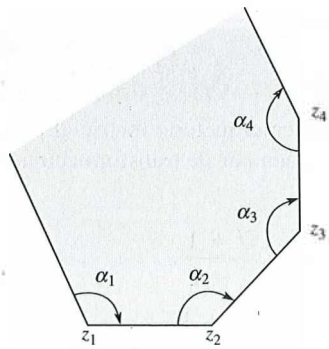


Figura 12.38 Problema de Dirichlet del problema 18

19. Deduzca la transformación conforme H-1 de las transformaciones conformes del apéndice.
20. Deduzca la transformación conforme H-5 de las transformaciones conformes del apéndice transformando en primer lugar $1, i, -1$ en $\infty, i, 0$.
21. Demuestre que la composición de dos transformaciones racionales lineales es una transformación racional lineal, y compruebe (5).
22. Si $w_1 \neq w_2$ y $\lambda > 0$ demuestre que el conjunto de todos los puntos w que satisfacen $|w - w_1| = \lambda|w - w_2|$ es una línea cuando $\lambda = 1$ y es un círculo cuando $\lambda \neq 1$. [*Sugerencia:* Escriba como $|w - w_1|^2 = \lambda^2|w - w_2|^2$ y expanda.]



a) Región acotada



b) Región no acotada

Figura 12.39 Regiones poligonales

12.4 Transformaciones de Schwarz-Christoffel

■ **Introducción** Si D' es un dominio simplemente conexo con al menos un punto de frontera, entonces el famoso **teorema de la transformación de Riemann** asegura la existencia de una función analítica g que transforma de manera conforme el disco abierto unitario $|z| < 1$ en D'. El teorema de la transformación de Riemann es un teorema de existencia pura que no especifica una fórmula para la transformación conforme. Como el semiplano superior $y > 0$ puede transformarse de manera conforme en este disco mediante una transformación racional lineal, se entiende que existe una transformación conforme f entre el semiplano superior y D'. En particular, existen funciones analíticas que transforman el semiplano superior en regiones poligonales de los tipos mostrados en la figura 12.39. A diferencia del teorema de la transformación de Riemann, la fórmula de Schwarz-Christoffel especifica una forma para la derivada $f'(z)$ de una transformación conforme del semiplano superior en una región poligonal acotada o no acotada.

■ **Casos especiales** Para justificar la fórmula general de Schwarz-Christoffel, se examina en primer lugar el efecto de la transformación $f(z) = (z - x_1)^{\alpha/\pi}$, donde $0 < \alpha < 2\pi$, sobre el semiplano superior $y \geq 0$ mostrado en la figura 12.40*a*). Esta transformación es

la composición de la traslación $\zeta = z - x_1$ y la función de potencias real $w = \zeta^{\alpha/\pi}$. Como $w = \zeta^{\alpha/\pi}$ cambia el ángulo de una cuña por un factor de α/π, el ángulo interior de la región imagen es $(\alpha/\pi)\pi = \alpha$. Véase la figura 12.40*b*).

Obsérvese que $f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha/\pi)-1}$ para $A = \alpha/\pi$. A continuación supóngase que $f(z)$ es una función analítica en el semiplano superior y que tiene como derivada

$$f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1}, \tag{1}$$

donde $x_1 < x_2$. Al determinar las imágenes de los segmentos de línea del eje x, se utiliza el hecho de que una curva $w = w(t)$ del plano w es un segmento de línea cuando el argumento de su vector tangente $w'(t)$ es constante. De (1) se obtiene que un argumento de $f'(t)$ viene dado por

$$\arg f'(t) = \operatorname{Arg} A + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1\right)\operatorname{Arg}(t - x_2). \tag{2}$$

Como $\operatorname{Arg}(t - x) = \pi$ para $t < x$ se puede encontrar la variación de $\arg f'(t)$ a lo largo del eje x. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

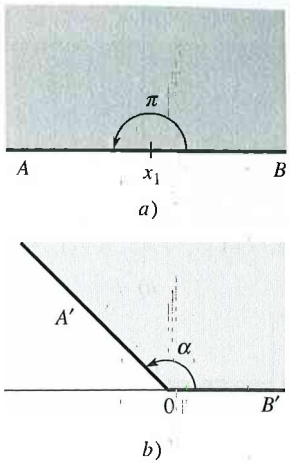


Figura 12.40 Imagen del semiplano superior

Intervalo	$\arg f'(t)$	Cambio en el argumento
$(-\infty, x_1)$	$\operatorname{Arg} A + (\alpha_1 - \pi) + (\alpha_2 - \pi)$	0
(x_1, x_2)	$\operatorname{Arg} A + (\alpha_2 - \pi)$	$\pi - \alpha_1$
(x_2, ∞)	$\operatorname{Arg} A$	$\pi - \alpha_2$

Como $\arg f'(t)$ es constante en los intervalos de la tabla, las imágenes son segmentos de línea, y la figura 12.41 muestra la imagen del semiplano superior. Nótese que los ángulos interiores de la región imagen poligonal son α_1 y α_2. Esta observación se generaliza para obtener la fórmula de Schwarz-Christoffel.

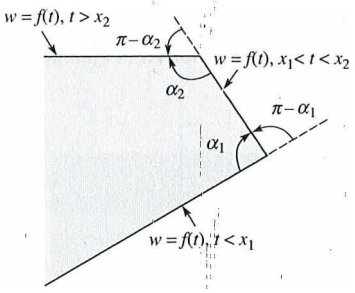


Figura 12.41 Imagen del semiplano superior

TEOREMA 12.4 Fórmula de Schwarz-Christoffel

Sea $f(z)$ una función analítica en el semiplano superior $y > 0$ y que tiene como derivada

$$f'(z) = A(z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}, \tag{3}$$

donde $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ y cada α_i cumple con $0 < \alpha_i < 2\pi$. Entonces $f(z)$ transforma el semiplano superior $y \geq 0$ en una región poligonal con ángulos interiores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Al aplicar esta fórmula a una región objetivo poligonal particular, se deben observar cuidadosamente los siguientes comentarios:

i) Se puede elegir la ubicación de tres de los puntos x_k en el eje x. Una elección sensata simplifica el cálculo de $f(z)$. La selección de los puntos restantes depende de la forma del polígono objetivo.

ii) Una fórmula general para $f(z)$ es

$$f(z) = A\left(\int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\, dz\right) + B,$$

y por lo tanto $f(z)$ puede considerarse la composición de la transformación conforme

$$g(z) = \int (z - x_1)^{(\alpha_1/\pi)-1}(z - x_2)^{(\alpha_2/\pi)-1} \cdots (z - x_n)^{(\alpha_n/\pi)-1}\, dz$$

y la función lineal $w = Az + B$. La función lineal $w = Az + B$ permite aumentar, rotar y trasladar el polígono imagen producido por $g(z)$; véase sección 12.1.

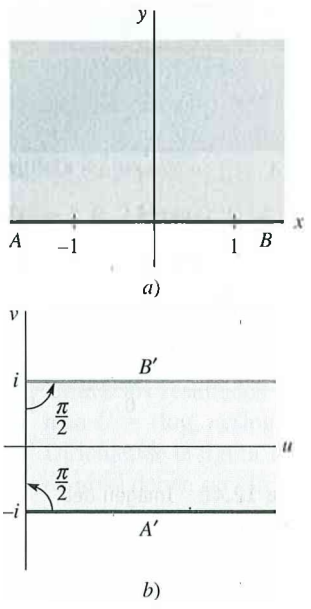


Figura 12.42 Imagen del semiplano superior en el ejemplo 1

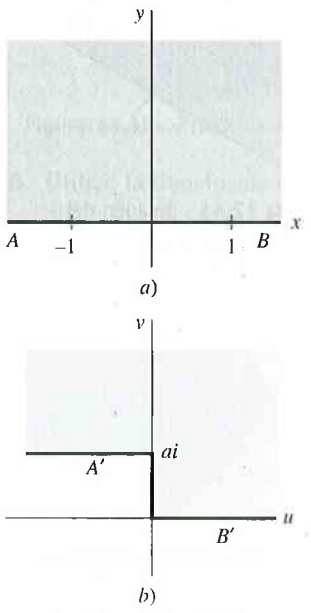


Figura 12.43 Imagen del semiplano superior en el ejemplo 2

iii) Si la región poligonal está acotada, únicamente $n - 1$ de los n ángulos interiores debería incluirse en la fórmula de Schwarz-Christoffel. Como ilustración, los ángulos interiores α_1, α_2, α_3 y α_4 son suficientes para determinar la fórmula de Schwarz-Christoffel para el pentágono mostrado en la figura 12.39*a*).

Ejemplo 1 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en la franja $|v| \leq 1$, $u \geq 0$.

Solución Se puede seleccionar $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$ en el eje x, y se construye una transformación conforme f con $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$; véase la figura 12.42. Como $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, la fórmula de Schwarz-Christoffel (3) da

$$f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2} = A\frac{1}{(z^2 - 1)^{1/2}} = \frac{A}{i}\frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}.$$

Por lo tanto, $f(z) = -Ai \operatorname{sen}^{-1} z + B$. Como $f(-1) = -i$ y $f(1) = i$ se obtiene, respectivamente,

$$-i = Ai\frac{\pi}{2} + B \quad \text{y} \quad i = -Ai\frac{\pi}{2} + B$$

y se concluye que $B = 0$ y $A = -2/\pi$. Entonces, $f(z) = (2/\pi)i \operatorname{sen}^{-1} z$. ❑

Ejemplo 2 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en la región mostrada en la figura 12.43*b*).

Solución Se seleccionan de nuevo $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, y se plantea que $f(-1) = ai$ y $f(1) = 0$. Como $\alpha_1 = 3\pi/2$ y $\alpha_2 = \pi/2$, la fórmula de Schwarz-Christoffel (3) da

$$f'(z) = A(z + 1)^{1/2}(z - 1)^{-1/2}.$$

Si se escribe $f'(z)$ como $A(z/(z^2 - 1)^{1/2} + 1/(z^2 - 1)^{1/2})$ se entiende que

$$f(z) = A[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z] + B.$$

Obsérvese que $\cosh^{-1}(-1) = \pi i$ y $\cosh^{-1} 1 = 0$, por lo que $ai = f(-1) = A(\pi i) + B$ y $0 = f(1) = B$. Por lo tanto, $A = a/\pi$ y $f(z) = (a/\pi)[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z]$. ❑

El siguiente ejemplo muestra que no siempre es posible encontrar $f(z)$ en términos de funciones elementales.

Ejemplo 3 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en el interior del triángulo equilátero mostrado en la figura 12.44*b*).

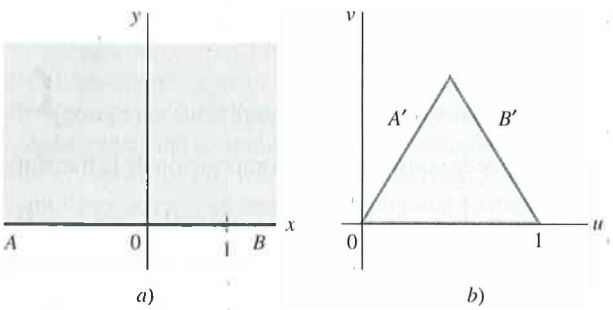


Figura 12.44 Imagen del semiplano superior del ejemplo 3

Solución Puesto que la región poligonal está acotada, únicamente dos de los tres ángulos interiores de 60° deben incluirse en la fórmula de Schwarz-Christoffel. Si $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$ se obtiene $f'(z) = Az^{-2/3}(z - 1)^{-2/3}$. No es posible calcular $f(z)$ en términos de funciones elementales; sin embargo, se puede utilizar el teorema 10.8 para construir la antiderivada

$$f(z) = A\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds + B.$$

Si se plantea que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, se deduce que $B = 0$ y

$$1 = A\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Puede mostrarse que esta última integral es $\Gamma(1/3)$, donde Γ denota a la función gamma. Por lo tanto, la transformación conforme requerida es

$$f(z) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{3})}\int_0^z \frac{1}{s^{2/3}(s-1)^{2/3}}\,ds. \qquad \square$$

La fórmula de Schwarz-Christoffel se utiliza a veces para sugerir una posible transformación conforme del semiplano superior en una región no poligonal R'. Un primer paso clave es aproximar R' por medio de regiones poligonales. Esto se ilustra en el ejemplo final.

Ejemplo 4 Construcción de una transformación conforme

Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior en el semiplano superior sin la línea horizontal $v = \pi$, $u \leq 0$.

Solución La región objetivo no poligonal puede aproximarse por una región poligonal uniendo un segmento de línea desde $w = \pi i$ a un punto u_0 del eje u en su lado negativo; véase la figura 12.45*b*). Si se plantea que $f(-1) = \pi i$ y $f(0) = u_0$, la transformación de Schwarz-Christoffel satisface

$$f'(z) = A(z+1)^{(\alpha_1/\pi)-1}z^{(\alpha_2/\pi)-1}.$$

Obsérvese que cuando u_0 tiende a $-\infty$, los ángulos interiores α_1 y α_2 tienden a 2π y 0, respectivamente. Esto sugiere examinar transformaciones conformes que satisfagan $w' = A(z+1)^1z^{-1} = A(1 + 1/z)$ o $w = A(z + \operatorname{Ln} z) + B$.

Se determina primero la imagen del semiplano superior bajo $g(z) = z + \operatorname{Ln} z$ y entonces se traslada la región imagen, si es necesario. Para una t real,

$$g(t) = t + \log_e|t| + i\operatorname{Arg} t.$$

Si $t < 0$, $\operatorname{Arg} t = \pi$ y $u(t) = t + \log_e|t|$ varía de $-\infty$ a -1. Se deduce entonces que $w = g(t)$ se mueve a lo largo de la línea $v = \pi$ de $-\infty$ a -1. Cuando $t > 0$, $\operatorname{Arg} t = 0$ y $u(t)$ varía de $-\infty$ hasta ∞. Por lo tanto, g transforma el eje x positivo en el eje u. Se puede concluir que $g(z) = z + \operatorname{Ln} z$ transforma el semiplano superior en el semiplano superior sin la línea horizontal $v = \pi$, $u \leq -1$. Entonces, $w = z + \operatorname{Ln} z + 1$ transforma el semiplano superior en la región objetivo original. $\square$

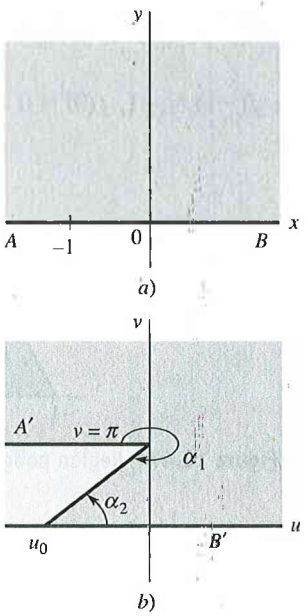


Figura 12.45 Imagen del semiplano superior del ejemplo 4

Muchas de las transformaciones conformes del apéndice IV se deducen utilizando la fórmula de Schwarz-Christoffel, y se muestra en la sección 12.6 que estas transformaciones son especialmente útiles al analizar flujos bidimensionales de fluidos.

EJERCICIOS 12.4 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas del 1 al 4, utilice (2) para describir la imagen del semiplano superior $y \geq 0$ bajo la transformación conforme $w = f(z)$ que satisface las condiciones indicadas. *No* intente encontrar $f(z)$.

1. $f'(z) = (z - 1)^{-1/2}, \quad f(1) = 0$
2. $f'(z) = (z + 1)^{-1/3}, f(-1) = 0$
3. $f'(z) = (z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{1/2}, f(-1) = 0$
4. $f'(z) = (z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-3/4}, \quad f(-1) = 0$

En los problemas del 5 al 8, encuentre $f'(z)$ para la región poligonal indicada utilizando $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, etcétera. *No* intente encontrar $f(z)$.

5. $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$

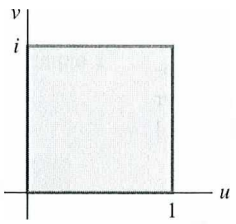


Figura 12.46 Región poligonal para el problema 5

6. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$

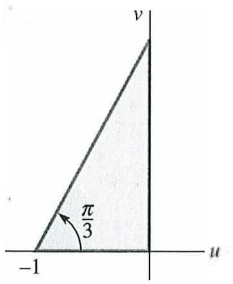


Figura 12.47 Región poligonal para el problema 6

7. $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$

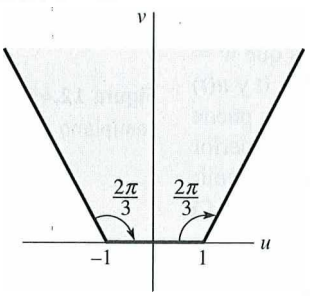


Figura 12.48 Región poligonal para el problema 7

8. $f(-1) = i$, $f(0) = 0$

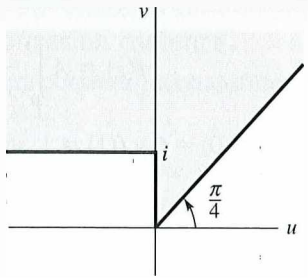


Figura 12.49 Región poligonal para el problema 8

9. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la región de la figura 12.50. Plantee que $f(-1) = \pi i$ y $f(1) = 0$.

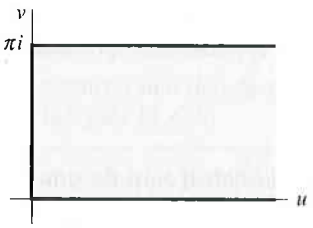


Figura 12.50 Imagen del semiplano superior del problema 9

10. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme desde el semiplano superior $y \geq 0$ hasta la región de la figura 12.51. Plantee que $f(-1) = -ai$ y $f(1) = ai$.

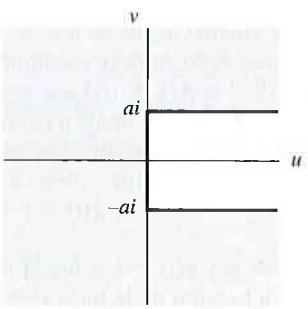


Figura 12.51 Imagen del semiplano superior del problema 10

11. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la franja horizontal $0 \leq v \leq \pi$ aproximando primero la franja por medio de la región poligonal mostrada en la figura 12.52. Plantee que $f(-1) = \pi i, f(0) =$

$w_2 = -\overline{w}_1$ y $f(1) = 0$, y que $w_1 \to \infty$ en la dirección horizontal.

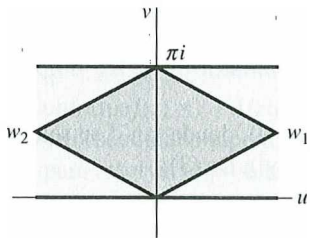


Figura 12.52 Imagen del semiplano superior del problema 11

12. Utilice la fórmula de Schwarz-Christoffel para construir una transformación conforme del semiplano superior $y \geq 0$ en la cuña $0 \leq \text{Arg } w \leq \pi/4$ aproximando en primer lugar la cuña por medio de la región mostrada en la figura 12.53. Plantee que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$ y que $\theta \to 0$.

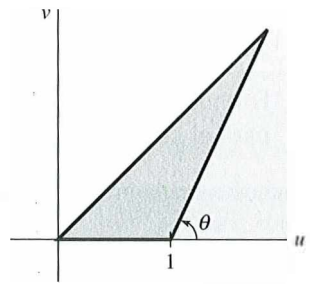


Figura 12.53 Imagen del semiplano superior del problema 12

13. Verifique M-4 del apéndice aproximando primero la región R' por medio de la región poligonal mostrada en la figura 12.54. Plantee que $f(-1) = -u_1, f(0) = ai$ y $f(1) = u_1$ haciendo que $u_1 \to 0$ a lo largo del eje u.

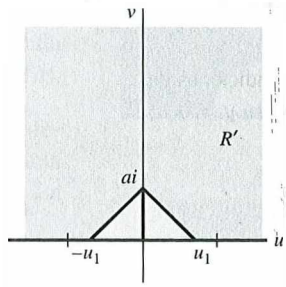


Figura 12.54 Imagen del semiplano superior del problema 13

14. Demuestre que si una curva del plano w se parametriza por $w = w(t)$, donde $a \leq t \leq b$ y $\arg w'(t)$ es constante, entonces la curva es un segmento de línea. [*Sugerencia:* Si $w(t) = u(t) + iv(t)$, entonces $\tan(\arg w'(t)) = dv/du$.]

12.5 Fórmulas integrales de Poisson

Introducción El éxito del método de transformación conforme depende del reconocimiento de la solución al nuevo problema de Dirichlet en la región imagen R'. Sería entonces de utilidad si se pudiera encontrar una solución general para problemas de Dirichlet en el semiplano superior $y \geq 0$ o en el disco unitario $|z| \leq 1$. La **fórmula integral de Poisson** para el semiplano superior proporciona tal solución expresando el valor de una función armónica $u(x, y)$ en un punto del interior del semiplano superior en función de sus valores en la frontera $y = 0$.

Fórmulas para el semiplano superior Para desarrollar la fórmula se considera en primer lugar que la función de frontera viene dada por $u(x, 0) = f(x)$, donde $f(x)$ es la función escalón indicada en la figura 12.55. La solución del problema correspondiente de Dirichlet en el semiplano superior es

$$u(x, y) = \frac{u_i}{\pi}[\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - a)]. \tag{1}$$

Como $\text{Arg}(z - b)$ es un ángulo exterior del triángulo formado por z, a y b, entonces $\text{Arg}(z - b) = \theta(z) + \text{Arg}(z - a)$, donde $0 < \theta(z) < \pi$, por lo que se puede escribir

$$u(x, y) = \frac{u_i}{\pi}\theta(z) = \frac{u_i}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{z - b}{z - a}\right). \tag{2}$$

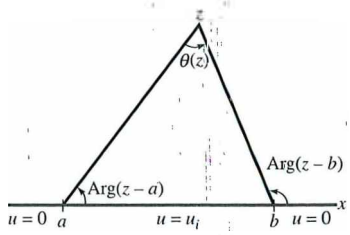


Figura 12.55 Condiciones de frontera en $y = 0$

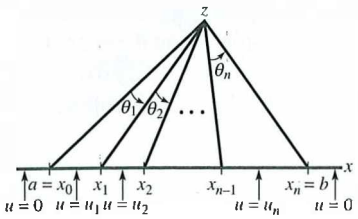


Figura 12.56 Condiciones de frontera generales en $y = 0$

El principio de superposición se utiliza para resolver el problema de Dirichlet más general que se plantea en la figura 12.56. Si $u(x, 0) = u_i$ para $x_{i-1} \le x \le x_i$ y $u(x, 0) = 0$ fuera del intervalo $[a, b]$, entonces de (1),

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\pi} [\text{Arg}(z - x_i) - \text{Arg}(z - x_{i-1})] = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} u_i \theta_i(z). \tag{3}$$

Obsérvese que $\text{Arg}(z - t) = \tan^{-1}(y/(x - t))$, donde $\tan^{-1}$ se selecciona entre 0 y π, y entonces $(d/dt)\,\text{Arg}(z - t) = y/((x - t)^2 + y^2)$. De (3),

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u_i \frac{d}{dt} \text{Arg}(z - t)\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{u_i y}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

Como $u(x, 0) = 0$ fuera del intervalo $[a, b]$ se tiene que

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt. \tag{4}$$

Una función continua por tramos acotada puede aproximarse por medio de funciones escalón y, por lo tanto, la explicación sugiere que (4) es la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior; éste es el contenido del teorema 12.5.

TEOREMA 12.5 Fórmula integral de Poisson para el semiplano superior

Sea $u(x, 0)$ una función continua en tramos en cada intervalo finito y acotado en $-\infty < x < \infty$. Entonces la función definida por

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t, 0)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt$$

es la solución del problema de Dirichlet correspondiente sobre el semiplano superior $y \ge 0$.

Aunque existen unas cuantas funciones para las que es posible calcular la integral (4), en general se requiere de métodos numéricos para calcular la integral.

Ejemplo 1 Solución de un problema de Dirichlet

Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = x$ cuando $|x| < 1$ y $u(x, 0) = 0$ para los demás casos.

Solución Por medio de la fórmula integral de Poisson

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{t}{(x - t)^2 + y^2}\, dt.$$

Mediante la sustitución $s = x - t$, se puede mostrar que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{y}{2} \log_e((x - t)^2 + y^2) - x \tan^{-1}\left(\frac{x - t}{y}\right) \right] \Bigg|_{t=-1}^{t=1},$$

que se simplifica a

$$u(x, y) = \frac{y}{2\pi} \log_e \left[\frac{(x - 1)^2 + y^2}{(x + 1)^2 + y^2} \right] + \frac{x}{\pi} \left[\tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x - 1}{y}\right) \right]. \quad \square$$

En la mayoría de ejemplos y ejercicios, $u(x, 0)$ es una función escalón, y se utiliza la solución integrada (3) en vez de (4). Si el primer intervalo es $(-\infty, x_1)$, entonces el tér-

mino $\text{Arg}(z - x_1) - \text{Arg}(z - a)$ de la suma debería reemplazarse por $\text{Arg}(z - x_1)$. De la misma manera, si el último intervalo es (x_{n-1}, ∞), entonces $\text{Arg}(z - b) - \text{Arg}(z - x_{n-1})$ debería reemplazarse por $\pi - \text{Arg}(z - x_{n-1})$.

Ejemplo 2 Solución de un problema de Dirichlet

La transformación conforme $f(z) = z + 1/z$ transforma la región del semiplano superior exterior al círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior $v \geq 0$. Utilice esta transformación y la fórmula integral de Poisson para resolver el problema de Dirichlet mostrado en la figura 12.57*a*).

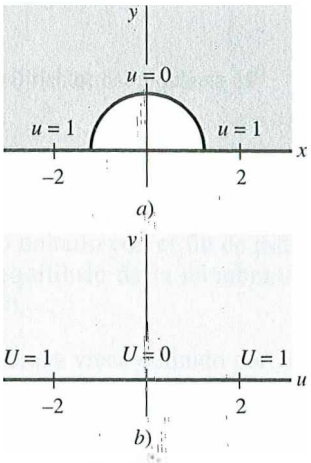


Figura 12.57 Imagen del problema de Dirichlet del ejemplo 2

Solución Utilizando los resultados del ejemplo 4 de la sección 12.2 se pueden transferir las condiciones de frontera al plano w; véase la figura 12.57*b*). Como $U(u, 0)$ es una función escalón se utiliza la solución integrada (3) en vez de la integral de Poisson. La solución al nuevo problema de Dirichlet es

$$U(u, v) = \frac{1}{\pi}\text{Arg}(w + 2) + \frac{1}{\pi}[\pi - \text{Arg}(w - 2)] = 1 + \frac{1}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{w + 2}{w - 2}\right),$$

y por lo tanto

$$u(x, y) = U\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{z + 1/z + 2}{z + 1/z - 2}\right),$$

que se simplifica a $u(x, y) = 1 + \frac{1}{\pi}\text{Arg}\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$. ❑

■ **Fórmula para el disco unitario** Una fórmula integral de Poisson puede también desarrollarse para resolver el problema general de Dirichlet para el disco unitario:

TEOREMA 12.6 Fórmula integral de Poisson para el disco unitario

Sea $u(e^{i\theta})$ una función acotada y continua en tramos para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Entonces la solución al problema de Dirichlet correspondiente en el disco unitario abierto $|z| < 1$ viene dada por

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt. \tag{5}$$

■ **Interpretación geométrica** La figura 12.58 muestra una membrana delgada (como película de jabón) estirada a través de un marco definido por $u = u(e^{i\theta})$. El desplazamiento u en la dirección perpendicular al plano z satisface la **ecuación de onda bidimensional**

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

por lo que en el equilibrio, la función desplazamiento $u = u(x, y)$ es armónica. La fórmula (5) proporciona una solución explícita para el desplazamiento u y tiene la ventaja de que la integral se encuentra sobre el intervalo finito $[-\pi, \pi]$. Cuando la integral no puede calcularse se utilizan procedimientos de integración numérica estándar para estimar $u(x, y)$ en un punto fijo $z = x + iy$ con $|z| < 1$.

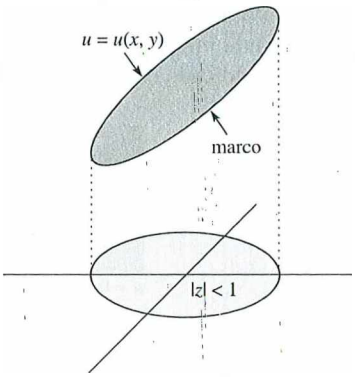


Figura 12.58 Membrana delgada sobre un marco

Ejemplo 3 Desplazamiento de una membrana

Se define el marco para una membrana por medio de $u(e^{i\theta}) = |\theta|$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Estime el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

Solución Utilizando (5) se obtiene $u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}\,dt$. Cuando $(x, y) = (0, 0)$ se obtiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Para los dos valores restantes de (x, y), la integral no es elemental y debe estimarse utilizando un procedimiento de integración numérica. Utilizando la regla de Simpson se obtiene (para cuatro dígitos decimales) $u(-0.5, 0) = 2.2269$ y $u(0.5, 0) = 0.9147$. ❑

Formulación por series de Fourier La fórmula integral de Poisson para el disco unitario es de hecho una forma compacta de escribir la solución con series de Fourier para la ecuación de Laplace desarrollada en el capítulo 6. Para ver esto, obsérvese en primer lugar que $u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta$ y $v_n(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta$ son armónicos, puesto que estas funciones son las partes real e imaginaria de z^n. Si a_0, a_n y b_n se eligen como los coeficientes de Fourier para $u(e^{i\theta})$ donde $-\pi < \theta < \pi$, entonces, por el principio de superposición,

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \operatorname{sen} n\theta) \tag{6}$$

es armónica y $u(1, \theta) = (a_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) = u(e^{i\theta})$. Como la solución al problema de Dirichlet viene también dada por (5) se tiene que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2}\, dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \operatorname{sen} n\theta).$$

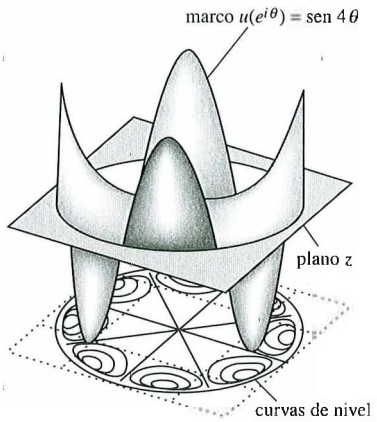


Figura 12.59 Curvas de nivel del ejemplo 4

Ejemplo 4 Solución de un problema de Dirichlet

Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el disco unitario que satisface la condición de frontera $u(e^{i\theta}) = \operatorname{sen} 4\theta$. Bosqueje la curva de nivel $u = 0$.

Solución En vez de trabajar con la integral de Poisson (5) se utiliza la solución con series de Fourier (6), que se reduce a $u(r, \theta) = r^4 \operatorname{sen} 4\theta$. Por lo tanto, $u = 0$ si y sólo si, $\operatorname{sen} 4\theta = 0$. Esto implica que $u = 0$ en las líneas $x = 0$, $y = 0$ y $y = \pm x$.

Si se cambia a coordenadas rectangulares, $u(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$. La superficie $u(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$, el marco $u(e^{i\theta}) = \operatorname{sen} 4\theta$, y el sistema de curvas de nivel se pueden bosquejar utilizando programas gráficos y se muestran en la figura 12.59. ❑

EJERCICIOS 12.5 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas al 1 del 4, utilice la solución integrada (3) a la fórmula integral de Poisson para resolver el problema de Dirichlet indicado en el semiplano superior.

1.

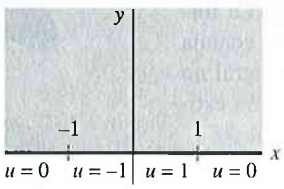


Figura 12.60 Problema de Dirichlet del problema 1

2.

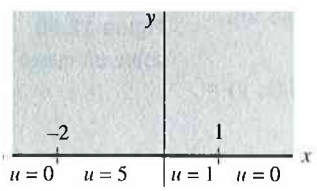


Figura 12.61 Problema de Dirichlet del problema 2

3.

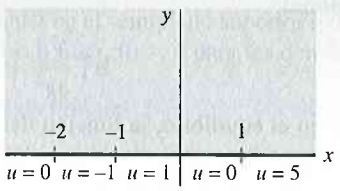


Figura 12.62 Problema de Dirichlet del problema 3

4.

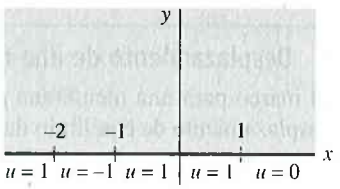


Figura 12.63 Problema de Dirichlet del problema 4

5. Encuentre la solución del problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = x^2$ cuando $0 < x < 1$ y $u(x, 0) = 0$ para los demás casos.

6. Encuentre la solución al problema de Dirichlet en el semiplano superior que satisface la condición de frontera $u(x, 0) = \cos x$. [*Sugerencia:* Haga $s = t - x$ y utilice las fórmulas de la sección 11.6

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s}{s^2 + a^2}\, ds = \frac{\pi e^{-a}}{a}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} s}{s^2 + a^2}\, ds = 0$$

para $a > 0$.]

En los problemas del 7 al 10, resuelva el problema de Dirichlet indicado encontrando una transformación conforme a partir de la región dada en el semiplano superior $v \geq 0$.

7.

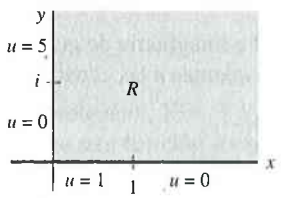


Figura 12.64 Problema de Dirichlet del problema 7

8.

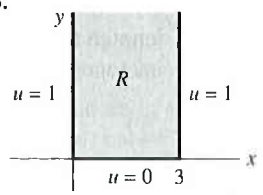


Figura 12.65 Problema de Dirichlet del problema 8

9.

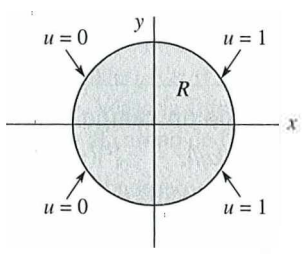


Figura 12.66 Problema de Dirichlet del problema 9

10.

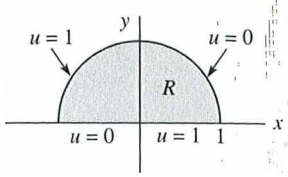


Figura 12.67 Problema de Dirichlet del problema 10

11. El marco para una membrana viene definido por $u(e^{i\theta}) = \theta^2/\pi^2$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de estimar el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

12. El marco para una membrana viene definido por $u(e^{i\theta}) = e^{-|\theta|}$ para $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de estimar el desplazamiento de equilibrio de la membrana en $(-0.5, 0)$, $(0, 0)$ y $(0.5, 0)$.

13. Utilice la fórmula integral de Poisson para el disco unitario con el fin de mostrar que $u(0, 0)$ es el valor promedio de la función $u = u(e^{i\theta})$ en la frontera $|z| = 1$.

En los problemas 14 y 15, resuelva el problema de Dirichlet indicado para el disco unitario utilizando la formulación por series de Fourier de la fórmula integral de Poisson, y bosqueje el sistema de curvas de nivel.

14. $u(e^{i\theta}) = \cos 2\theta$

15. $u(e^{i\theta}) = \operatorname{sen} \theta + \cos \theta$

12.6 Aplicaciones

Introducción En las secciones 12.2, 12.3 y 12.5 se demuestra cómo se puede resolver la ecuación diferencial parcial de Laplace por medio de métodos de transformación conforme, y una solución $u = u(x, y)$ del problema de Dirichlet se interpreta como la temperatura de estado estable en un punto (x, y) o como el desplazamiento de equilibrio de una membrana en el punto (x, y). La ecuación de Laplace es una ecuación diferencial parcial fundamental que surge en diferentes contextos. En esta sección se establece una relación general entre los campos vectoriales y las funciones analíticas y se utilizan las técnicas de transformación conforme para resolver problemas que involucran campos de fuerza electrostáticos y flujos bidimensionales de fluidos.

Campos vectoriales Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ en un dominio D se expresa también en la forma compleja

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

y emplearse como una función compleja. Recordando del capítulo 3 que $\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ y rot $\mathbf{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\mathbf{k}$. Si se plantea que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

Este conjunto de ecuaciones recuerda el criterio de Cauchy-Riemann para la analiticidad presentado en el teorema 9.3 y sugiere que se examine la función compleja $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$.

TEOREMA 12.7 Campos vectoriales y analiticidad

i) Supóngase que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es un campo vectorial en un dominio D y que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales primeras continuas en D. Si div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la función compleja

$$g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$$

es analítica en D.

ii) En forma inversa, si $g(z)$ es analítica en D, entonces $\mathbf{F}(x, y) = \overline{g(z)}$ define un campo vectorial en D para el que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Demostración Si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ denotan las partes real e imaginaria de $g(z)$, entonces $u = P$ y $v = -Q$. Por lo tanto las ecuaciones (1) son equivalentes a las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(-v)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(-v)}{\partial x};$$

esto es,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) son las ecuaciones de Cauchy-Riemann para la analiticidad. ❑

Ejemplo 1 Función analítica resultante de un campo vectorial

El campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y) = (-kq/|z - z_0|^2)(z - z_0)$ puede interpretarse como el campo eléctrico producido por un cable perpendicular al plano z en $z = z_0$ y que transporta una carga de q coulombs por unidad de longitud. La función compleja correspondiente es

$$g(z) = \frac{-kq}{|z - z_0|^2}\overline{(z - z_0)} = \frac{-kq}{z - z_0}.$$

Como $g(z)$ es analítica para $z \neq z_0$, div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. ❑

Ejemplo 2 Campo vectorial resultante de una función analítica

La función compleja $g(z) = Az$, donde $A > 0$, es analítica en el primer cuadrante y por lo tanto conduce al campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = \overline{g(z)} = Ax - iAy$, que satisface div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Hacia al final de esta sección se muestra que $\mathbf{V}(x, y)$ puede interpretarse como la velocidad de un fluido que se mueve alrededor de la esquina producida por la frontera del primer cuadrante. ❑

La interpretación física de las condiciones div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ depende del contexto. Si $\mathbf{F}(x, y)$ representa la fuerza de un campo eléctrico que actúa sobre una carga de prueba unitaria localizada en (x, y), entonces, por el teorema 3.9, rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ si y sólo si el campo es **conservativo**. El trabajo realizado al transportar una carga de prueba entre dos puntos de D debe ser independiente de la trayectoria.

Si C es un contorno cerrado simple que se encuentra en D, la *ley de Gauss* establece que la integral de línea $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ es proporcional a la carga total encerrada por la curva C. Si D es simplemente conexa y toda la carga eléctrica se distribuye sobre la frontera de D, entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = 0$ para cualquier contorno cerrado simple de D. Por medio del teorema de la divergencia en la forma (1) de la sección 3.16,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA, \tag{3}$$

donde R es la región encerrada por C, y se concluye que div $\mathbf{F} = 0$ en D. Por el contrario, si div $\mathbf{F} = 0$ en D, la integral doble es 0 y por lo tanto el dominio D no contiene carga.

■ **Funciones de potenciales** Supóngase que $\mathbf{F}(x, y)$ es un campo vectorial en un dominio *simplemente conexo* D con div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por el teorema 10.8, la función analítica $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$ tiene una antiderivada

$$G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{4}$$

en D, que se denomina un **potencial complejo** para el campo vectorial $\mathbf{F}$. Obsérvese que $g(z) = G'(z) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) + i\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) - i\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x, y)$ y por lo tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q. \tag{5}$$

En consecuencia, $\mathbf{F} = \nabla\phi$ y, al igual que en la sección 3.9, la función armónica ϕ se denomina una **función de potencial** (real) para $\mathbf{F}$.* Cuando el potencial ϕ se especifica en la frontera de una región R se pueden utilizar técnicas de transformación conforme para resolver el problema de Dirichlet resultante. Las líneas equipotenciales $\phi(x, y) = c$ se bosquejan, y el campo vectorial $\mathbf{F}$ se determina utilizando (5).

Ejemplo 3 Potencial complejo

El potencial ϕ del semiplano $x \geq 0$ satisface las condiciones de frontera $\phi(0, y) = 0$ y $\phi(x, 0) = 1$ para $x \geq 1$. Véase la figura 12.68*a*). Determine un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerza $\mathbf{F}$.

Solución Se observa en el ejemplo 3 de la sección 12.2 que la función analítica $z = \operatorname{sen} w$ transforma la franja $0 \leq u \leq \pi/2$ del plano w en la región R en cuestión. Por lo tanto, $f(z) = \operatorname{sen}^{-1} z$ transforma R en la franja, y la figura 12.68*b*) muestra las condiciones de frontera transferidas. El problema de Dirichlet simplificado tiene la solución $U(u, v) = (2/\pi)u$, y por ende $\phi(x, y) = U(\operatorname{sen}^{-1} z) = \operatorname{Re}((2/\pi)\operatorname{sen}^{-1} z)$ es la función potencial en D, y $G(z) = (2/\pi)u \operatorname{sen}^{-1} z$ es un potencial complejo para el campo de fuerzas $\mathbf{F}$.

Obsérvese que las líneas equipotenciales $\phi = c$ son las imágenes de las líneas equipotenciales $U = c$ en el plano w bajo la transformación inversa $z = \operatorname{sen} w$. En el ejemplo 3 de la sección 12.2 se muestra que la línea vertical $u = a$ se transforma en una rama de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 a} - \frac{y^2}{\cos^2 a} = 1.$$

Como la línea equipotencial $U = c$, $0 < c < 1$, es la línea vertical $u = \pi/2c$, se deduce que la línea equipotencial $\phi = c$ es la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2(\pi c/2)} - \frac{y^2}{\cos^2(\pi c/2)} = 1.$$

Como $\mathbf{F} = \overline{G'(z)}$ y $(d/dz)\operatorname{sen}^{-1} z = 1/(1 - z^2)^{1/2}$, el campo de fuerza viene dado por

$$\mathbf{F} = \frac{2}{\pi}\overline{\frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(1 - \bar{z}^2)^{1/2}}.$$

❑

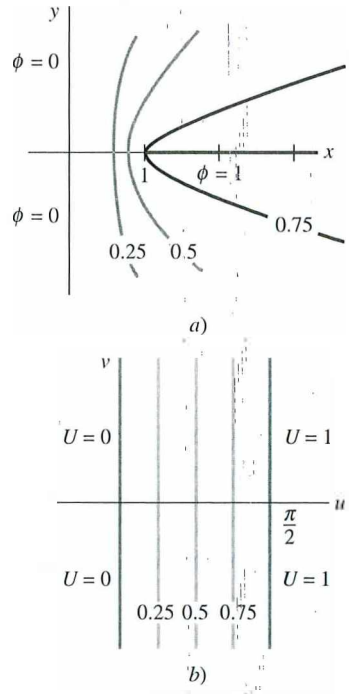


Figura 12.68 Imágenes de condiciones de frontera del ejemplo 3

■ **Flujo permanente de un fluido** El vector $\mathbf{V}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$ puede interpretarse también como el vector velocidad de un flujo permanente bidimensional de un fluido en un punto (x, y) de un dominio D. La velocidad en todos los puntos del dominio

*Si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico, la función potencial eléctrica ϕ se define como $-\phi$ y $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$.

es por lo tanto independiente del tiempo, y todo el movimiento se realiza en planos que son paralelos a un plano z.

La interpretación física de las condiciones div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ se explica en la sección 3.7. Recuérdese que si rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ en D, el flujo se denomina **irrotacional**. Si una rueda circular de paletas pequeñas se coloca en el fluido, la velocidad angular neta en la frontera de la rueda es 0, por lo que la rueda no rota. Si div $\mathbf{V} = 0$ en D, el flujo se denomina **incompresible**. En un dominio simplemente conexo D, un flujo incompresible tiene la propiedad especial de que la cantidad de fluido en el interior de cualquier contorno cerrado simple C es independiente del tiempo. La rapidez con la que el fluido entra al interior de C es igual a la rapidez con la que lo abandona, y consecuentemente no pueden existir fuentes o hundimientos de fluido en puntos de D.

Si div $\mathbf{V} = 0$ y rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$, $\mathbf{V}$ tiene un **potencial de velocidad complejo**

$$G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

que satisface $\overline{G'(z)} = \mathbf{V}$. En este contexto, se pone especial importancia en las curvas de nivel $\psi(x, y) = c$. Si $z(t) = x(t) + iy(t)$ es la trayectoria de una partícula (tal como un corcho pequeño) puesta en el fluido, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y). \end{aligned} \tag{6}$$

Por lo tanto, $dy/dx = Q(x, y)/P(x, y)$ o $-Q(x, y)\,dx + P(x, y)\,dy = 0$. Esta ecuación diferencial es exacta, ya que div $\mathbf{V} = 0$ implica que $\partial(-Q)/\partial y = \partial P/\partial x$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $\partial\psi/\partial x = -\partial\phi/\partial y = -Q$ y $\partial\psi/\partial y = \partial\phi/\partial x = P$, y en vista que todas las soluciones de (6) satisfacen $\psi(x, y) = c$. La función $\psi(x, y)$ se denomina entonces una **función de corriente** y las curvas de nivel $\psi(x, y) = c$ son **líneas de corriente** para el flujo.

Ejemplo 4 Flujo uniforme

El flujo uniforme del semiplano superior se define por $\mathbf{V}(x, y) = A(1, 0)$, donde A es una constante positiva fija. Obsérvese que $|\mathbf{V}| = A$, por lo que una partícula del fluido se mueve con rapidez constante. Un potencial complejo para el campo vectorial es $G(z) = Az = Ax + iAy$, por lo que las líneas de corriente son las líneas horizontales $Ay = c$; véase la figura 12.69*a*). Obsérvese que la frontera $y = 0$ de la región es en sí misma una línea de corriente. ❑

Ejemplo 5 Flujo alrededor de una esquina

La función analítica $G(z) = z^2$ lleva al campo vectorial $\mathbf{V}(x, y) = \overline{G'(z)} = (2x, -2y)$ en el primer cuadrante. Como $z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$, la función de corriente es $\psi(x, y) = 2xy$ y las líneas de corriente son las hipérbolas $2xy = c$. Este flujo, denominado flujo alrededor de una esquina, se ilustra en la figura 12.69*b*). Como en el ejemplo 4, las líneas de frontera $x = 0$ y $y = 0$ del primer cuadrante son en sí mismas líneas de corriente. ❑

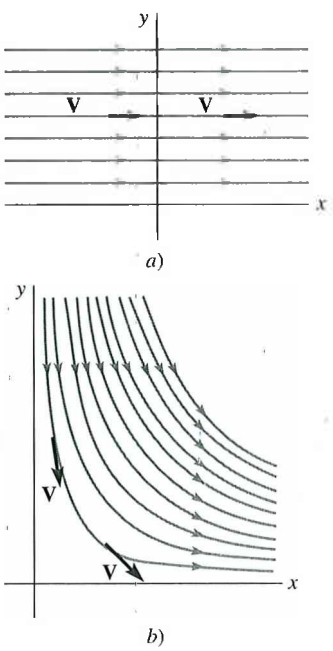


Figura 12.69 *a*) Flujo uniforme del ejemplo 4; *b*) flujo alrededor de una esquina del ejemplo 5

■ **Construcción de flujos especiales** El proceso de construir un flujo irrotacional e incompresible que permanezca dentro de una región dada R se denomina **determinación de líneas de corriente**. Como las líneas de corriente se describen por medio de $\psi(x, y) = c$, dos líneas de corrientes distintas no se intersecan. Por lo tanto, si la frontera es en sí misma una línea de corriente, una partícula que comienza dentro de R no puede abandonar R. Ésta es la esencia del siguiente teorema:

TEOREMA 12.8 Determinación de líneas de corriente

Supóngase que $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en una región R y $\psi(x, y)$ es constante en la frontera de R. Entonces $\mathbf{V}(x, y) = \overline{G'(z)}$ define a un flujo irrotacional e incompresible en R. Asimismo, si se coloca una partícula dentro de R, su trayectoria $z = z(t)$ permanece en R.

Ejemplo 6 Flujo alrededor de un cilindro

La función analítica $G(z) = z + 1/z$ transforma la región R en el semiplano superior y fuera del círculo $|z| = 1$ en el semiplano superior $v \geq 0$. La frontera de R se transforma en el eje u, por lo que $v = \psi(x, y) = y - y/(x^2 + y^2)$ es 0 en la frontera de R. La figura 12.70 muestra las líneas de corriente del flujo resultante. El campo de velocidades viene dado por $\overline{G'(z)} = 1 - 1/\bar{z}^2$, por lo que

$$\overline{G'(re^{i\theta})} = 1 - \frac{1}{r^2} e^{2i\theta}.$$

Se deduce entonces que $\mathbf{V} \approx (1, 0)$ para valores grandes de r, por lo que el flujo es aproximadamente uniforme a grandes distancias del círculo $|z| = 1$. El flujo resultante en la región R se denomina flujo alrededor de un cilindro. Puede añadirse la imagen espejo del flujo para presentar el flujo alrededor de un cilindro completo. ❑

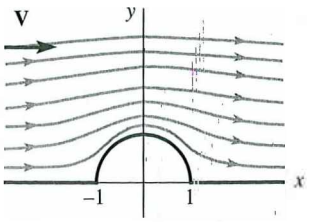


Figura 12.70 Flujo alrededor del cilindro del ejemplo 6

Si R es una región poligonal se puede utilizar la fórmula de Schwarz-Christoffel para encontrar una transformación conforme $z = f(w)$ del semiplano superior R' en R. La función inversa $G(z) = f^{-1}(z)$ transforma la frontera de R en el eje u. Entonces, si $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces $\psi(x, y) = 0$ en la frontera de R. Obsérvese que las líneas de corriente $\psi(x, y) = c$ del plano z son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$ del plano w bajo $z = f(w)$.

Ejemplo 7 Líneas de corrientes definidas paramétricamente

La función analítica $f(w) = w + \text{Ln } w + 1$ transforma el semiplano superior $v \geq 0$ en el semiplano superior $y \geq 0$ sin la línea horizontal $y = \pi$, $x \leq 0$; véase el ejemplo 4 de la sección 12.4. Si $G(z) = f^{-1}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$, entonces $G(z)$ transforma R en el semiplano superior y la frontera de R en el eje u. Por lo tanto, $\psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

No es posible encontrar una fórmula explícita para la función corriente $\psi(x, y)$. Las líneas de corriente, sin embargo, son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$ bajo $z = f(w)$. Si se escribe $w = t + ic$, $c > 0$, entonces las líneas de corriente se representan en la forma paramétrica

$$z = f(t + ic) = t + ic + \text{Ln}(t + ic) + 1,$$

esto es,
$$x = t + 1 + \frac{1}{2}\log_e(t^2 + c^2), \quad y = c + \text{Arg}(t + ic).$$

Las líneas de corriente de la figura 12.71 fueron generadas con un programa de graficación. ❑

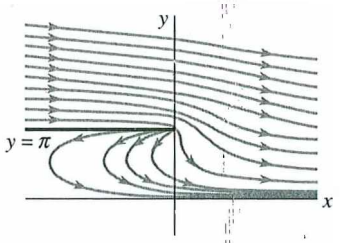


Figura 12.71 Flujo del ejemplo 7

Una función de corriente $\psi(x, y)$ es armónica pero, a diferencia de una solución para un problema de Dirichlet, *no* se necesita que $\psi(x, y)$ esté acotada (véanse los ejemplos del 4 al 6) ni considerar un conjunto fijo de constantes en la frontera. Por lo tanto, pueden existir muchas funciones de corriente diferentes para una región dada que satisfagan el teorema 12.8. Esto se ilustra en el ejemplo final.

Ejemplo 8 Líneas de corriente definidas paramétricamente

La función analítica $f(w) = w + e^w + 1$ transforma la franja horizontal $0 \leq v \leq \pi$ en la región R mostrada en la figura 12.71. Por lo tanto, $G(z) = f^{-1}(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ transforma R de nuevo en la franja y, de M-1 en las transformacines conformes del apéndice, transforma la línea de frontera $y = 0$ en el eje u y la línea de frontera $y = \pi$, $x \leq 0$, en la línea horizontal $v = \pi$. Entonces, $\psi(x, y)$ es constante en la frontera de R.

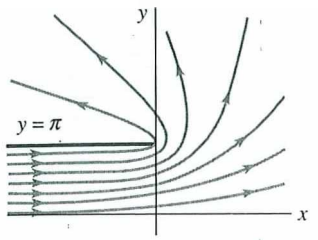


Figura 12.72 Flujo del ejemplo 8

Las líneas de corriente son las imágenes de las líneas horizontales $v = c$, $0 < c < \pi$, bajo $z = f(w)$. Al igual que en el ejemplo 7, una representación paramétrica de las líneas de corriente es

$$z = f(t + ic) = t + ic + e^{t+ic} + 1$$

o

$$x = t + 1 + e^t \cos c, \qquad y = c + e^t \operatorname{sen} c.$$

Las líneas de corriente se muestran en la figura 12.72. A diferencia del flujo del ejemplo 7, el fluido parece emerger de la franja $0 \leq y \leq \pi$, $x \leq 0$. ❑

EJERCICIOS 12.6 Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-30.

En los problemas del 1 al 4, verifique que div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ para el campo vectorial indicado $\mathbf{F}(x, y)$ examinando la función compleja correspondiente a $g(z) = P(x, y) - iQ(x, y)$. Encuentre un potencial complejo para el campo vectorial y bosqueje las líneas equipotenciales.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (\cos \theta_0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} \theta_0)\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}$
5. El potencial ϕ en la cuña $0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/4$ satisface las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = 0$ y $\phi(x, x) = 1$ para $x > 0$. Determine un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerza correspondiente $\mathbf{F}$.
6. Utilice la transformación conforme $f(z) = 1/z$ para determinar un potencial complejo, las líneas equipotenciales y el campo de fuerzas correspondiente $\mathbf{F}$ para el potencial ϕ que satisfaga las condiciones de frontera mostradas en la figura 12.73.

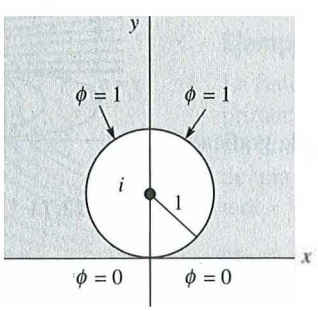


Figura 12.73 Condiciones de frontera del problema 6

7. El potencial ϕ del semicírculo $|z| \leq 1$, $y \geq 0$, satisface las condiciones de frontera $\phi(x, 0) = 0$, $-1 < x < 1$, y $\phi(e^{i\theta}) = 1$, $0 < \theta < \pi$. Demuestre que

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^2$$

y utilice las propiedades de las transformaciones racionales lineales para explicar la razón por la cual las líneas equipotenciales son arcos de círculos.

8. Utilice la transformación conforme C-1 del apéndice para encontrar el potencial ϕ de la región en el exterior de los círculos $|z| = 1$ y $|z - 3| = 1$ si se mantiene el potencial en cero para $|z| = 1$ y uno para $|z - 3| = 1$. Utilice las propiedades de las transformaciones racionales lineales para explicar la razón por la cual las líneas equipotenciales son, con una excepción, círculos.

En los problemas del 9 al 14, un potencial de velocidades complejo $G(z)$ se define sobre una región R.

a) Encuentre la función de corriente y verifique que la frontera de R sea una línea de corriente.

b) Encuentre el campo vectorial de velocidades correspondiente $\mathbf{V}(x, y)$.

c) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

9. $G(z) = z^4$

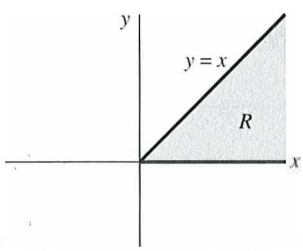


Figura 12.74 Región R del problema 9

10. $G(z) = z^{2/3}$

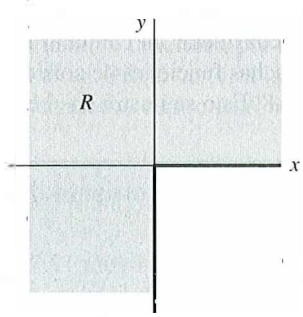


Figura 12.75 Región R del problema 10

11. $G(z) = \operatorname{sen} z$

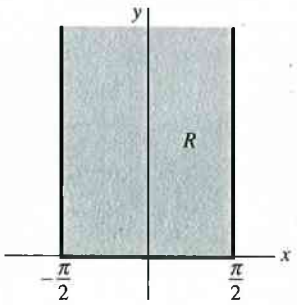


Figura 12.76 Región R del problema 11

12. $G(z) = i \operatorname{sen}^{-1} z$

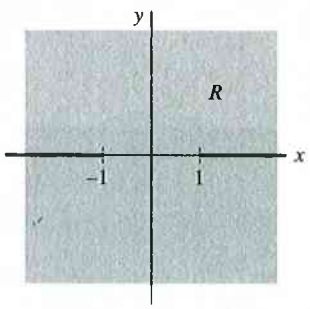


Figura 12.77 Región R del problema 12

13. $G(z) = z^2 + 1/z^2$

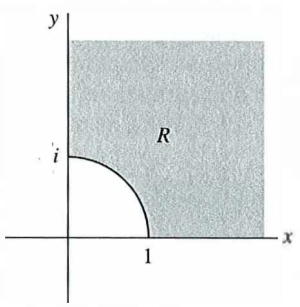


Figura 12.78 Región R del problema 13

14. $G(z) = e^z$

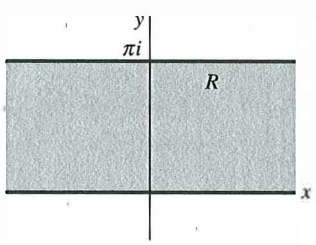


Figura 12.79 Región R del problema 14

En los problemas del 15 al 18, se proporciona una transformación conforme $z = f(w)$ del semiplano superior $v \geq 0$ en una región R del plano z y se construye el flujo en R con potencial complejo $G(z) = f^{-1}(z)$.

a) Verifique que la frontera de R sea una línea de corriente para el flujo.

b) Encuentre una representación paramétrica para las líneas de corriente del flujo.

c) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

15. M-9 del apéndice

16. M-4 del apéndice; utilice $a = 1$

17. M-2 del apéndice; utilice $a = 1$

18. M-5 del apéndice

19. Un punto de estancamiento en un flujo es un punto para el que $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Encuentre todos los puntos de estancamiento para los flujos de los ejemplos 5 y 6.

20. Para dos números reales cualesquiera k y x_1, la función $G(z) = k \operatorname{Ln}(z - x_1)$ es analítica en el semiplano superior y por lo tanto es un potencial complejo para un flujo. El número real x_1 se le denomina *pozo* cuando $k < 0$ y *fuente* para el flujo cuando $k > 0$.

a) Demuestre que las líneas de corriente son rayos que surgen de x_1.

b) Demuestre que $\mathbf{V} = (k/|z - x_1|^2)(z - x_1)$ y concluya que el flujo se dirige hacia x_1 precisamente cuando $k < 0$.

21. Si $f(z)$ es una transformación conforme desde un dominio D en el semiplano superior, se define un flujo con una fuente en un punto ξ_0 de la frontera de D por el potencial complejo $G(z) = k \operatorname{Ln}(f(z) - f(\xi_0))$, donde $k > 0$. Determine las líneas de corriente para un flujo del primer cuadrante con una fuente en $\xi_0 = 1$ y $k = 1$.

22. *a*) Construya un flujo en la franja horizontal $0 < y < \pi$ con un hundimiento en el punto de frontera $\xi_0 = 0$. [*Sugerencia:* Véase problema 21.]

b) Utilice una herramienta de graficación para bosquejar las líneas de corriente del flujo.

23. El potencial complejo $G(z) = k \operatorname{Ln}(z - 1) - k \operatorname{Ln}(z + 1)$ con $k > 0$ da lugar a un flujo en el semiplano superior con una fuente única en $z = 1$ y un pozo único en $z = -1$. Demuestre que las líneas de corriente son la familia de círculos $x^2 + (y - c)^2 = 1 + c^2$; véase la figura 12.80.

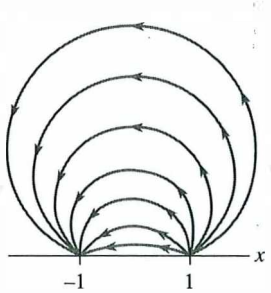


Figura 12.80 Líneas de corriente del problema 23

24. El flujo cuyo vector de velocidad es $\mathbf{V} = (a + ib)/\bar{z}$ se denomina un *vórtice* en $z = 0$, y la naturaleza geométrica de las líneas de corriente depende de la elección de a y b.

a) Demuestre que si $z = x(t) + iy(t)$ es la trayectoria de una partícula, entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ax - by}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{bx + ay}{x^2 + y^2}$$

b) Cambie a coordenadas polares para establecer que $dr/dt = a/r$ y $d\theta/dt = b/r^2$, y concluya que $r = ce^{a\theta/b}$ para $b \neq 0$. [*Sugerencia:* Véase (2) de la sección 9.1. del tomo I]

c) Concluya que las espirales logarítmicas del inciso *b*) tienen sentido antihorario, si y sólo si, $a < 0$, mientras que las curvas tienen el sentido horario si y sólo si, $b < 0$; véase la figura 12.81.

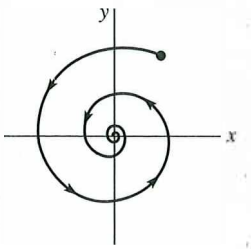


Figura 12.81 Espiral logarítmica del problema 24

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 12

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-31.

Conteste los problemas del 1 al 10 sin consultar el texto. Llene el espacio blanco o conteste verdadero o falso.

1. Bajo la transformación compleja $f(z) = z^2$, la curva $xy = 2$ se transforma en la línea _____.
2. La transformación compleja $f(z) = -iz$ es una rotación de _____ grados.
3. La imagen del semiplano superior $y \geq 0$ bajo la transformación compleja $f(z) = z^{2/3}$ es _____.
4. La función analítica $f(z) = \cosh z$ es conforme excepto en $z =$ _____.
5. Si $w = f(z)$ es una función analítica que transforma un dominio D sobre el semiplano superior $v > 0$, entonces la función $u = \text{Arg}(f(z))$ es armónica en D. _____
6. ¿Cuál es la imagen del círculo $|z - 1| = 1$ bajo la transformación compleja $T(z) = (z - 1)/(z - 2)$ un círculo o una línea? _____
7. La transformación racional lineal $T(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_3}\dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$ transforma la tripleta z_1, z_2 y z_3 hacia _____.
8. Si $f'(z) = z^{-1/2}(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2}$, entonces $f(z)$ transforma el semiplano vertical $y > 0$ en el interior de un rectángulo. _____
9. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial de un dominio D con div $\mathbf{F} = 0$ y rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la función compleja $g(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ es analítica en D. _____
10. Si $G(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ es analítica en una región R y $\mathbf{V}(x, y) = \overline{iG'(z)}$, entonces las líneas de corriente del flujo correspondiente se describen por medio de $\phi(x, y) = c$. _____
11. Encuentre la imagen del primer cuadrante bajo la transformación compleja $w = \text{Ln } z = \log_e|z| + i \text{ Arg } z$. ¿Cuáles son las imágenes de los rayos $\theta = \theta_0$ que se encuentran en el primer cuadrante?

En los problemas 12 y 13, utilice las transformaciones conformes del apéndice para encontrar un transformación conforme desde la región indicada R del plano z hasta la región objetivo R' del plano w, y encuentre la imagen de la curva de frontera indicada.

12.

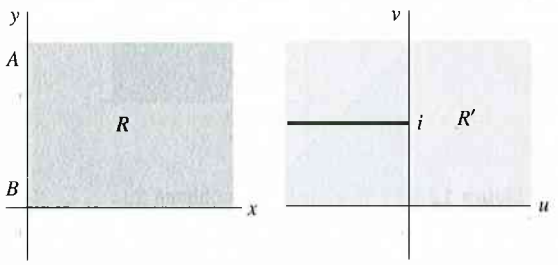


Figura 12.82 Regiones R y R' para el problema 12

13.

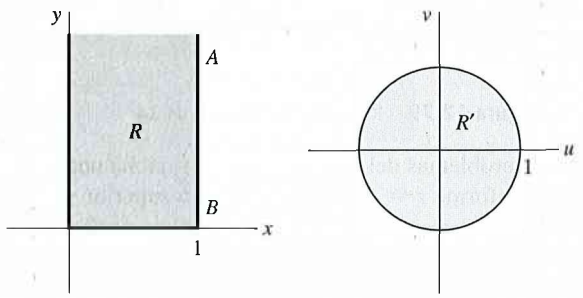


Figura 12.83 Regiones R y R' para el problema 13

En los problemas 14 y 15, utilice una transformación conforme adecuada para resolver el problema de Dirichlet indicado.

14.

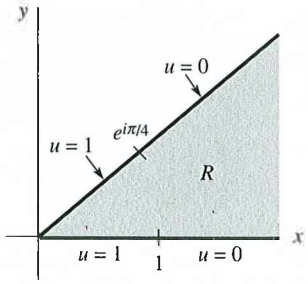


Figura 12.84 Problema de Dirichlet del problema 14

15.

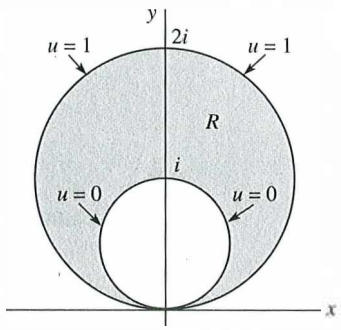


Figura 12.85 Problema de Dirichlet del problema 15

16. Deduzca la transformación conforme C-4 del apéndice construyendo la transformación racional lineal que transforma $1, -1, \infty$ en $i, -i, -1$.

17. *a*) Aproxime la región R' de M-9 del apéndice por medio de la región poligonal mostrada en la figura 12.86. Plantee que $f(-1) = u_1$, $f(0) = \pi i/2$, y $f(1) = u_1 + \pi i$.

b) Demuestre que cuando $u_1 \to \infty$,

$$f'(z) = Az(z+1)^{-1}(z-1)^{-1} = \frac{1}{2}A\left[\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right].$$

c) Si se plantea que $\text{Im}(f(t)) = 0$ para $t < -1$, $\text{Im}(f(t)) = \pi$ para $t > 1$, y $f(0) = \pi i/2$, concluya que

$$f(z) = \pi i - \tfrac{1}{2}[\text{Ln}(z+1) + \text{Ln}(z-1)].$$

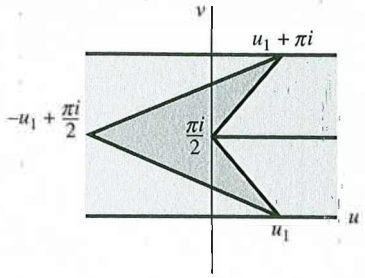


Figura 12.86 Imagen del semiplano superior del problema 17

18. *a*) Encuentre la solución $u(x, y)$ del problema de Dirichlet en el semiplano superior $y \geq 0$ que satisfaga la condición de frontera $u(x, 0) = \text{sen } x$. [*Sugerencia:* Véase el problema 6 de los ejercicios 12.5.]

b) Encuentre la solución $u(x, y)$ del problema de Dirichlet en el disco unitario $|z| \leq 1$ que satisfaga la condición de frontera $u(e^{i\theta}) = \text{sen } \theta$.

19. Explique por qué las líneas de corriente de la figura 12.72 también pueden interpretarse como las líneas equipotenciales del potencial ϕ que satisface $\phi(x, 0) = 0$ para $-\infty < x < \infty$ y $\phi(x, \pi) = 1$ para $x < 0$.

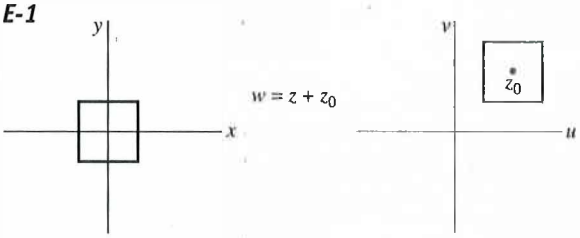
20. Verifique que la frontera de la región R definida por $y^2 \geq 4(1 - x)$ es una línea de corriente para el flujo de potencial complejo $G(z) = i(z^{1/2} - 1)$. Bosqueje las líneas de corriente del flujo.

Por Dayet

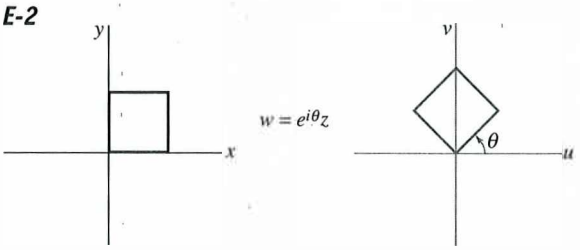
Transformaciones conformes

Transformaciones elementales

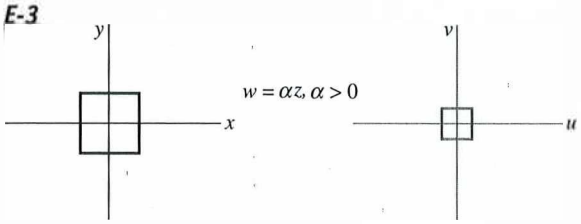
E-1



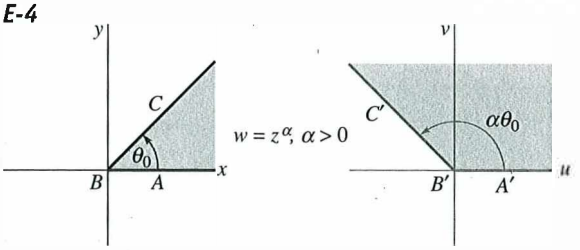
E-2



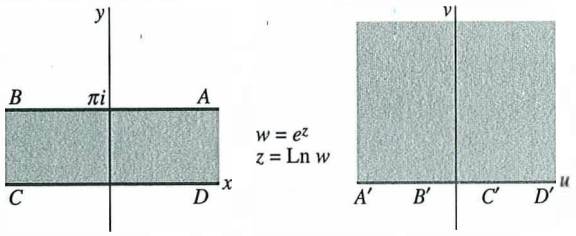
E-3



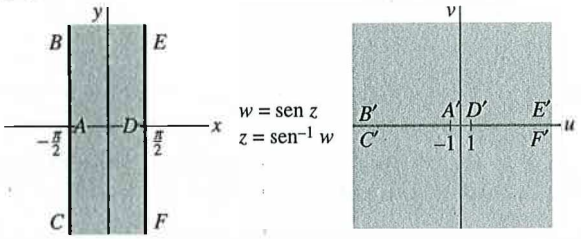
E-4



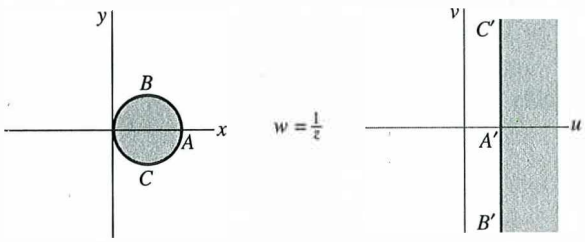
E-5



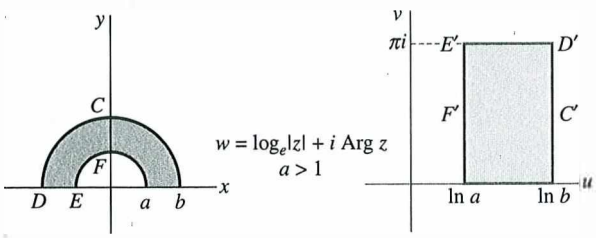
E-6



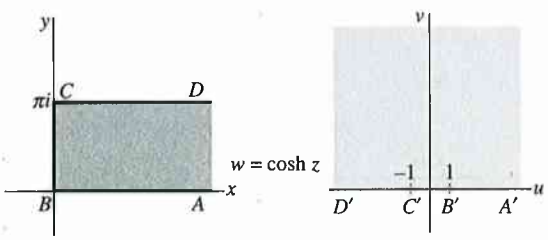
E-7



E-8

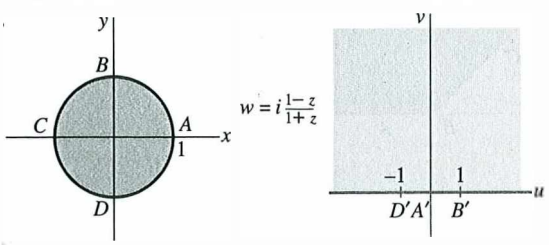


E-9

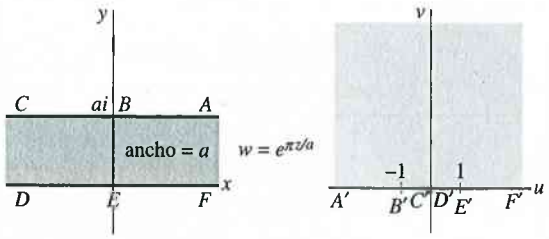


■ Transformaciones en semiplanos

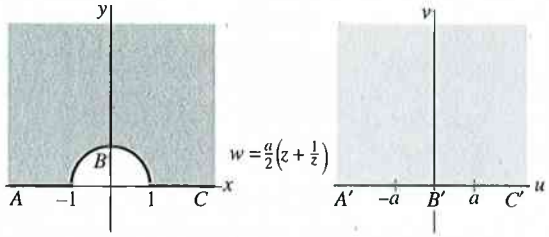
H-1



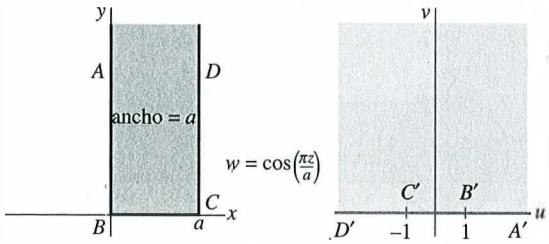
H-2



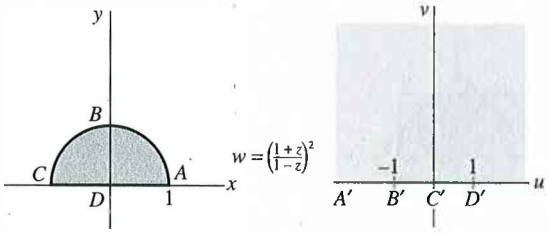
H-3



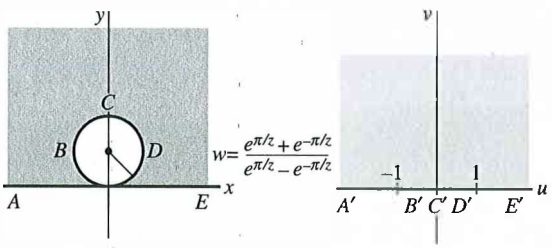
H-4



H-5

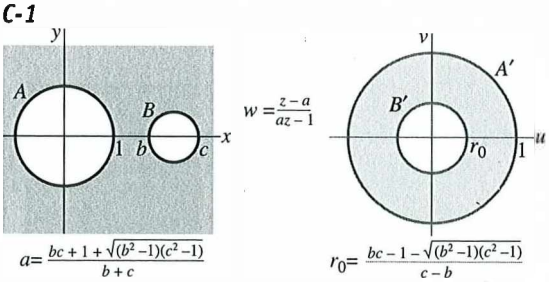


H-6

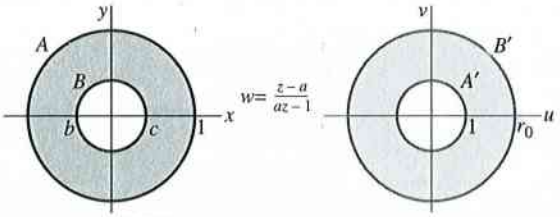


■ Transformaciones en regiones circulares

C-1

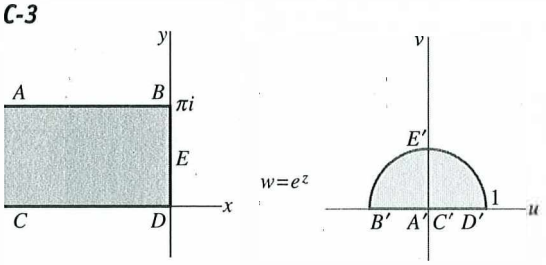


C-2

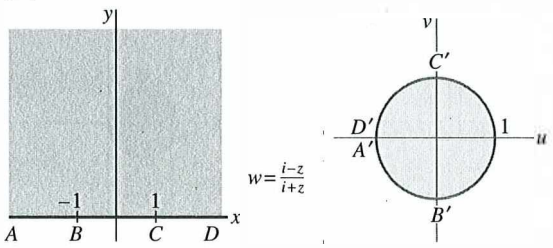


$$a=\frac{1+bc+\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{c+b} \qquad r_0=\frac{1-bc+\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}}{c-b}$$

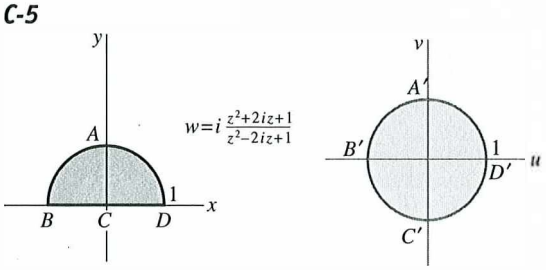
C-3



C-4

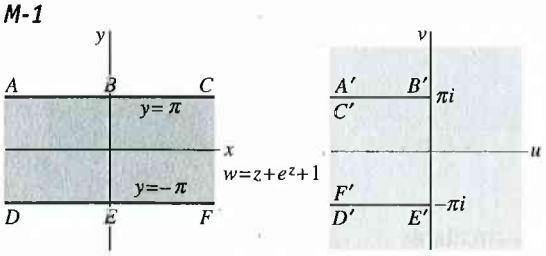


C-5

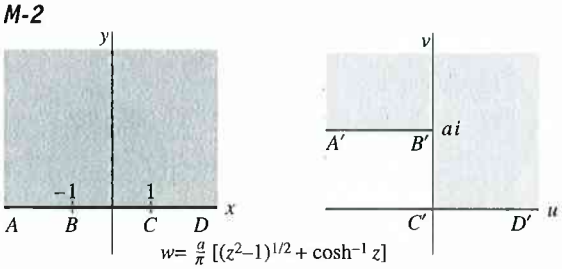


Transformaciones diversas

M-1

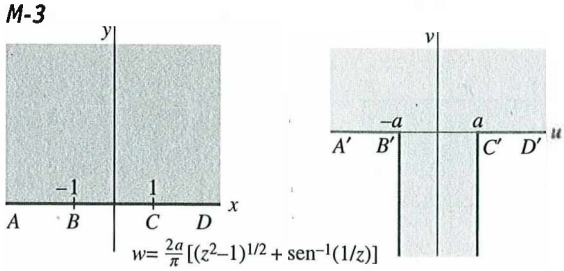


M-2



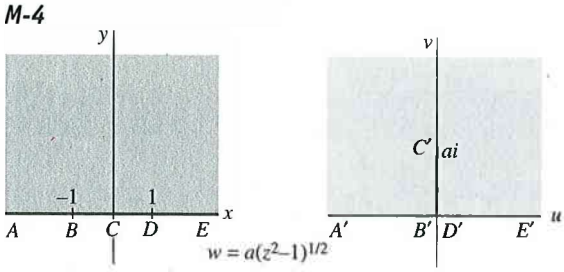
$$w=\frac{a}{\pi}\left[(z^2-1)^{1/2}+\cosh^{-1} z\right]$$

M-3



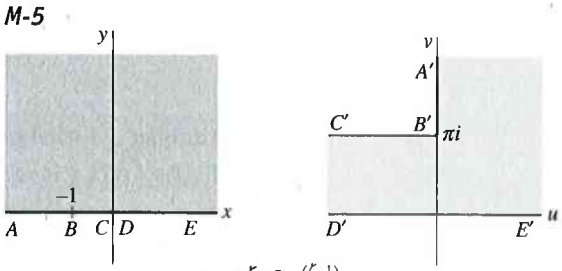
$$w = \frac{2a}{\pi}[(z^2-1)^{1/2} + \operatorname{sen}^{-1}(1/z)]$$

M-4



$$w = a(z^2-1)^{1/2}$$

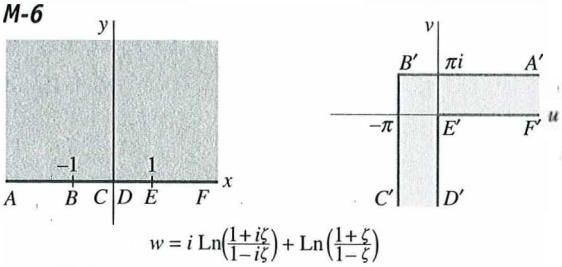
M-5



$$w = 2\zeta + \operatorname{Ln}\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)$$

$$\zeta = (z+1)^{1/2}$$

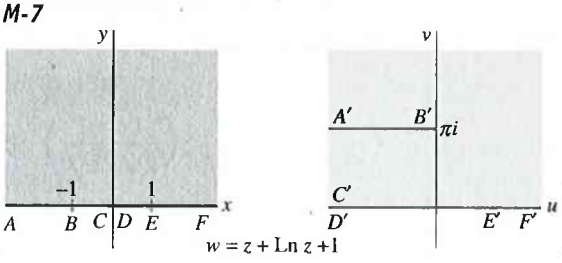
M-6



$$w = i\operatorname{Ln}\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right) + \operatorname{Ln}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$$

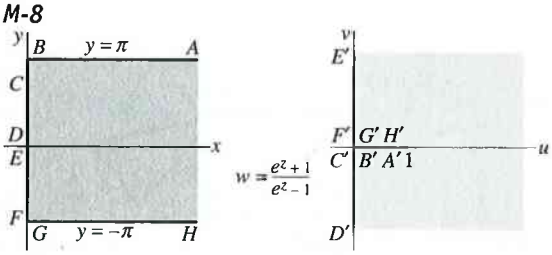
$$\zeta = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{1/2}$$

M-7



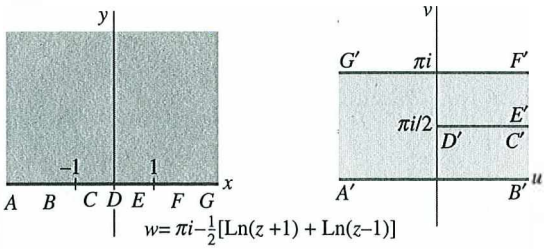
$$w = z + \operatorname{Ln} z + 1$$

M-8



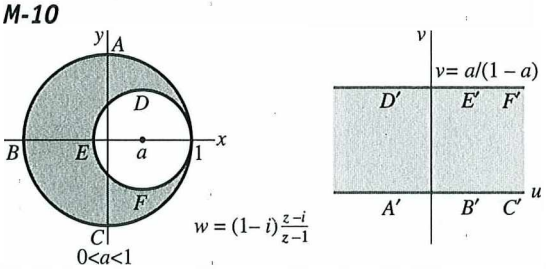
$$w = \frac{e^z+1}{e^z-1}$$

M-9



$w = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(z+1) + \text{Ln}(z-1)]$

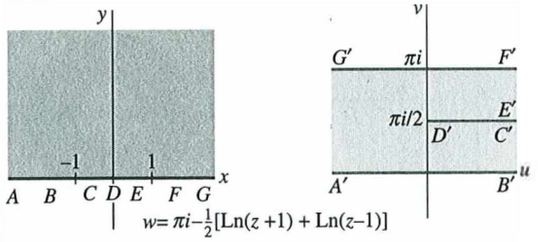
M-10



$w = (1 - i)\frac{z - i}{z - 1}$

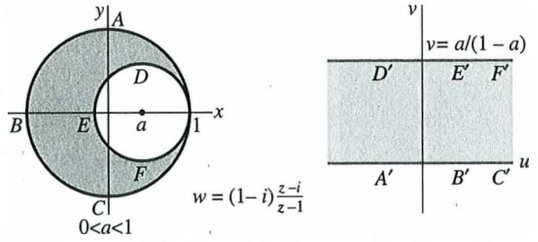
$0 < a < 1$

M-9



$w = \pi i - \frac{1}{2}[\text{Ln}(z+1) + \text{Ln}(z-1)]$

M-10

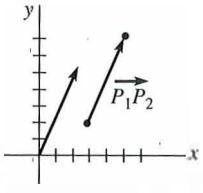


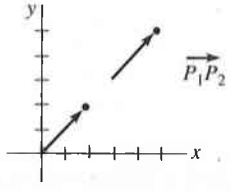
$w = (1 - i)\frac{z - i}{z - 1}$

Respuestas a los problemas seleccionados de número impar

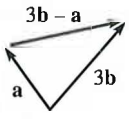
Ejercicios 1.1, página 9

1. $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $3\mathbf{i}$; $\sqrt{65}$; 3
3. $\langle 12, 0\rangle$; $\langle 4, -5\rangle$; $\langle 4, 5\rangle$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{41}$
5. $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $3\sqrt{10}$; $\sqrt{34}$
7. $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$; $\mathbf{0}$; $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$; 0; $2\sqrt{85}$
9. $\langle 6, -14\rangle$; $\langle 2, 4\rangle$
11. $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$
13. $\langle 20, 52\rangle$; $\langle -2, 0\rangle$
15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$





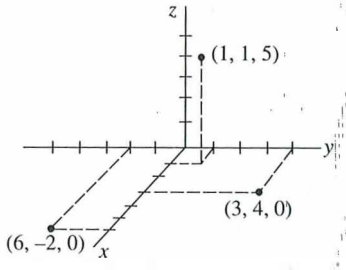
19. (1, 18)
21. *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*)
23. $\langle 6, 15\rangle$
25. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$; $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$
27. $\langle 0, -1\rangle$; $\langle 0, 1\rangle$
29. $\left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$
31. $\frac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \frac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$
33. $\left\langle -3, -\frac{15}{2} \right\rangle$
35.
37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$



41. $\mathbf{a} = \frac{5}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
43. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
45. *b*) aproximadamente 31°
47. $\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L\sqrt{L^2 + a^2}}\mathbf{i}$

Ejercicios 1.2, página 15

1.–5.



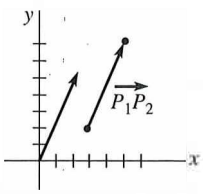
7. El conjunto $\{(x, y, 5) | x, y \text{ son números reales}\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades por arriba del plano xy.
9. El conjunto $\{(2, 3, z) | z \text{ es un número real}\}$ es una línea perpendicular al plano xy en (2, 3, 0).
11. (0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 8), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 8)
13. (–2, 5, 0), (–2, 0, 4), (0, 5, 4); (–2, 5, –2); (3, 5, 4)
15. la unión de los planos coordenados
17. el punto (–1, 2, –3)
19. la unión de los planos $z = -5$ y $z = 5$
21. $\sqrt{70}$
23. 7; 5
25. triángulo rectángulo
27. isósceles
29. $d(P_1, P_2) + d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3)$
31. 6 o –2
33. $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
35. $P_1(-4, -11, 10)$
37. $\langle -3, -6, 1\rangle$
39. $\langle 2, 1, 1\rangle$

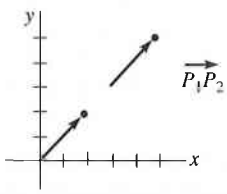
Por Dayet

Respuestas a los problemas seleccionados de número impar

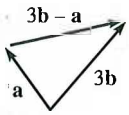
Ejercicios 1.1, página 9

1. $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$; $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$; $3\mathbf{i}$; $\sqrt{65}$; 3
3. $\langle 12, 0\rangle$; $\langle 4, -5\rangle$; $\langle 4, 5\rangle$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{41}$
5. $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$; $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $3\sqrt{10}$; $\sqrt{34}$
7. $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$; $\mathbf{0}$; $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$; 0; $2\sqrt{85}$
9. $\langle 6, -14\rangle$; $\langle 2, 4\rangle$
11. $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$; $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$
13. $\langle 20, 52\rangle$; $\langle -2, 0\rangle$
15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$





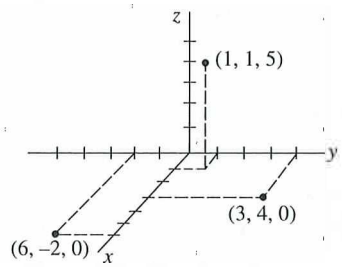
19. (1, 18)
21. *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*)
23. $\langle 6, 15\rangle$
25. $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$; $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$
27. $\langle 0, -1\rangle$; $\langle 0, 1\rangle$
29. $\left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\rangle$
31. $\frac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \frac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$
33. $\left\langle -3, -\frac{15}{2} \right\rangle$
35.
37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$



41. $\mathbf{a} = \frac{5}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{c}$
43. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
45. *b*) aproximadamente 31°
47. $\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L\sqrt{L^2 + a^2}}\mathbf{i}$

Ejercicios 1.2, página 15

1. –5.

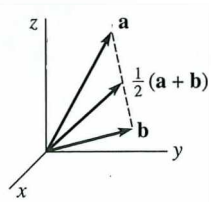


7. El conjunto $\{(x, y, 5) | x, y \text{ son números reales}\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades por arriba del plano xy.
9. El conjunto $\{(2, 3, z) | z \text{ es un número real}\}$ es una línea perpendicular al plano xy en (2, 3, 0).
11. (0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 8), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 8)
13. (–2, 5, 0), (–2, 0, 4), (0, 5, 4); (–2, 5, –2); (3, 5, 4)
15. la unión de los planos coordenados
17. el punto (–1, 2, –3)
19. la unión de los planos $z = -5$ y $z = 5$
21. $\sqrt{70}$
23. 7; 5
25. triángulo rectángulo
27. isósceles
29. $d(P_1, P_2) + d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3)$
31. 6 o –2
33. $(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
35. $P_1(-4, -11, 10)$
37. $\langle -3, -6, 1\rangle$
39. $\langle 2, 1, 1\rangle$

41. $\langle 2, 4, 12\rangle$ 43. $\langle -11, -41, -49\rangle$ 45. $\sqrt{139}$

47. 6 49. $\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$ 51. $4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$

53.



Ejercicios 1.3, página 21

1. $25\sqrt{2}$ 3. 12 5. −16 7. 48

9. 29 11. 25 13. $\langle -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\rangle$

15. *a*) y *f*), *c*) y *d*), *b*) y *e*)

17. $\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1\rangle$ 21. 1.11 radianes o 63.43°

23. 1.89 radianes o 108.43°

25. $\cos\alpha = 1/\sqrt{14}$, $\cos\beta = 2/\sqrt{14}$, $\cos\gamma = 3/\sqrt{14}$; $\alpha = 74.5°$, $\beta = 57.69°$, $\gamma = 36.7°$

27. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = -\sqrt{3}/2$; $\alpha = 60°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 150°$

29. 0.955 radianes o 54.74°; 0.616 radianes o 35.26°

31. $\alpha = 58.19°$, $\beta = 42.45°$, $\gamma = 65.06°$ 33. $\frac{5}{7}$

35. $-6\sqrt{11}/11$ 37. $72\sqrt{109}/109$

39. $\langle -\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\rangle$

41. $\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}\rangle$ 43. $\langle \frac{72}{25}, \frac{96}{25}\rangle$

45. 1 000 ft-lb 47. 0; 150 N-m

49. aproximadamente 1.80 angstroms

Ejercicios 1.4, página 27

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ 3. $\langle -12, -2, 6\rangle$

5. $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$ 7. $\langle -3, 2, 3\rangle$ 9. $\mathbf{0}$

11. $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ 13. $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

17. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 19. $2\mathbf{k}$ 21. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

23. $-24\mathbf{k}$ 25. $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ 27. $\mathbf{0}$

29. $\sqrt{41}$ 31. $-\mathbf{j}$ 33. $\mathbf{0}$ 35. 6

37. $12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$ 39. $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

41. $-21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ 43. −10

45. 14 unidades cuadradas 47. $\frac{1}{2}$ unidad cuadrada

49. $\frac{7}{2}$ de unidades cuadradas 51. 10 unidades cúbicas

53. son coplanares

55. 32; en el plano *xy*, 30° desde el eje *x* positivo en la dirección del eje *y* negativo; $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

57. $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 2\mathbf{k}$

Ejercicios 1.5, página 34

1. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle 2, 3, -3\rangle$

3. $\langle x, y, z\rangle = \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle + t\langle -2, 3, -\frac{3}{2}\rangle$

5. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, -1\rangle + t\langle 5, 0, 0\rangle$

7. $x = 2 + 4t$, $y = 3 - 4t$, $z = 5 + 3t$

9. $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, $z = -7t$

11. $x = 4 + 10t$, $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}t$, $z = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t$

13. $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-4}{10} = \dfrac{z+9}{7}$

15. $\dfrac{x+7}{11} = \dfrac{z-5}{-4}$, $y = 2$

17. $x = 5$, $\dfrac{y-10}{9} = \dfrac{z+2}{12}$

19. $x = 4 + 3t$, $y = 6 + \frac{1}{2}t$, $z = -7 - \frac{3}{2}t$;
$\dfrac{x-4}{3} = 2y - 12 = \dfrac{2z+14}{-3}$

21. $x = 5t$, $y = 9t$, $z = 4t$; $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z}{4}$

23. $x = 6 + 2t$, $y = 4 - 3t$, $z = -2 + 6t$

25. $x = 2 + t$, $y = -2$, $z = 15$

27. Ambas líneas pasan por el origen y tienen vectores de dirección paralelos.

29. $(0, 5, 15)$, $(5, 0, \frac{15}{2})$, $(10, -5, 0)$

31. $(2, 3, -5)$ 33. Las líneas no se intersecan.

35. 40.37° 37. $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 3t$, $z = 6 + 3t$

39. $2x - 3y + 4z = 19$ 41. $5x - 3z = 51$

43. $6x + 8y - 4z = 11$ 45. $5x - 3y + z = 2$

47. $3x - 4y + z = 0$ 49. Los puntos son colineales.

51. $x + y - 4z = 25$ 53. $z = 12$

55. $-3x + y + 10z = 18$ 57. $9x - 7y + 5z = 17$

59. $6x - 2y + z = 12$

61. ortogonales: *a*) y *d*), *b*) y *c*), *d*) y *f*), *b*) y *e*); paralelos: *a*) y *f*), *c*) y *e*).

63. *c*) y *d*) 65. $x = 2 + t$, $y = \frac{1}{2} - t$, $z = t$

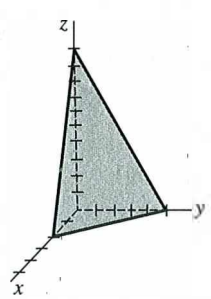
67. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$, $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t$, $z = t$

69. $(-5, 5, 9)$ 71. $(1, 2, -5)$

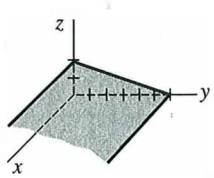
73. $x = 5 + t$, $y = 6 + 3t$, $z = -12 + t$

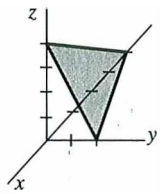
75. $3x - y - 2z = 10$

77.



79.



81. 

Ejercicios 1.6, página 42

1. no es un espacio vectorial, el axioma *vi*) no se satisface
3. no es un espacio vectorial, el axioma *x*) no se satisface
5. espacio vectorial
7. no es un espacio vectorial, el axioma *ii*) no se satisface
9. espacio vectorial
11. un subespacio
13. no es un subespacio
15. un subespacio
17. un subespacio
19. no es un subespacio
23. *b*) $\mathbf{a} = 7\mathbf{u}_1 - 12\mathbf{u}_2 + 8\mathbf{u}_3$
25. linealmente dependiente
27. linealmente independiente
29. f es discontinua en $x = -1$ y en $x = -3$
31. $2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{2/3}$, $\sqrt{\pi}$

Ejercicios 1.7, página 48

1. $\mathbf{u} = \frac{58}{13}\mathbf{w}_1 - \frac{4}{13}\mathbf{w}_2$, donde
$\mathbf{w}_1 = \left\langle \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right\rangle$, $\mathbf{w}_2 = \left\langle \frac{5}{13}, -\frac{12}{13} \right\rangle$
3. $\mathbf{u} = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 - \frac{23}{2}\mathbf{v}_3$, donde
$\mathbf{v}_1 = \langle 1, 0, 1 \rangle$, $\mathbf{v}_2 = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\mathbf{v}_3 = \langle -1, 0, 1 \rangle$
5. *a*) $B'' = \left\{ \left\langle -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle, \left\langle -\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle \right\}$
b) $B'' = \left\{ \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \right\}$
7. *a*) $B'' = \left\{ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \right\}$
b) $B'' = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$
9. $B'' = \left\{ \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \right\}$
11. $B'' = \left\{ \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, -\frac{1}{5\sqrt{3}} \right\rangle, \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}} \right\rangle \right\}$
13. $B'' = \left\{ \left\langle \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right\rangle, \left\langle -\frac{13}{\sqrt{186}}, \frac{1}{\sqrt{186}}, \frac{4}{\sqrt{186}} \right\rangle \right\}$
15. $B'' = \left\{ \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left\langle \frac{7}{2\sqrt{35}}, \frac{9}{2\sqrt{35}}, \frac{3}{2\sqrt{35}}, \frac{1}{2\sqrt{35}} \right\rangle \right\}$
17. $B' = \left\{ 1, x, \frac{1}{2}(-1 + 3x^2) \right\}$
19. $B'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{6}}x, \frac{5}{2\sqrt{10}}(3x^2 - 1) \right\}$
21. $p(x) = \frac{41}{\sqrt{15}}q_1(x) + 3\sqrt{6}\,q_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}q_3(x)$, donde
$q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $q_2(x) = \frac{3}{\sqrt{6}}x$, $q_2(x) = \frac{5}{2\sqrt{10}}(3x^2 - 1)$

Ejercicios de repaso del capítulo 1, página 49

1. verdadero
3. falso
5. verdadero
7. verdadero
9. verdadero
11. $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
13. $5\mathbf{i}$
15. 14
17. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$
19. (4, 7, 5)
21. (5, 6, 3)
23. $-36\sqrt{2}$
25. 12, –8, y 6
27. $3\sqrt{10}/2$
29. 2 unidades
31. $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})/\sqrt{11}$
33. 2
35. $\frac{26}{9}\mathbf{i} + \frac{7}{9}\mathbf{j} + \frac{20}{9}\mathbf{k}$
37. esfera; plano
39. $\frac{x-7}{4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{6}$
41. Los vectores de dirección son ortogonales y el punto de intersección es (3, –3, 0).
43. $14x - 5y - 3z = 0$
45. $30\sqrt{2}$ N-m
47. aproximadamente 153 libras
49. no es un espacio vectorial.
51. un subespacio; $1, x$

Ejercicios 2.1, página 58

1. 2×4
3. 3×3
5. 3×4
7. no es igual
9. no es igual
11. $x = 2, y = 4$
13. $c_{23} = 9, c_{12} = 12$
15. $\begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 14 & -19 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} -11 & 6 \\ 17 & -22 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -32 & 27 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & -18 \\ -30 & 31 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} 9 & 24 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$
21. $180; \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 20 \\ 10 & 20 & 25 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & 38 \\ 10 & 75 \end{pmatrix}$
25. $\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -38 \\ -2 \end{pmatrix}$ 29. 4×5

37. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

39. **AB** no es necesariamente igual a **BA**

41. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

45. *b)* $M_R = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\operatorname{sen}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$,

$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

c) $x_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6} + 6}{8} \approx 1.4072$

$y_S = \dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{6} + 2}{8} \approx 0.2948$

$z_S = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8} \approx 0.9659$

Ejercicios 2.2, página 70

1. $x_1 = 4, x_2 = -7$ 3. $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$
5. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$ 7. $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 0$
9. inconsistente 11. $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
13. $x_1 = -2, x_2 = -2, x_3 = 4$ 15. $x_1 = 1, x_2 = 2 - t, x_3 = t$
17. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$
19. inconsistente
21. $x_1 = 0.3, x_2 = -0.12, x_3 = 4.1$
23. $2Na + 2H_2O \rightarrow 2NaOH + H_2$
25. $Fe_3O_4 + 4C \rightarrow 3Fe + 4CO$
27. $3Cu + 8NHO_3 \rightarrow 3Cu(NO_3)_2 + 4H_2O + 2NO$
29. $i_1 = \frac{35}{9}, i_2 = \frac{38}{9}, i_3 = \frac{1}{3}$
31. Intercambie los renglones 1 y 2 en I_3
33. Multiplique el segundo renglón de I_3 por c y súmelo al tercer renglón

35. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

37. $\mathbf{EA} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{21} + a_{31} & ca_{22} + a_{32} & ca_{23} + a_{33} \end{pmatrix}$

39. $x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$
41. $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}$

Ejercicios 2.3, página 76

1. 2 3. 1 5. 3
7. 2 9. 3 11. linealmente independiente
13. linealmente independiente 15. 5
17. rango(**A**) = 2

Ejercicios 2.4, página 82

1. 9 3. 1 5. 2 7. 10 9. –7
11. 17 13. $\lambda^2 - 3\lambda - 4$ 15. –48
17. 62 19. 0 21. –85
23. $-x + 2y - z$ 25. –104 27. 48
29. $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 7$

Ejercicios 2.5, página 87

1. Teorema 8.11 3. Teorema 8.14
5. Teorema 8.12 7. Teorema 8.10
9. Teorema 8.8 11. –5 13. –5
15. 80 17. –105 23. 0 25. –15
27. –9 29. 0 31. 16

Ejercicios 2.6, página 97

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & -\frac{13}{30} & -\frac{8}{15} \\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{2}{15} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{27} & \frac{1}{27} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{10}{27} & \frac{17}{27} & -\frac{2}{9} & -\frac{17}{9} \\ \frac{4}{27} & -\frac{4}{27} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$

19. Matriz singular 21. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 25. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 31. $x = 5$

35. Mediante el teorema 7.13, $\det \mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\ \det\mathbf{B}$. Puesto que $\det \mathbf{A} \neq 0$ y $\det \mathbf{B} \neq 0$, se puede deducir que $\det \mathbf{AB} \neq 0$. De acuerdo con el teorema 7.19, **AB** es no singular.

37. El resultado se deduce a partir de $\det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{I}$.

39. Multiplique $\mathbf{AB} = 0$ por $\mathbf{A}^{-1}$. 41. no

43. $x_1 = 6, x_2 = -2$ 45. $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}$

47. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -6$ 49. $x_1 = 21, x_2 = 1, x_3 = -11$

51. $x_1 = \frac{9}{10}, x_2 = \frac{13}{20}$;

$x_1 = 6, x_2 = 16$;

$x_1 = -2, x_2 = -7$

53. El sistema tiene solamente una solución trivial.

55. El sistema tiene soluciones no triviales.

57. $$i_1 = \frac{-R_3E_2 + R_3E_1 + R_2E_1 - R_2E_3}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2},$$

$$i_2 = \frac{R_3E_2 - R_3E_1 - R_1E_3 + R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2},$$

$$i_3 = \frac{-R_2E_1 + R_1E_3 + R_2E_3 - R_1E_2}{R_3R_1 + R_3R_2 + R_1R_2}$$

Ejercicios 2.7, página 101

1. $x_1 = -\frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ 3. $x_1 = 0.1, x_2 = -0.3$

5. $x = 4, y = -7$ 7. $x_1 = -4, x_2 = 4, x_3 = -5$

9. $u = 4, v = \frac{3}{2}, w = 1$ 11. $k = \frac{6}{5}$

13. $T_1 \approx 450.8$ lb, $T_2 \approx 423$ lb

Ejercicios 2.8, página 107

1. $\mathbf{K}_3, \lambda = -1$ 3. $\mathbf{K}_3, \lambda = 0$

5. $\mathbf{K}_2, \lambda = 3$; $\mathbf{K}_3, \lambda = 1$

7. $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. $\lambda_1 = \lambda_2 = -4, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

11. $\lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 5 \end{pmatrix}$

13. $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -5$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix}$

15. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -4$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$

21. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = -7$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

23. Para $\mathbf{A}$, $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 6$,

$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

25. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 6$

Ejercicios 2.9, página 111

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{7}[3(-1)^m 2^{m+1} + (5)^m] & -\frac{3}{7}[(-2)^m - 5^m] \\ -\frac{2}{7}[(-2)^m - 5^m] & \frac{1}{7}[(-2)^m - 6(5)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 11 & 57 \\ 38 & 106 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + (-1)^m] & \frac{5}{3}2^{m-2}[5^m - (-1)^m] \\ \frac{1}{3}[10^m - (-2)^m] & \frac{1}{3}2^{m-1}[5^m + 5(-1)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 83328 & 41680 \\ 33344 & 16640 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2^m - 1 & 2^m - 1 \\ 0 & \frac{1}{3}[2^{m+1} + (-1)^m] & \frac{2}{3}[2^m - (-1)^m] \\ 0 & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m] \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 1 & 1023 & 1023 \\ 0 & 683 & 682 \\ 0 & 341 & 342 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} - (-1)^m 2^{m+1}] & \frac{1}{3}[4^m + (-1)^m 2^{m+1}] & 0 \\ \frac{1}{3}[2^{2m+1} + (-2)^m - 3] & \frac{1}{3}[4^m - (-2)^m] & 1 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 699392 & 349184 & 0 \\ 698368 & 350208 & 0 \\ 699391 & 349184 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 7m4^{m+1} + (1-m)4^m & 3m4^{m-1} \\ -3m4^{m-1} & m4^{m-1} + (1-m)4^m \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 22528 & 18432 \\ -18432 & -14336 \end{pmatrix}$

13. *a*) $4^m \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, m > 1$

b) $\mathbf{A}^m = \mathbf{0}, m > 1$

c)

$$\begin{pmatrix} 2(3)^{m-1} & 3^{m-1} & 3^{m-1} \\ \frac{1}{6}[9(2)^m - 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m - 2(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m - 2(3)^m] \\ \frac{1}{6}[-9(2)^m + 8(3)^m] & \frac{1}{6}[-3(2)^m + 4(3)^m] & \frac{1}{6}[3(2)^m + 4(3)^m] \end{pmatrix}$$

15. $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ 17. b–f

Ejercicios 2.10, página 118

1. *b*) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 16$
3. *b*) $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = \lambda_3 = -8$ 5. ortogonal
7. ortogonal 9. no ortogonal

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

19. $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{3}{5}$
21. *b*) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$

c) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

23. Utilice $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Ejercicios 2.11, página 125

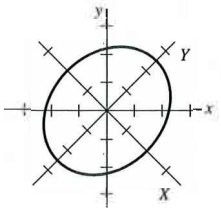
1. $2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3. $14, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 5. $10, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$
7. 7 y 2 9. 4, 3, y 1
11. aproximadamente 0.2087
13. *c*) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

d) 0.59

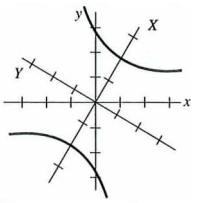
e) aproximadamente $9.44EI/L^2$

Ejercicios 2.12, página 134

1. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
3. no diagonalizable
5. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$



7. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$
9. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
11. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



13. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
15. no diagonalizable
17. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

19. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
23. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} & \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

25. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

29. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

31. Elipse; utilizando

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mathbf{X}'$$

obtenemos $X^2/4 + Y^2/6 = 1$.

33. Hipérbola; utilizando

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \mathbf{X}'$$

obtenemos $X^2/4 - Y^2/4 = 1$.

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 39. $\mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}$

Ejercicios 2.13, página 137

1. *a)* $\begin{pmatrix} 35 & 15 & 38 & 36 & 0 \\ 27 & 10 & 26 & 20 & 0 \end{pmatrix}$

3. *a)* $\begin{pmatrix} 48 & 64 & 120 & 107 & 40 \\ 32 & 40 & 75 & 67 & 25 \end{pmatrix}$

5. *a)* $\begin{pmatrix} 31 & 44 & 15 & 61 & 50 & 49 & 41 \\ 24 & 29 & 15 & 47 & 35 & 31 & 21 \\ 1 & -15 & 15 & 0 & -15 & -5 & -19 \end{pmatrix}$

7. STUDY_HARD

9. MATH_IS_IMPORTANT_

11. DAD_I_NEED_MONEY_TODAY

13. *a)* $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 15 & 22 & 20 & 8 & 23 & 6 & 21 & 22 \\ 10 & 22 & 18 & 23 & 25 & 2 & 23 & 25 \\ 3 & 26 & 26 & 14 & 23 & 16 & 26 & 12 \end{pmatrix}$

Ejercicios 2.14, página 143

1. (0 1 1 0)
3. (0 0 0 1 1)
5. (1 0 1 0 1 0 0 1)
7. (1 0 0)
9. error de paridad
11. (1 0 0 1 1)
13. (0 0 1 0 1 1 0)
15. (0 1 0 0 1 0 1)
17. (1 1 0 0 1 1 0)
19. palabra de código; (0 0 0 0)
21. (0 0 0 1)
23. palabra de código; (1 1 1 1)
25. (1 0 0 1)
27. (1 0 1 0)
29. $2^7 = 128$; $2^4 = 16$;
(0 0 0 0 0 0 0), (0 1 0 0 1 0 1),
(0 1 1 0 0 1 1), (0 1 0 1 0 1 0),
(0 1 1 1 1 0 0), (0 0 1 0 1 1 0),
(0 0 1 1 0 0 1), (0 0 0 1 1 1 1),
(1 0 0 0 0 1 1), (1 1 0 0 1 1 0),
(1 0 1 0 1 0 1), (1 0 0 1 1 0 0),
(1 1 1 0 0 0 0), (1 1 0 1 0 0 1),
(1 0 1 1 0 1 0), (1 1 1 1 1 1 1)

Ejercicios 2.15, página 146

1. $y = 0.4x + 0.6$
3. $y = 1.1x - 0.3$
5. $y = 1.3571x + 1.9286$
7. $v = -0.84T + 234$, 116.4, 99.6

Ejercicios 2.16, página 150

1. *a)* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 60 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 96 \\ 54 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 98.4 \\ 51.6 \end{pmatrix}$ *c)* $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \end{pmatrix}$

3. *a)* $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \\ 72 \end{pmatrix}$ *c)* $\hat{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$

Ejercicios de repaso del capítulo 2, página 151

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, (11)$ 5. falso

7. $\frac{5}{8}, -5$ 9. 0 11. falso 13. verdadero
15. falso 17. verdadero 19. falso

23. *a)* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 25. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 7, x_3 = \frac{1}{2}$

29. 240 31. solamente la solución trivial

33. $I_2 + 10HNO_3 \rightarrow 2HIO_3 + 10NO_2 + 4H_2O$

35. $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{2}{3}$

37. $x = X\cos\theta - Y\operatorname{sen}\theta$,

$y = X\operatorname{sen}\theta + Y\cos\theta$

39. $x_1 = 7, x_2 = 5, x_3 = 23$

41. $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1, \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

43. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8,$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

45. $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 5,$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

47. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

49. hipérbola

51.

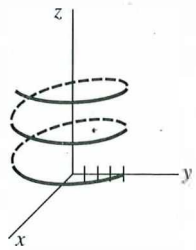
$$\begin{pmatrix} 204 & 13 & 208 & 55 & 124 & 120 & 105 & 214 & 50 & 6 & 138 & 19 & 210 \\ 185 & 12 & 188 & 50 & 112 & 108 & 96 & 194 & 45 & 6 & 126 & 18 & 189 \end{pmatrix}$$

53. HELP_IS_ON_THE_WAY

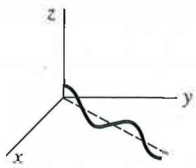
55. (1 1 0 0 1); error de paridad

Ejercicios 3.1, página 161

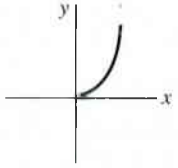
1.



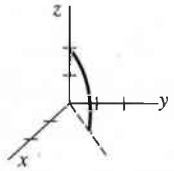
3.



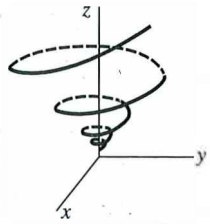
5.



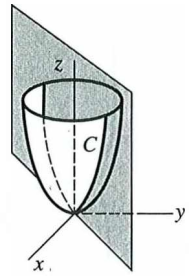
7.



9.

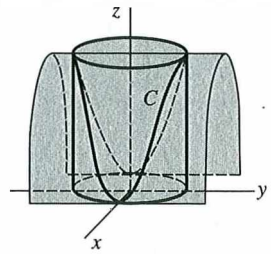


11.



$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$

13.



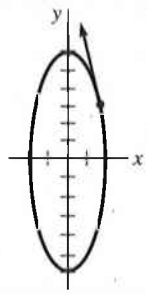
$\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 9\operatorname{sen}^2 t\mathbf{k}$

15. $2\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$

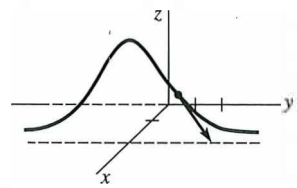
17. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$

19. $\langle e^{2t}(2t+1), 3t^2, 8t-1\rangle$; $\langle 4e^{2t}(t+1), 6t, 8\rangle$

21.



23.



25. $x = 2 + t, y = 2 + 2t, z = \frac{8}{3} + 4t$

27. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$

29. $\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$

31. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$

33. $\frac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$

35. $e^t(t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{k} + \mathbf{c}$

37. $(6t+1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$

39. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$

41. $2\sqrt{a^2 + c^2}\pi$

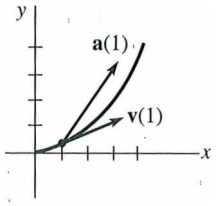
43. $6(e^{3\pi} - 1)$

45. $a\cos(s/a)\mathbf{i} + a\operatorname{sen}(s/a)\mathbf{j}$

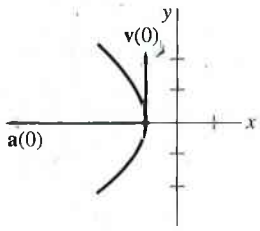
47. Diferenciar $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c^2$.

Ejercicios 3.2, página 165

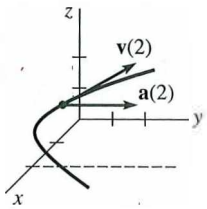
1. La rapidez es $\sqrt{5}$.



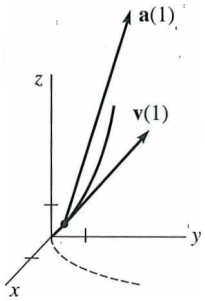
3. La rapidez es 2.



5. La rapidez es $\sqrt{5}$.



7. La rapidez es $\sqrt{14}$.



9. (0, 0, 0) y (25, 115, 0);
$\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$,
$\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

11. $\mathbf{r}(t) = (-16t^2 + 240t)\mathbf{j} + 240\sqrt{3}t\mathbf{i}$ y
$x(t) = 240\sqrt{3}t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$; 900 ft; aproximadamente 6235 ft; 480 ft/s

13. 72.11 ft/s

15. 97.98 ft/s

17. Asuma que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del objetivo en $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0 \cos\theta) = y_0/(v_0 \operatorname{sen}\theta)$. Esto implica que $\tan\theta = y_0/x_0$. En otras palabras, apunta directamente al objetivo en $t = 0$.

21. 191.33 lb

23. $y = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + (\tan\theta)x + s_0$ es la ecuación de una parábola.

25. $\mathbf{r}(t) = k_1e^{2t}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2t^2 + k_2}\mathbf{j} + (k_3e^{t^2} - 1)\mathbf{k}$

27. Dado que $\mathbf{F}$ está dirigido a lo largo de $\mathbf{r}$, debemos hacer que $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$ para alguna constante c. Por tanto, $\tau = \mathbf{r} \times (c\mathbf{r}) = c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\tau = \mathbf{0}$, entonces $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$. Esto implica que $\mathbf{L}$ es una constante.

Ejercicios 3.3, página 171

1. $\mathbf{T} = (\sqrt{5}/5)(-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

3. $\mathbf{T} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(-a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k})$,
$\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$,
$\mathbf{B} = (a^2 + c^2)^{-1/2}(c \operatorname{sen} t\mathbf{i} - c\cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$,
$\kappa = a/(a^2 + c^2)$

5. $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$

7. $4t/\sqrt{1 + 4t^2}$, $2/\sqrt{1 + 4t^2}$

9. $2\sqrt{6}$, 0, $t > 0$

11. $2t/\sqrt{1 + t^2}$, $2/\sqrt{1 + t^2}$

13. 0, 5

15. $-\sqrt{3}e^{-t}$, 0

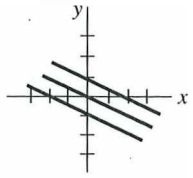
17. $\kappa = \dfrac{\sqrt{b^2c^2\operatorname{sen}^2t + a^2c^2\cos^2t + a^2b^2}}{(a^2\operatorname{sen}^2t + b^2\cos^2t + c^2)^{3/2}}$

23. $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$; $\kappa = 2/\sqrt{125} \approx 0.18$,
$\rho = \sqrt{125}/2 \approx 5.59$; la curva es más aguda en (0, 0).

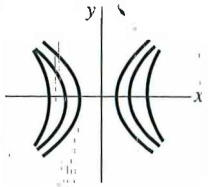
25. κ es cercana a cero.

Ejercicios 3.4, página 176

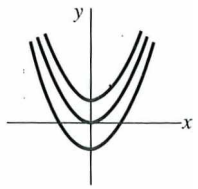
1.



3.



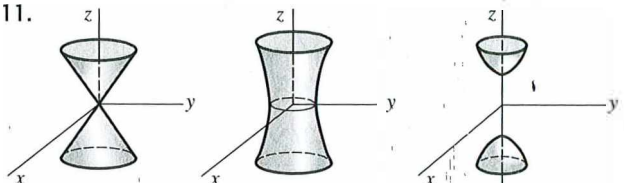
5.



7. cilindros elípticos

9. elipsoides

11.



13. $\partial z/\partial x = 2x - y^2$, $\partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$

15. $\partial z/\partial x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 30x^4$,
$\partial z/\partial y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$

17. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1)$,
$\partial z/\partial y = -24\sqrt{xy}/(3y^2 + 1)^2$

19. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}$,
$\partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$

21. $\partial z/\partial x = -10\cos 5x \operatorname{sen} 5x$,
$\partial z/\partial y = 10 \operatorname{sen} 5y \cos 5y$

23. $f_x = e^{x^3y}(3x^3y + 1)$, $f_y = x^4e^{x^3y}$

25. $f_x = 7y/(x + 2y)^2$, $f_y = -7x/(x + 2y)^2$

27. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3)$, $g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$

29. $w_x = x^{-1/2}y$, $w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}$,
$w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$

31. $F_u = 2uw^2 - v^3 - vwt^2 \operatorname{sen}(ut^2)$,
$F_v = -3uv^2 + w\cos(ut^2)$, $F_x = 128x^7t^4$,
$F_t = -2uvwt \operatorname{sen}(ut^2) + 64x^8t^3$

39. $\partial z/\partial x = 3x^2v^2e^{uv^2} + 2uve^{uv^2}$, $\partial z/\partial y = -4yuve^{uv^2}$

41. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v)$,
$\partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$

43. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta$,
$\partial w/\partial\theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\cos\theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t}\operatorname{sen}\theta$

45. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2}$,
$\partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{xu}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{y\cosh rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{xs}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{sty\cosh rs}{u(x^2 + y^2)^{1/2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{xt}{(x^2 + y^2)^{1/2}(rs + tu)} + \dfrac{ty\cosh rs}{u^2(x^2 + y^2)^{1/2}}$

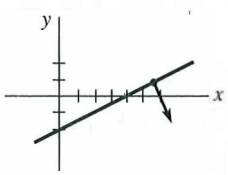
49. $dz/dt = (4ut - 4vt^{-3})/(u^2 + v^2)$

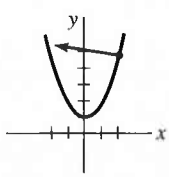
51. $dw/dt|_{t=\pi} = -2$ 57. 5.31 cm^2/s

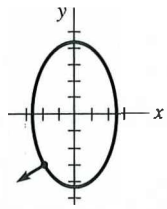
Ejercicios 3.5, página 182

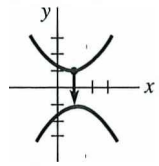
1. $(2x - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\mathbf{j}$
3. $(y^2/z^3)\mathbf{i} + (2xy/z^3)\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\mathbf{k}$
5. $4\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ 7. $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$
9. $\sqrt{3}x + y$ 11. $\frac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$
13. $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$ 15. $98/\sqrt{5}$ 17. $-3\sqrt{2}$
19. -1 21. $-12/\sqrt{17}$
23. $\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}/2)\,\mathbf{j}$, $\sqrt{5/2}$
25. $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $2\sqrt{6}$
27. $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\,\mathbf{j}$, $-8\sqrt{\pi/3}$
29. $-\frac{3}{8}\mathbf{i} - 12\,\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$, $-\sqrt{83\,281}/24$
31. $\pm 31\sqrt{17}$
33. $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$; $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$
35. $D_{\mathbf{u}}f = (9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)/\sqrt{10}$;
$D_{\mathbf{u}}F = (-6x^2 - 54y^2 + 54x + 6y - 72xy)/10$
37. $(2, 5)$, $(-2, 5)$
39. $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
41. $x = 3e^{-4t}$, $y = 4e^{-2t}$
43. Una función posible es $f(x, y) = x^3 - \frac{2}{3}y^3 + xy^3 + e^{xy}$.

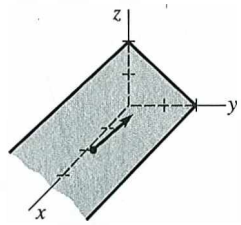
Ejercicios 3.6, página 186

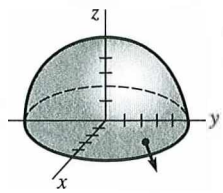
1.


3.


5.


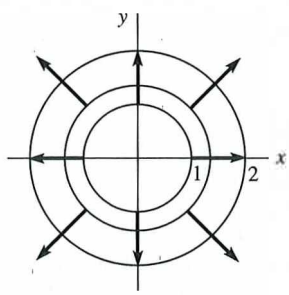
7.


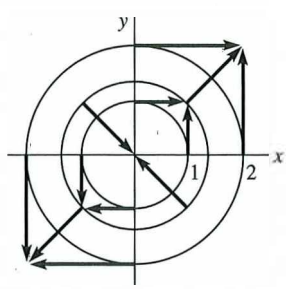
9.


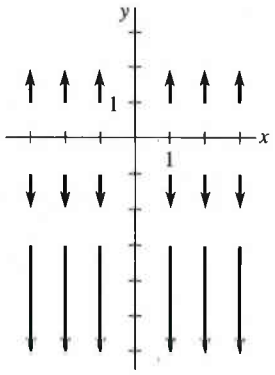
11.


13. $(-4, -1, 17)$
15. $-2x + 2y + z = 9$
17. $6x - 2y - 9z = 5$
19. $6x - 8y + z = 50$
21. $2x + y - \sqrt{2}z = (4 + 5\pi)/4$
23. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$
25. $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -3/\sqrt{2})$
27. $(-2, 0, 5)$, $(-2, 0, -3)$
33. $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 1 + 2t$
35. $(x - \frac{1}{2})/4 = (y - \frac{1}{3})/6 = -(z - 3)$

Ejercicios 3.7, página 191

1.


3.


5. 

7. $(x - y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$; $2z$ 9. $\mathbf{0}$; $4y + 8z$

11. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$; $6xy$

13. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}$; $e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$

15. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j}$
$+ (-3x^2yze^z - xe^x)\mathbf{k}$; $xye^x + ye^x - x^3ze^z$

35. $2\mathbf{i} + (1 - 8y)\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

45. div $\mathbf{F} = 1 \neq 0$. Si existiera un campo vectorial $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F}$ = rot $\mathbf{G}$, entonces necesariamente div $\mathbf{F}$ = div rot $\mathbf{G} = 0$.

Ejercicios 3.8, página 200

1. $-125/3\sqrt{2}$; $-250(\sqrt{2} - 4)/12$; $\frac{125}{2}$

3. 3; 6; $3\sqrt{5}$ 5. -1; $(\pi - 2)/2$; $\pi^2/8$; $\sqrt{2}\,\pi^2/8$

7. 21 9. 30 11. 1 13. 1

15. 460 17. $\frac{26}{9}$ 19. $-\frac{64}{3}$ 21. $-\frac{8}{3}$

23. 0 25. $\frac{123}{2}$ 27. 70 29. $-\frac{19}{8}$

31. e 33. -4 35. 0

37. En cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.

41. $\bar{x} = \frac{3}{2}, \bar{y} = 2/\pi$

Ejercicios 3.9, página 208

1. $\frac{16}{3}$ 3. 14 5. 3 7. 330

9. 1096 11. $\phi = x^4y^3 + 3x + y$

13. no es un campo gradiente 15. $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4$

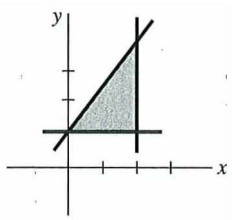
17. $3 + e^{-1}$ 19. 63 21. $8 + 2e^3$

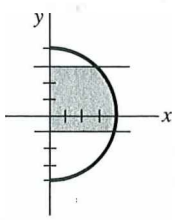
23. 16 25. $\pi - 4$ 27. $\phi = (Gm_1m_2)/|\mathbf{r}|$

Ejercicios 3.10, página 218

1. $24y - 20e^y$ 3. $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$ 5. $\frac{x}{2}\ln 5$

7. $2 - \operatorname{sen} y$

9. 

11. 

13. $\frac{1}{21}$ 15. $\frac{25}{84}$ 17. 96

19. $2\ln 2 - 1$ 21. $\frac{14}{3}$ 23. c, 16π

25. 18 27. 2π 29. 4 31. $30\ln 6$

33. $15\pi/4$ 35. $(2^{3/2} - 1)/18$ 37. $\frac{2}{3}$ sen 8

39. $\pi/8$ 41. $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$

43. $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$

45. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ 47. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$

49. $\bar{x} = (3e^4 + 1)/[4(e^4 - 1)]$,
$\bar{y} = 16(e^5 - 1)/[25(e^4 - 1)]$

51. $\frac{1}{105}$ 53. $4k/9$ 55. $\frac{256}{21}$ 57. $\frac{941}{10}$

59. $a\sqrt{10}/5$ 61. $ab^3\pi/4$; $a^3b\pi/4$; $b/2$; $a/2$

63. $ka^4/6$ 65. $16\sqrt{2}k/3$ 67. $a\sqrt{3}/3$

Ejercicios 3.11, página 221

1. $27\pi/2$ 3. $(4\pi - 3\sqrt{3})/6$ 5. $25\pi/3$

7. $(2\pi/3)(15^{3/2} - 7^{3/2})$ 9. $\frac{5}{4}$

11. $\bar{x} = 13/3\pi, \bar{y} = 13/3\pi$ 13. $\bar{x} = \frac{12}{5}, \bar{y} = 3\sqrt{3}/2$

15. $\bar{x} = (4 + 3\pi)/6, \bar{y} = \frac{4}{3}$ 17. $\pi a^4k/4$

19. $(ka/12)(15\sqrt{3} - 4\pi)$ 21. $\pi a^4k/2$

23. $4k$ 25. 9π 27. $(\pi/4)(e - 1)$

29. $3\pi/8$ 31. 250

33. aprox. 1450 m^3 35. $\sqrt{\pi}/2$

Ejercicios 3.12, página 227

1. 3 3. 0 5. 75π 7. 48π

9. $\frac{56}{3}$ 11. $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{1}{8}$

15. $(b \times a) \times$ (área de la región enmarcada por C)

19. $3a^2\pi/8$ 23. $45\pi/2$ 25. π

27. $27\pi/2$ 29. $3\pi/2$ 33. 3π

Ejercicios 3.13, página 235

1. $3\sqrt{29}$ 3. $10\pi/3$ 5. $(\pi/6)(17^{3/2} - 1)$

7. $25\pi/6$ 9. $2a^2(\pi - 2)$ 11. $8a^2$

13. $2\pi a(c_2 - c_1)$ 15. $\frac{26}{3}$ 17. 0

19. 972π 21. $(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)/15$

23. $9(17^{3/2} - 1)$ 25. $12\sqrt{14}$ 27. $k\sqrt{3}/12$

29. 18 31. 28π 33. 8π 35. $5\pi/2$

37. $-8\pi a^3$ 39. $4\pi kq$ 41. $(1, \frac{2}{3}, 2)$

Ejercicios 3.14, página 241

1. -40π 3. $\frac{45}{2}$ 5. $\frac{3}{2}$ 7. -3

9. $-3\pi/2$ 11. π 13. -152π

15. 112 17. Considere que la superficie es $z = 0$; $81\pi/4$.

Ejercicios 3.15, página 252

1. 48 3. 36 5. $\pi - 2$
7. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e$ 9. 50
11. $\int_0^4 \int_0^{2-(x/2)} \int_{x+2y}^4 F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$

$\int_0^2 \int_{2y}^4 \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\, dx\, dz\, dy;$

$\int_0^4 \int_0^{z/2} \int_0^{z-2y} F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$

$\int_0^4 \int_x^4 \int_0^{(z-x)/2} F(x, y, z)\, dy\, dz\, dx;$

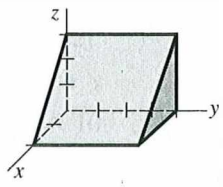
$\int_0^4 \int_0^z \int_0^{(z-x)/2} F(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

13. $\int_0^2 \int_{x^3}^8 \int_0^4 dz\, dy\, dx;$

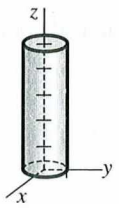
$\int_0^8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt[3]{y}} dx\, dz\, dy;$

$\int_0^4 \int_0^2 \int_{x^3}^8 dy\, dx\, dz$

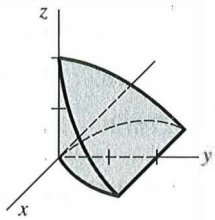
15.



17.



19.



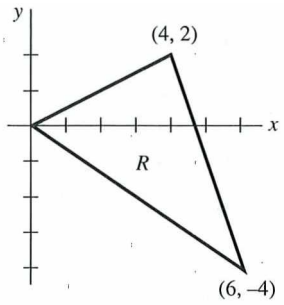
21. $16\sqrt{2}$ 23. 16π
25. $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{32}{7}, \bar{z} = \frac{8}{3}$ 27. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2, \bar{z} = 0$
29. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2y+2}^{8-y} (x + y + 4)\, dz\, dy\, dx$
31. $2560k/3$; $\sqrt{80/9}$ 33. $k/30$
35. $(-10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2}, 5)$ 37. $(\sqrt{3}/2, \frac{3}{2}, -4)$
39. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$ 41. $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$
43. $r^2 + z^2 = 25$ 45. $r^2 - z^2 = 1$
47. $z = x^2 + y^2$ 49. $x = 5$
51. $(2\pi/3)(64 - 12^{3/2})$ 53. $625\pi/2$
55. $(0, 0, 3a/8)$ 57. $8\pi k/3$
59. $(\sqrt{3}/3, \frac{1}{3}, 0); (\frac{2}{3}, \pi/6, 0)$
61. $(-4, 4, 4\sqrt{2}); (4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$
63. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$ 65. $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$
67. $\rho = 8$ 69. $\phi = \pi/6, \phi = 5\pi/6$
71. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 73. $z = 2$
75. $9\pi(2 - \sqrt{2})$ 77. $2\pi/9$
79. $(0, 0, \frac{7}{6})$ 81. πk

Ejercicios 3.16, página 259

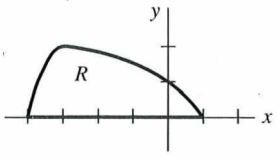
1. $\frac{3}{2}$ 3. $12a^5\pi/5$ 5. 256π 7. $62\pi/5$
9. $4\pi(b - a)$ 11. 128 13. $\pi/2$

Ejercicios 3.17, página 265

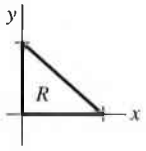
1. (0, 0), (−2, 8), (16, 20), (14, 28)
3.



5.



7. $-2v$
9. $-\frac{1}{3}u^2$
11.

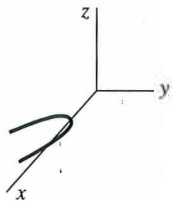


(0, 0) es la imagen de cada punto en la frontera $u = 0$.

13. 16 15. $\frac{1}{2}$ 17. $\frac{1}{4}(b - a)(d - c)$
19. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ 21. $\frac{315}{4}$ 23. $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$
25. 126 27. $\frac{5}{2}(b - a) \ln \frac{d}{c}$ 29. $15\pi/2$

Ejercicios de repaso del capítulo 3, página 267

1. verdadero 3. verdadero 5. falso 7. verdadero
9. falso 11. falso 13. verdadero
15. verdadero 17. verdadero
19. $\nabla\phi = -\dfrac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$
21. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{k}$ para toda t
23. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$

25. 

27. $(6x^2 - 2y^2 - 8xy)/\sqrt{40}$ 29. $2; -2/\sqrt{2}; 4$

31. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$

33. $\displaystyle\int_0^1 \int_x^{2x} \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx;$

$\displaystyle\int_0^1 \int_{y/2}^{y} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy; \frac{1}{3}$

35. $41k/1\,512$ 37. 8π 39. $6xy$

41. 0 43. $56\sqrt{2}\ \pi^3/3$

45. 12 47. $2 + 2/3\pi$ 49. $\pi^2/2$

51. $(\ln 3)(17^{3/2} - 5^{3/2})/12$

53. $-4\pi c$ 55. 0 57. 125π 59. 3π

61. $\frac{5}{3}$ 63. 0 65. π

Ejercicios 4.1, página 277

7. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

9. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

11. $\|1\| = \sqrt{p}; \left\| \cos \dfrac{n\pi}{p} x \right\| = \sqrt{\dfrac{p}{2}}$

21. *a*) $T = 1$ *b*) $T = \pi L/2$ *c*) $T = 2\pi$
d) $T = \pi$ *e*) $T = 2\pi$ *f*) $T = 2p$

Ejercicios 4.2, página 282

1. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx$

3. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} n\pi x \right\}$

5. $f(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos nx + \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1] \right) \operatorname{sen} nx \right\}$

7. $f(x) = \pi + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} \cos nx$

11. $f(x) = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2} x + \frac{3}{n}\left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} x \right\}$

13. $f(x) = \dfrac{9}{4} + 5\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{5} x + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{5} x \right\}$

15. $f(x) = \dfrac{2 \operatorname{senh} \pi}{\pi} \left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} (\cos nx - n \operatorname{sen} nx) \right]$

19. Fije el valor de $x = \pi/2$.

Ejercicios 4.3, página 288

1. impar 3. ni par ni impar 5. par

7. impar 9. ni par ni impar

11. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \operatorname{sen} nx$

13. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx$

15. $f(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$

17. $f(x) = \dfrac{2\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx$

19. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n(1 + \pi)}{n} \operatorname{sen} nx$

21. $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{4}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi}{2} x$

23. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos nx$

25. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n} \cos n\pi x$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n} \operatorname{sen} n\pi x$

27. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2} \cos 2nx$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \operatorname{sen} 2nx$

29. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1}{n^2} \cos nx$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2} \operatorname{sen} nx$

31. $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} \cos\frac{n\pi}{2}x$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}(-1)^n \right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x$

33. $f(x) = \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{n^2} \cos n\pi x$

$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3} \right\} \operatorname{sen} n\pi x$

35. $f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2}\cos nx - \frac{\pi}{n}\operatorname{sen} nx \right\}$

37. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} 2n\pi x$

39. $x_p(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n(10 - n^2)} \operatorname{sen} nt$

41. $x_p(t) = \frac{\pi^2}{18} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 48)} \cos nt$

43. $x(t) = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{10 - n^2} \left\{ \frac{1}{n}\operatorname{sen} nt - \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{sen}\sqrt{10}t \right\}$

45. *b)* $y(x) = \frac{2w_0L^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$

Ejercicios 4.4, página 293

1. $f(x) = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi i} e^{in\pi x/2}$

3. $f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{1 - e^{-in\pi/2}}{2n\pi i} e^{2in\pi x}$

5. $f(x) = \pi + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{n} e^{inx}$

Ejercicios 4.5, página 300

1. $y = \cos\alpha_n x$; α definido por $\cot\alpha = \alpha$;
$\lambda_1 = 0.7402$, $\lambda_2 = 11.7349$,
$\lambda_3 = 41.4388$, $\lambda_4 = 90.8082$
$y_1 = \cos 0.8603x$, $y_2 = \cos 3.4256x$,
$y_3 = \cos 6.4373x$, $y_4 = \cos 9.5293x$

5. $\frac{1}{2}[1 + \operatorname{sen}^2\alpha_n]$

7. *a)* $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln 5}\right)^2$, $y_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\frac{d}{dx}[xy'] + \frac{\lambda}{x}y = 0$

c) $\int_1^5 \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{\ln 5}\ln x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln 5}\ln x\right) dx = 0, m \neq n$

9. $\frac{d}{dx}[xe^{-x}y'] + ne^{-x}y = 0$;
$\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx = 0, m \neq n$

11. *a)* $\lambda_n = 16n^2$, $y_n = \operatorname{sen}(4n \tan^{-1} x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \operatorname{sen}(4m \tan^{-1}x) \operatorname{sen}(4n \tan^{-1}x)\,dx = 0$,
$m \neq n$

Ejercicios 4.6, página 307

1. $\alpha_1 = 1.277$, $\alpha_2 = 2.339$, $\alpha_3 = 3.391$, $\alpha_4 = 4.441$

3. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i J_1(2\alpha_i)} J_0(\alpha_i x)$

5. $f(x) = 4\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i J_1(2\alpha_i)}{(4\alpha_i^2 + 1)J_0^2(2\alpha_i)} J_0(\alpha_i x)$

7. $f(x) = 20\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i J_2(4\alpha_i)}{(2\alpha_i^2 + 1)J_1^2(4\alpha_i)} J_1(\alpha_i x)$

9. $f(x) = \frac{9}{2} - 4\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_2(3\alpha_i)}{\alpha_i^2 J_0^2(3\alpha_i)} J_0(\alpha_i x)$

15. $f(x) = \frac{1}{4}P_0(x) + \frac{1}{2}P_1(x) + \frac{5}{16}P_2(x) - \frac{3}{32}P_4(x) + \cdots$

21. $f(x) = \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + \cdots$,
$f(x) = |x|$ en $(-1, 1)$

Ejercicios de repaso del capítulo 4, página 308

1. verdadero
3. coseno
5. falso
7. 5.5, 1, 0
9. verdadero

13. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] \cos n\pi x + \frac{2}{n}(-1)^n \operatorname{sen} n\pi x \right\}$

15. $f(x) = 1 - e^{-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-1}}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x$;
$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi[1 - (-1)^n e^{-1}]}{1 + n^2\pi^2} \operatorname{sen} n\pi x$

17. $\lambda_n = \frac{(2n - 1)^2\pi^2}{36}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,
$y_n = \cos\left(\frac{2n - 1}{2}\pi \ln x\right)$

19. $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $-1 \leq x \leq 1$,
$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} T_m(x)T_n(x)\,dx = 0, m \neq n$

21. $f(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(2\alpha_i)}{\alpha_i J_1^2(4\alpha_i)} J_0(\alpha_i x)$

Ejercicios 5.1, página 313

1. Los casos posibles pueden resumirse en una forma $u = c_1 e^{c_2(x+y)}$, donde c_1 y c_2 son constantes.

3. $u = c_1 e^{y + c_2(x - y)}$
5. $u = c_1(xy)^{c_2}$

7. no separable

9. $u = e^{-t}(A_1 e^{k\alpha^2 t}\cosh \alpha x + B_1 e^{k\alpha^2 t}\operatorname{senh} \alpha x)$
$u = e^{-t}(A_2 e^{-k\alpha^2 t}\cos \alpha x + B_2 e^{-k\alpha^2 t}\operatorname{sen} \alpha x)$
$u = e^{-t}(A_3 x + B_3)$

11. $u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cosh \alpha a t + c_4 \operatorname{senh} \alpha a t)$
$u = (c_5 \cos \alpha x + c_6 \operatorname{sen} \alpha x)(c_7 \cos \alpha a t + c_8 \operatorname{sen} \alpha a t)$
$u = (c_9 x + c_{10})(c_{11} t + c_{12})$

13. $u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cos \alpha y + c_4 \operatorname{sen} \alpha y)$
$u = (c_5 \cos \alpha x + c_6 \operatorname{sen} \alpha x)(c_7 \cosh \alpha y + c_8 \operatorname{senh} \alpha y)$
$u = (c_9 x + c_{10})(c_{11} y + c_{12})$

15. Para $\lambda = \alpha^2 > 0$ existen tres posibilidades:

i) Para $0 < \alpha^2 < 1$,
$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cosh \sqrt{1 - \alpha^2}\, y + c_4 \operatorname{senh} \sqrt{1 - \alpha^2}\, y)$

ii) Para $\alpha^2 > 1$,
$u = (c_1 \cosh \alpha x + c_2 \operatorname{senh} \alpha x)(c_3 \cos \sqrt{\alpha^2 - 1}\, y + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{\alpha^2 - 1}\, y)$

iii) Para $\alpha^2 = 1$,
$u = (c_1 \cosh x + c_2 \operatorname{senh} x)(c_3 y + c_4)$

Los resultados para el caso $\lambda = -\alpha^2$ son similares.
Para $\lambda = 0$:
$u = (c_1 x + c_2)(c_3 \cosh y + c_4 \operatorname{senh} y)$

17. elíptica
19. parabólica
21. hiperbólica
23. parabólica
25. hiperbólica

Ejercicios 5.2, página 319

1. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$
$u(0, t) = 0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0, t > 0$
$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

3. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$
$u(0, t) = 100, \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -hu(L, t), t > 0$
$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

5. $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu = \dfrac{\partial u}{\partial t}, 0 < x < L, t > 0$, h es una constante
$u(0, t) = \operatorname{sen}(\pi t/L), u(L, t) = 0, t > 0$
$u(x, 0) = f(x), 0 < x < L$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$
$u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0$
$u(x, 0) = x(L - x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

9. $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < L, t > 0$
$u(0, t) = 0, u(L, t) = \operatorname{sen} \pi t, t > 0$
$u(x, 0) = f(x), \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, 0 < x < L$

11. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 < x < 4, 0 < y < 2$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u(4, y) = f(y), 0 < y < 2$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, u(x, 2) = 0, 0 < x < 4$

Ejercicios 5.3, página 321

1. $u(x, t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\cos\frac{n\pi}{2} + 1}{n}\right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$

3. $u(x, t) = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \times e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x$

5. $u(x, t) = e^{-ht}\left[\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \times e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\cos\frac{n\pi}{L}x\right]$

Ejercicios 5.4, página 325

1. $u(x, t) = \dfrac{L^2}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{L}t \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$

3. $u(x, t) = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi a}{L}t \operatorname{sen}\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi a}{L}t \times \operatorname{sen}\frac{5\pi}{L}x + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi a}{L}t \operatorname{sen}\frac{7\pi}{L}x - \cdots\right)$

5. $u(x, t) = \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} at \operatorname{sen} x$

7. $u(x, t) = \dfrac{8h}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{L}t \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x$

9. $u(x, t) = e^{-\beta t}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left\{\cos q_n t + \frac{\beta}{q_n}\operatorname{sen} q_n t\right\}\operatorname{sen} nx,$
donde $A_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ y $q_n = \sqrt{n^2 - \beta^2}$

13. $u(x, t) = t + \operatorname{sen} x \cos 2at$

15. $u(x, t) = \dfrac{1}{2a} \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2at$

17. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n^2\pi^2}{L^2} at + B_n \operatorname{sen} \frac{n^2\pi^2}{L^2} at \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x,$

donde $A_n = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx$

$B_n = \dfrac{2L}{n^2\pi^2 a} \displaystyle\int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x\, dx$

Ejercicios 5.5, página 331

1. $u(x, y) = \dfrac{2}{a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx \right) \times \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x$

3. $u(x, y) = \dfrac{2}{a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx \right) \times \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} (b - y) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x$

5. $u(x, y) = \dfrac{1}{2} x + \dfrac{2}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2 \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} n\pi x \cos n\pi y$

7. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \times \frac{n \cosh nx + \operatorname{senh} nx}{n \cosh n\pi + \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh n\pi y + B_n \operatorname{senh} n\pi y) \operatorname{sen} n\pi x,$

donde $A_n = 200 \dfrac{[1 - (-1)^n]}{n\pi}$

$B_n = 200 \dfrac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} \dfrac{[2 - \cosh n\pi]}{\operatorname{senh} n\pi}$

11. $u(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \right) e^{-ny} \operatorname{sen} nx$

13. $u(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh \frac{n\pi}{a} y + B_n \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} y \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x,$

donde $A_n = \dfrac{2}{a} \displaystyle\int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx$

$B_n = \dfrac{1}{\operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b} \left(\dfrac{2}{a} \displaystyle\int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x\, dx - A_n \cosh \frac{n\pi}{a} b \right)$

15. $u = u_1 + u_2$ donde

$u_1(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} ny \operatorname{sen} nx$

$u_2(x, y) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \times \frac{\operatorname{senh} nx + \operatorname{senh} n(\pi - x)}{\operatorname{senh} n\pi} \operatorname{sen} ny$

17. la temperatura máxima es $u = 1$

Ejercicios 5.6, página 337

1. $u(x, t) = 100 + \dfrac{200}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x$

3. $u(x, t) = u_0 - \dfrac{r}{2k} x(x - 1) + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{u_0}{n\pi} + \frac{r}{kn^3\pi^3} \right] \times [(-1)^n - 1] e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x$

5. $u(x, t) = \psi(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x,$

donde $\psi(x) = \dfrac{A}{k\beta^2} [-e^{-\beta x} + (e^{-\beta} - 1)x + 1]$

$A_n = 2 \displaystyle\int_0^1 [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen} n\pi x\, dx$

7. $\psi(x) = u_0 \left[1 - \dfrac{\operatorname{senh} \sqrt{h/k}\, x}{\operatorname{senh} \sqrt{h/k}} \right]$

9. $u(x, t) = \dfrac{A}{6a^2} (x - x^3) + \dfrac{2A}{a^2\pi^3} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \cos n\pi at \operatorname{sen} n\pi x$

11. $u(x, y) = (u_0 - u_1)\, y + u_1 + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_0(-1)^n - u_1}{n} e^{-n\pi x} \operatorname{sen} n\pi y$

13. $u(x, t) = 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n^2 - 3)} e^{-3t} \operatorname{sen} nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2 - 3)} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx$

15. $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[\frac{n^2\pi^2 \operatorname{sen} t - \cos t}{n^4\pi^4 + 1} \right] \operatorname{sen} n\pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3} - (-1)^n \frac{2n\pi}{n^4\pi^4 + 1} \right] e^{-n^2\pi^2 t} \operatorname{sen} n\pi x$

17. $u(x, t) = (1 - x) \operatorname{sen} t + \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n^2\pi^2 e^{-n^2\pi^2 t} - n^2\pi^2 \cos t - \operatorname{sen} t}{n(n^4\pi^4 + 1)} \right] \operatorname{sen} n\pi x$

Ejercicios 5.7, página 342

1. $u(x, t) = 2h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \alpha_n}{(h + \operatorname{sen}^2 \alpha_n)} e^{-k\alpha_n^2 t} \cos \alpha_n x$, donde

   α_n son las raíces positivas consecutivas de $\cot \alpha = \alpha/h$

3. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{senh} \alpha_n y \operatorname{sen} \alpha_n x$, donde

   $$A_n = \frac{2h}{\operatorname{senh} \alpha_n b(ah + \cos^2 \alpha_n a)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \alpha_n x \, dx$$ y α_n

   son las raíces positivas consecutivas de $\tan \alpha a = -\alpha/h$

5. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(2n-1)^2\pi^2 t/4L^2} \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x$,

   donde $A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2L}\right)\pi x \, dx$

7. $$u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi} \times \cosh\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi x \operatorname{sen}\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi y$$

9. $$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \operatorname{sen} \alpha_n}{\alpha_n^2(k\alpha_n^2 - 2)(1 + \cos^2 \alpha_n)} \times (e^{-2t} - e^{-k\alpha_n^2 t}) \operatorname{sen} \alpha_n x$$

Ejercicios 5.8, página 346

1. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-k(m^2+n^2)t} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny$,

   donde $A_{mn} = \frac{4u_0}{mn\pi^2} [1 - (-1)^m][1 - (-1)^n]$

3. $u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} ny \cos a\sqrt{m^2 + n^2}t$,

   donde $A_{mn} = \frac{16}{m^3n^3\pi^2} [(-1)^m - 1][(-1)^n - 1]$

5. $u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{senh} \omega_{mn} z \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$

   donde $\omega_{mn} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$

   $$A_{mn} = \frac{4}{ab \operatorname{senh}(c\omega_{mn})} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \times \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy$$

7. Utilice $a = b = c = 1$ con $f(x, y) = u_0$ en el problema 5 y $f(x, y) = -u_0$ en el problema 6. Sume las dos soluciones.

Ejercicios de repaso del capítulo 5, página 346

1. $u = c_1 e^{(c_2 x + y/c_2)}$

3. $\psi(x) = u_0 + \frac{(u_1 - u_0)}{1 + \pi} x$

5. $$u(x, t) = \frac{2h}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos \frac{n\pi}{4} - \cos \frac{3n\pi}{4}}{n^2} \right) \times \operatorname{sen} n\pi at \operatorname{sen} n\pi x$$

7. $u(x, y) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n \operatorname{senh} n\pi} \operatorname{senh} nx \operatorname{sen} ny$

9. $u(x, y) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} e^{-nx} \operatorname{sen} ny$

11. *a)* $u(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x$

13. $$u(x, t) = e^{-(x+t)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\sqrt{n^2 + 1} \cos \sqrt{n^2 + 1}t + \operatorname{sen} \sqrt{n^2 + 1}t] \operatorname{sen} nx$$

Ejercicios 6.1, página 352

1. $u(r; \theta) = \frac{u_0}{2} + \frac{u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} r^n \operatorname{sen} n\theta$

3. $u(r; \theta) = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} r^n \cos n\theta$

5. $u(r; \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$,

   donde $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$

   $$A_n = \frac{c^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta$$

   $$B_n = \frac{c^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta d\theta$$

7. $u(r, \theta) = A_0 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{b}{r}\right)^n - \left(\frac{r}{b}\right)^n\right] (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$,

   donde $A_0 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta$

   $$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{b}\right)^n\right] A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

   $$\left[\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{b}\right)^n\right] B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta$$

9. $u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r^{2n} + a^{2n})}{r^n} (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{sen} n\theta)$,

   donde $A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$

$$\frac{(b^{2n}+a^{2n})}{b^n}A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$$

$$\frac{(b^{2n}+a^{2n})}{b^n}B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$$

11. $u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^{2n}\cos 2n\theta$

13. $u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\frac{r^{2n}-b^{2n}}{a^{2n}-b^{2n}}\left(\frac{a}{r}\right)^n \operatorname{sen} n\theta$

15. $u(r,\theta) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n}\left(\frac{r}{2}\right)^n\cos n\theta$

Ejercicios 6.2, página 358

1. $u(r,t) = \frac{2}{ac}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha_n at}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n c)}J_0(\alpha_n r)$

3. $u(r,z) = u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{senh}\alpha_n(4-z)}{\alpha_n \operatorname{senh} 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)$

5. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\alpha_n r)e^{-ka_n^2 t}$,

donde $A_n = \frac{2}{c^2 J_1^2(\alpha_n c)}\int_0^c rJ_0(\alpha_n r)f(r)dr$

7. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0(\alpha_n r)e^{-ka_n^2 t}$,

donde $A_n = \frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2+h^2)J_0^2(\alpha_n)}\int_0^1 rJ_0(\alpha_n r)f(r)dr$

9. $u(r,t) = 100 + 50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1(\alpha_n)}{\alpha_n J_1^2(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)e^{-a_n^2 t}$

11. *b)* $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\alpha_n\sqrt{g}t)J_0(2\alpha_n\sqrt{x})$,

donde $A_n = \frac{2}{LJ_1^2(2\alpha_n\sqrt{L})}\int_0^{\sqrt{L}} vJ_0(2\alpha_n v)f(v^2)dv$

Ejercicios 6.3, página 362

1. $u(r,\theta) = 50\left[\frac{1}{2}P_0(\cos\theta) + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{c}\right)P_1(\cos\theta) - \frac{7}{16}\left(\frac{r}{c}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{32}\left(\frac{r}{c}\right)^5 P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

3. $u(r,\theta) = \frac{r}{c}\cos\theta$

5. $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}r^{n+1}}P_n(\cos\theta)$,

donde $\frac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}a^{n+1}}A_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

7. $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}r^{2n}P_{2n}(\cos\theta)$,

donde $A_{2n} = \frac{4n+1}{c^{2n}}\int_0^{\pi/2} f(\theta)P_{2n}(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\, d\theta$

9. $u(r,t) = 100 + \frac{200}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t}\operatorname{sen} n\pi r$

11. $u(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{c}t + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{c}t\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}r$,

donde $A_n = \frac{2}{c}\int_0^c rf(r)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}r\, dr$,

$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^c rg(r)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{c}r\, dr$

Ejercicios de repaso del capítulo 6, página 363

1. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left(\frac{r}{c}\right)^n\operatorname{sen} n\theta$

3. $u(r,\theta) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}r^n\operatorname{sen} n\theta$

5. $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n\cos n\theta$,

donde $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)d\theta$

$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta$

7. $u(r,\theta) = \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n}+r^{-4n}}{2^{4n}+2^{-4n}}\frac{1-(-1)^n}{n}\operatorname{sen} 4n\theta$

11. $u(r,t) = 2e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)e^{-a_n^2 t}$

13. $u(r,z) = 50\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cosh\alpha_n z}{\alpha_n\cosh 4\alpha_n J_1(2\alpha_n)}J_0(\alpha_n r)$

15. $u(r,\theta) = 100\left[\frac{3}{2}rP_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}r^3P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}r^5P_5(\cos\theta) + \cdots\right]$

Ejercicios 7.1, página 367

1. *a)* Sea $\tau = u^2$ en la integral erf $(\sqrt{t})$.

7. $y(t) = e^{\pi t}\operatorname{erf}(\sqrt{\pi t})$

9. Utilice la propiedad $\int_0^b - \int_0^a = \int_0^b + \int_a^0$

Ejercicios 7.2, página 372

1. $u(x, t) = A \cos \dfrac{\alpha\pi t}{L} \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{L}$

3. $u(x, t) = f\left(t - \dfrac{x}{a}\right) \mathcal{U}\left(t - \dfrac{x}{a}\right)$

5. $u(x, t) = \left[\dfrac{1}{2} g\left(t - \dfrac{x}{a}\right)^2 + A \operatorname{sen} \omega\left(t - \dfrac{x}{a}\right)\right] \times \mathcal{U}\left(t - \dfrac{x}{a}\right) - \dfrac{1}{2} gt^2$

7. $u(x, t) = a \dfrac{F_0}{E} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{\left(t - \dfrac{2nL + L - x}{a}\right) \times \mathcal{U}\left(t - \dfrac{2nL + L - x}{a}\right) - \left(t - \dfrac{2nL + L + x}{a}\right) \times \mathcal{U}\left(t - \dfrac{2nL + L + x}{a}\right)\right\}$

9. $u(x, t) = (t - x) \operatorname{senh}(t - x)\, \mathcal{U}(t - x) + xe^{-x} \cosh t - e^{-x} t \operatorname{senh} t$

11. $u(x, t) = u_1 + (u_0 - u_1) \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

13. $u(x, t) = u_0 \left[1 - \left\{\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{x+1} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{t} + \dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}\right]$

15. $u(x, t) = \dfrac{x}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^t \frac{f(t - \tau)}{\tau^{3/2}} e^{-x^2/4\tau} d\tau$

17. $u(x, t) = 60 + 40 \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t - 2}}\right) \mathcal{U}(t - 2)$

19. $u(x, t) = 100 \left[-e^{1-x+t} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{t} + \dfrac{1 - x}{2\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{1 - x}{2\sqrt{t}}\right)\right]$

21. $u(x, t) = u_0 + u_0 e^{-(\pi^2/L^2)t} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{L} x\right)$

23. $u(x, t) = u_0 - u_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\operatorname{erfc}\left(\dfrac{2n + 1 - x}{2\sqrt{kt}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\dfrac{2n + 1 + x}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$

25. $u(x, t) = u_0 e^{-Gt/C} \operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{RC}{t}}\right)$

Ejercicios 7.3, página 379

1. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos \alpha x + 3(1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \operatorname{sen} \alpha x]\, d\alpha,$

donde $A(\alpha) = \dfrac{3\alpha \operatorname{sen} 3\alpha + \cos 3\alpha - 1}{\alpha^2}$

$B(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen} 3\alpha - 3\alpha \cos 3\alpha}{\alpha^2}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x + \alpha \operatorname{sen} \alpha x}{1 + \alpha^2} d\alpha$

7. $f(x) = \dfrac{10}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha$

9. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(\pi\alpha \operatorname{sen} \pi\alpha + \cos \pi\alpha - 1) \cos \alpha x}{\alpha^2} d\alpha$

11. $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{4 + \alpha^4} d\alpha$

13. $f(x) = \dfrac{2k}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{k^2 + \alpha^2} d\alpha$

$f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{k^2 + \alpha^2} d\alpha$

15. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{(4 - \alpha^2) \cos \alpha x}{(4 + \alpha^2)^2} d\alpha$

$f(x) = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\alpha \operatorname{sen} \alpha x}{(4 + \alpha^2)^2} d\alpha$

17. $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \dfrac{1}{1 + x^2}, x > 0$

19. Sea $x = 2$ en (7). Utilice una identidad trigonométrica y reemplace α por x. En el inciso *b*) realice el cambio de variable $2x = kt$.

Ejercicios 7.4, página 384

1. $u(x, t) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha^2 t}}{1 + \alpha^2} e^{-i\alpha x} d\alpha$

$= \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + \alpha^2} e^{-k\alpha^2 t} d\alpha$

3. $u(x, t) = \dfrac{2u_0}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-k\alpha^2 t}}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha$

5. $u(x, t) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} \operatorname{sen} \alpha x\, d\alpha$

7. $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\cos\alpha x\, d\alpha$

9. *a)* $u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(\alpha)\cos\alpha at + G(\alpha)\frac{\operatorname{sen}\alpha at}{\alpha a}\right)e^{-i\alpha x}\, d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\alpha(\pi - x)}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi}\cos\alpha y\, d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} e^{-\alpha y}\cos\alpha x\, d\alpha$

15. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty F(\alpha)\frac{\operatorname{senh}\alpha(2-y)}{\operatorname{senh}2\alpha}\operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha$

17. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\left[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x\right] d\alpha$

19. $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4kt}} e^{-x^2/(1+4kt)}$

21. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha} e^{-i\alpha x}\, d\alpha$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\alpha^2/4}\cosh\alpha y}{\cosh\alpha}\cos\alpha x\, d\alpha$

Ejercicios 7.5, página 395

3. 1

7.

$$F_8 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & -i & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & -i & -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2} & i & \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 7, página 395

1. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\alpha y}{\alpha(1+\alpha^2)\cosh\alpha\pi}\cos\alpha x\, d\alpha$

3. $u(x,t) = u_0 e^{-ht}\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

5. $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau$

7. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\alpha(\pi - x) + \operatorname{sen}\alpha x}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$

9. $u(x,y) = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\right) \times \left[e^{-\alpha x}\operatorname{sen}\alpha y + 2e^{-\alpha y}\operatorname{sen}\alpha x\right] d\alpha$

11. $u(x,y) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{B\cosh\alpha y}{(1+\alpha^2)\operatorname{senh}\alpha\pi} + \frac{A}{\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha$

13. $u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x + \alpha\operatorname{sen}\alpha x}{1+\alpha^2} e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$

Ejercicios 8.1, página 402

1. $u_{11} = \frac{11}{15}$, $u_{21} = \frac{14}{15}$

3. $u_{11} = u_{21} = \sqrt{3}/16$, $u_{22} = u_{12} = 3\sqrt{3}/16$

5. $u_{21} = u_{12} = 12.50$, $u_{31} = u_{13} = 18.75$, $u_{32} = u_{23} = 37.50$, $u_{11} = 6.25$, $u_{22} = 25.00$, $u_{33} = 56.25$

7. *b)* $u_{14} = u_{41} = 0.5427$, $u_{24} = u_{42} = 0.6707$, $u_{34} = u_{43} = 0.6402$, $u_{33} = 0.4451$, $u_{44} = 0.9451$

Ejercicios 8.2, página 408

Las tablas de esta sección proporcionan una selección de la cantidad total de aproximaciones.

1.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.3728	0.6288	0.6800	0.5904	0.3840	0.2176	0.0768
0.200	0.2248	0.3942	0.4708	0.4562	0.3699	0.2517	0.1239
0.300	0.1530	0.2752	0.3448	0.3545	0.3101	0.2262	0.1183
0.400	0.1115	0.2034	0.2607	0.2757	0.2488	0.1865	0.0996
0.500	0.0841	0.1545	0.2002	0.2144	0.1961	0.1487	0.0800
0.600	0.0645	0.1189	0.1548	0.1668	0.1534	0.1169	0.0631
0.700	0.0499	0.0921	0.1201	0.1297	0.1196	0.0914	0.0494
0.800	0.0387	0.0715	0.0933	0.1009	0.0931	0.0712	0.0385
0.900	0.0301	0.0555	0.0725	0.0785	0.0725	0.0554	0.0300
1.000	0.0234	0.0432	0.0564	0.0610	0.0564	0.0431	0.0233

3.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.100	0.4015	0.6577	0.7084	0.5837	0.3753	0.1871	0.0684
0.200	0.2430	0.4198	0.4921	0.4617	0.3622	0.2362	0.1132
0.300	0.1643	0.2924	0.3604	0.3626	0.3097	0.2208	0.1136
0.400	0.1187	0.2150	0.2725	0.2843	0.2528	0.1871	0.0989
0.500	0.0891	0.1630	0.2097	0.2228	0.2020	0.1521	0.0814
0.600	0.0683	0.1256	0.1628	0.1746	0.1598	0.1214	0.0653
0.700	0.0530	0.0976	0.1270	0.1369	0.1259	0.0959	0.0518
0.800	0.0413	0.0762	0.0993	0.1073	0.0989	0.0755	0.0408
0.900	0.0323	0.0596	0.0778	0.0841	0.0776	0.0593	0.0321
1.000	0.0253	0.0466	0.0609	0.0659	0.0608	0.0465	0.0252

Los errores absolutos son aproximadamente de 2.2×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

5.

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$	$x = 1.00$	$x = 1.25$	$x = 1.50$	$x = 1.75$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.10	0.3972	0.6551	0.7043	0.5883	0.3723	0.1955	0.0653
0.20	0.2409	0.4171	0.4901	0.4620	0.3636	0.2385	0.1145
0.30	0.1631	0.2908	0.3592	0.3624	0.3105	0.2220	0.1145
0.40	0.1181	0.2141	0.2718	0.2840	0.2530	0.1876	0.0993
0.50	0.0888	0.1625	0.2092	0.2226	0.2020	0.1523	0.0816
0.60	0.0681	0.1253	0.1625	0.1744	0.1597	0.1214	0.0654
0.70	0.0528	0.0974	0.1268	0.1366	0.1257	0.0959	0.0518
0.80	0.0412	0.0760	0.0991	0.1071	0.0987	0.0754	0.0408
0.90	0.0322	0.0594	0.0776	0.0839	0.0774	0.0592	0.0320
1.00	0.0252	0.0465	0.0608	0.0657	0.0607	0.0464	0.0251

Los errores absolutos son aproximadamente de 1.8×10^{-2}, 3.7×10^{-2}, 1.3×10^{-2}.

7. *a*)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	29.9999	29.9970	29.9037	27.6450
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	29.9999	29.9991	29.9805	29.6517	25.6452
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9996	29.9963	29.9421	29.2922	23.9347
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9898	29.9986	29.9898	29.8782	28.8606	22.4612
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9782	29.9964	29.9782	29.7878	28.3831	21.1829

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9973	29.5964
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9893	29.2036
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9762	28.8213
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9993	29.9585	28.4490
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9986	29.9363	28.0864

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5348	38.3465	44.3067	46.3001	44.3067	38.3465	28.5348	15.3312
4.00	13.6371	25.6867	34.9416	40.6988	42.6453	40.6988	34.9416	25.6867	13.6371
6.00	12.3012	23.2863	31.8624	37.2794	39.1273	37.2794	31.8624	23.2863	12.3012
8.00	11.1659	21.1877	29.0757	34.0984	35.8202	34.0984	29.0757	21.1877	11.1659
10.00	10.1665	19.3143	26.5439	31.1662	32.7549	31.1662	26.5439	19.3143	10.1665

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	23.9999	16.0000	8.0000
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9686	23.9993	16.0000	8.0000
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9323	23.9978	15.9999	8.0000
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8844	23.9950	15.9998	8.0000
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7498	31.8265	23.9908	15.9996	8.0000

9. *a*)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	27.6450	29.9037	29.9970	29.9999	30.0000	30.0000	29.9990	29.9679	29.2150
4.00	25.6452	29.6517	29.9805	29.9991	30.0000	29.9997	29.9935	29.8839	28.5484
6.00	23.9347	29.2922	29.9421	29.9963	29.9997	29.9988	29.9807	29.7641	27.9782
8.00	22.4612	28.8606	29.8782	29.9899	29.9991	29.9966	29.9594	29.6202	27.4870
10.00	21.1829	28.3831	29.7878	29.9783	29.9976	29.9927	29.9293	29.4610	27.0610

b)

Tiempo	$x = 5.00$	$x = 10.00$	$x = 15.00$	$x = 20.00$	$x = 25.00$	$x = 30.00$	$x = 35.00$	$x = 40.00$	$x = 45.00$
0.00	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000
2.00	29.5964	29.9973	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9991	29.8655
4.00	29.2036	29.9893	29.9999	30.0000	30.0000	30.0000	30.0000	29.9964	29.7345
6.00	28.8212	29.9762	29.9997	30.0000	30.0000	30.0000	29.9999	29.9921	29.6071
8.00	28.4490	29.9585	29.9992	30.0000	30.0000	30.0000	29.9997	29.9862	29.4830
10.00	28.0864	29.9363	29.9986	30.0000	30.0000	30.0000	29.9995	29.9788	29.3621

c)

Tiempo	$x = 2.00$	$x = 4.00$	$x = 6.00$	$x = 8.00$	$x = 10.00$	$x = 12.00$	$x = 14.00$	$x = 16.00$	$x = 18.00$
0.00	18.0000	32.0000	42.0000	48.0000	50.0000	48.0000	42.0000	32.0000	18.0000
2.00	15.3312	28.5350	38.3477	44.3130	46.3327	44.4671	39.0872	31.5755	24.6930
4.00	13.6381	25.6913	34.9606	40.7728	42.9127	41.5716	37.4340	31.7086	25.6986
6.00	12.3088	23.3146	31.9546	37.5566	39.8880	39.1565	36.9745	31.2134	25.7128
8.00	11.1946	21.2785	29.3217	34.7092	37.2109	36.9834	34.5032	30.4279	25.4167
10.00	10.2377	19.5150	27.0178	32.1929	34.8117	34.9710	33.0338	29.5224	25.0019

d)

Tiempo	$x = 10.00$	$x = 20.00$	$x = 30.00$	$x = 40.00$	$x = 50.00$	$x = 60.00$	$x = 70.00$	$x = 80.00$	$x = 90.00$
0.00	8.0000	16.0000	24.0000	32.0000	40.0000	32.0000	24.0000	16.0000	8.0000
2.00	8.0000	16.0000	23.9999	31.9918	39.4932	31.9918	24.0000	16.0102	8.6333
4.00	8.0000	16.0000	23.9993	31.9686	39.0175	31.9687	24.0002	16.0391	9.2272
6.00	8.0000	15.9999	23.9978	31.9323	38.5701	31.9324	24.0005	16.0845	9.7846
8.00	8.0000	15.9998	23.9950	31.8844	38.1483	31.8846	24.0012	16.1441	10.3084
10.00	8.0000	15.9996	23.9908	31.8265	37.7499	31.8269	24.0023	16.2160	10.8012

11. *a*) $\psi(x) = \frac{1}{2}x + 20$

b)

Tiempo	$x = 4.00$	$x = 8.00$	$x = 12.00$	$x = 16.00$
0.00	50.0000	50.0000	50.0000	50.0000
10.00	32.7433	44.2679	45.4228	38.2971
20.00	29.9946	36.2354	38.3148	35.8160
30.00	26.9487	32.1409	34.0874	32.9644
50.00	24.1178	27.4348	29.4296	30.1207
70.00	22.8995	25.4560	27.4554	28.8998
90.00	22.3817	24.6176	26.6175	28.3817
110.00	22.1619	24.2620	26.2620	28.1619
130.00	22.0687	24.1112	26.1112	28.0687
150.00	22.0291	24.0472	26.0472	28.0291
170.00	22.0124	24.0200	26.0200	28.0124
190.00	22.0052	24.0085	26.0085	28.0052
210.00	22.0022	24.0036	26.0036	28.0022
230.00	22.0009	24.0015	26.0015	28.0009
250.00	22.0004	24.0007	26.0007	28.0004
270.00	22.0002	24.0003	26.0003	28.0002
290.00	22.0001	24.0001	26.0001	28.0001
310.00	22.0000	24.0001	26.0001	28.0000
330.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000
350.00	22.0000	24.0000	26.0000	28.0000

Ejercicios 8.3, página 412

1. *a*)

Tiempo	$x = 0.25$	$x = 0.50$	$x = 0.75$
0.00	0.1875	0.2500	0.1875
0.20	0.1491	0.2100	0.1491
0.40	0.0556	0.0938	0.0556
0.60	−0.0501	−0.0682	−0.0501
0.80	−0.1361	−0.2072	−0.1361
1.00	−0.1802	−0.2591	−0.1802

b)

Tiempo	$x = 0.4$	$x = 0.8$	$x = 1.2$	$x = 1.6$
0.00	0.0032	0.5273	0.5273	0.0032
0.20	0.0652	0.4638	0.4638	0.0652
0.40	0.2065	0.3035	0.3035	0.2065
0.60	0.3208	0.1190	0.1190	0.3208
0.80	0.3094	−0.0180	−0.0180	0.3094
1.00	0.1450	−0.0768	−0.0768	0.1450

c)

Tiempo	$x = 0.1$	$x = 0.2$	$x = 0.3$	$x = 0.4$	$x = 0.5$	$x = 0.6$	$x = 0.7$	$x = 0.8$	$x = 0.9$
0.00	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
0.12	0.0000	0.0000	0.0082	0.1126	0.3411	0.1589	0.3792	0.3710	0.0462
0.24	0.0071	0.0657	0.2447	0.3159	0.1735	0.2463	−0.1266	−0.3056	−0.0625
0.36	0.1623	0.3197	0.2458	0.1657	0.0877	−0.2853	−0.2843	−0.2104	−0.2887
0.48	0.1965	0.1410	0.1149	−0.1216	−0.3593	−0.2381	−0.1977	−0.1715	0.0800
0.60	−0.2194	−0.2069	−0.3875	−0.3411	−0.1901	−0.1662	−0.0666	0.1140	−0.0446
0.72	−0.3003	−0.6865	−0.5097	−0.3230	−0.1585	0.0156	0.0893	−0.0874	0.0384
0.84	−0.2647	−0.1633	−0.3546	−0.3214	−0.1763	−0.0954	−0.1249	0.0665	−0.0386
0.96	0.3012	0.1081	0.1380	−0.0487	−0.2974	−0.3407	−0.1250	−0.1548	0.0092

3. *a*)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.10	0.5599	0.9059	0.9059	0.5599
0.20	0.4788	0.7748	0.7748	0.4788
0.30	0.3524	0.5701	0.5701	0.3524
0.40	0.1924	0.3113	0.3113	0.1924
0.50	0.0142	0.0230	0.0230	0.0142

b)

Tiempo	$x = 0.2$	$x = 0.4$	$x = 0.6$	$x = 0.8$
0.00	0.5878	0.9511	0.9511	0.5878
0.05	0.5808	0.9397	0.9397	0.5808
0.10	0.5599	0.9060	0.9060	0.5599
0.15	0.5257	0.8507	0.8507	0.5257
0.20	0.4790	0.7750	0.7750	0.4790
0.25	0.4209	0.6810	0.6810	0.4209
0.30	0.3527	0.5706	0.5706	0.3527
0.35	0.2761	0.4467	0.4467	0.2761
0.40	0.1929	0.3122	0.3122	0.1929
0.45	0.1052	0.1701	0.1701	0.1052
0.50	0.0149	0.0241	0.0241	0.0149

5.

Tiempo	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$	$x = 40$	$x = 50$
0.00000	0.1000	0.2000	0.3000	0.2000	0.1000
0.60134	0.0984	0.1688	0.1406	0.1688	0.0984
1.20268	0.0226	–0.0121	0.0085	–0.0121	0.0226
1.80401	–0.1271	–0.1347	–0.1566	–0.1347	–0.1271
2.40535	–0.0920	–0.2292	–0.2571	–0.2292	–0.0920
3.00669	–0.0932	–0.1445	–0.2018	–0.1445	–0.0932
3.60803	–0.0284	–0.0205	0.0336	–0.0205	–0.0284
4.20936	0.1064	0.1555	0.1265	0.1555	0.1064
4.81070	0.1273	0.2060	0.2612	0.2060	0.1273
5.41204	0.0625	0.1689	0.2038	0.1689	0.0625
6.01338	0.0436	0.0086	–0.0080	0.0086	0.0436
6.61472	–0.0931	–0.1364	–0.1578	–0.1364	–0.0931
7.21605	–0.1436	–0.2173	–0.2240	–0.2173	–0.1436
7.81739	–0.0625	–0.1644	–0.2247	–0.1644	–0.0625
8.41873	–0.0287	–0.0192	–0.0085	–0.0192	–0.0287
9.02007	0.0654	0.1332	0.1755	0.1332	0.0654
9.62140	0.1540	0.2189	0.2089	0.2189	0.1540

Nota: El tiempo está expresado en milisegundos.

Ejercicios de repaso del capítulo 8, página 412

1. $u_{11} = 0.8929$, $u_{21} = 3.5714$, $u_{31} = 13.3929$

3. *a)*

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922
0.1883	0.3346	0.3734	0.2512

b)

$x = 0.20$	$x = 0.40$	$x = 0.60$	$x = 0.80$
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.8000
0.2000	0.4000	0.6000	0.5500
0.2000	0.4000	0.5375	0.4250
0.2000	0.3844	0.4750	0.3469
0.1961	0.3609	0.4203	0.2922

c) Sí; la tabla del inciso *b)* es la tabla del inciso *a)* desplazada hacia abajo.

Ejercicios 9.1, página 420

1. $3 + 3i$ 3. 1 5. $7 - 13i$
7. $-7 + 5i$ 9. $11 - 10i$ 11. $-5 + 12i$
13. $-2i$ 15. $-\frac{7}{17} - \frac{11}{17}i$ 17. $8 - i$
19. $\frac{23}{37} - \frac{64}{37}i$ 21. $20i$ 23. $\frac{102}{5} + \frac{116}{5}i$
25. $\frac{7}{130} + \frac{9}{130}i$ 27. $x/(x^2 + y^2)$
29. $-2y - 4$ 31. $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$
33. $x = -\frac{9}{2}, y = 1$ 35. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
37. $11 - 6i$

Ejercicios 9.2, página 424

1. $2(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ o $2(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$
3. $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$ 5. $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$
7. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$
9. $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$
11. $-\frac{53}{2} - \frac{5}{2}i$ 13. $5.5433 + 2.2961i$
15. $8i; \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$
17. $30\sqrt{2}\left(\cos \frac{25\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{25\pi}{12}\right); 40.9808 + 10.9808i$
19. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]; \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
21. -512 23. $\frac{1}{32}i$ 25. $-i$
27. $w_0 = 2, w_1 = -1 + \sqrt{3}\,i, w_2 = -1 - \sqrt{3}\,i$
29. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
31. $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i, w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

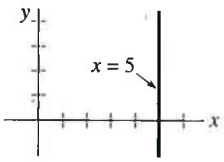
33. $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

35. $32\left(\cos \frac{13\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{13\pi}{6}\right), 16\sqrt{3} + 16i$

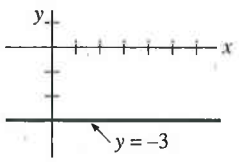
37. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

Ejercicios 9.3, página 428

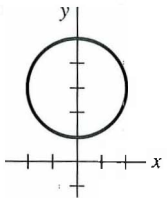
1.



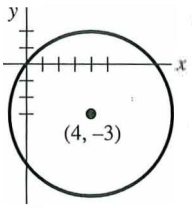
3.



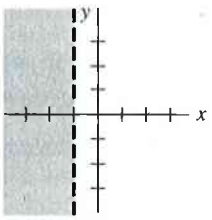
5.



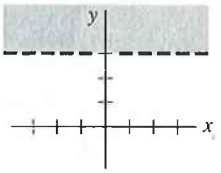
7.



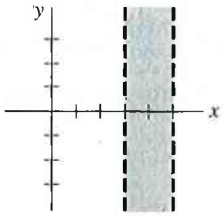
9. dominio



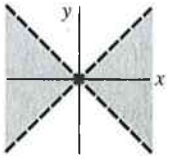
11. dominio



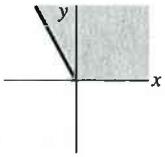
13. dominio



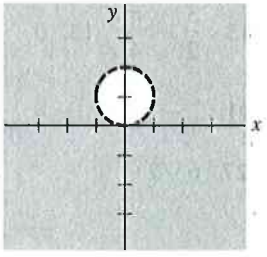
15. no es dominio



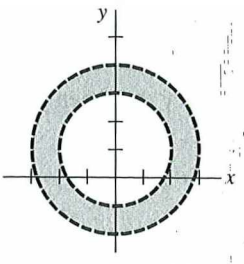
17. no es dominio



19. dominio



21. dominio

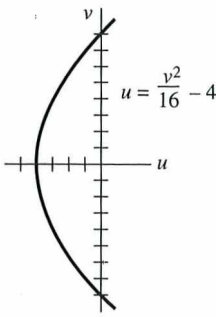


23. la línea $y = -x$

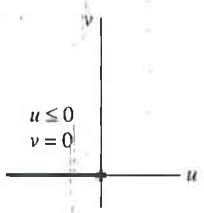
25. la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

Ejercicios 9.4, página 433

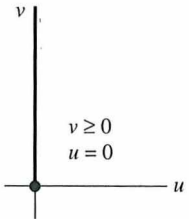
1.



3.



5.



7. $f(z) = (6x - 5) + i(6y + 9)$

9. $f(z) = (x^2 - y^2 - 3x) + i(2xy - 3y + 4)$

11. $f(z) = (x^3 - 3xy^2 - 4x) + i(3x^2y - y^3 - 4y)$

13. $f(z) = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$

15. $-4 + i$; $3 - 9i$; $1 + 86i$

17. $14 - 20i$; $-13 + 43i$; $3 - 26i$

19. $6 - 5i$

21. $-4i$

27. $12z^2 - (6 + 2i)z - 5$

29. $6z^2 - 14z - 4 + 16i$

31. $6z(z^2 - 4i)^2$

33. $\frac{8 - 13i}{(2z + i)^2}$

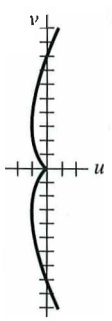
35. $3i$

37. $2i, -2i$

41. $x(t) = c_1e^{2t}$ y $y(t) = c_2e^{2t}$; las líneas de corriente pasan por el origen.

43. $y = cx$; las líneas de corriente pasan por el origen.

45.



Ejercicios 9.5, página 438

15. $a = 1, b = 3$

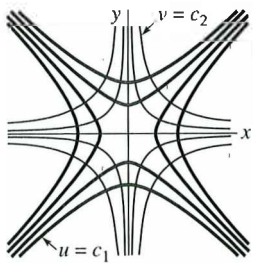
21. $f'(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$

23. $f(z) = x + i(y + C)$

25. $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$

27. $f(z) = \log_e(x^2 + y^2) + i\left(2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + C\right)$

29.



31. el eje x y el círculo $|z| = 1$

Ejercicios 9.6, página 444

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ 3. $e^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

5. $-e^{\pi}$ 7. $-1.8650 + 4.0752i$

9. $0.2837 - 0.9589i$ 11. $-0.9659 + 0.2588i$

13. $e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)$

15. $e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \operatorname{sen} 2xy)$

23. $1.6094 + i(\pi + 2n\pi)$

25. $1.0397 + i\left(\dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$

27. $1.0397 + i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$

29. $2.1383 - \dfrac{\pi}{4}i$ 31. $2.5649 + 2.7468i$

33. $3.4657 - \dfrac{\pi}{3}i$ 35. $1.3863 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$

37. $3 + i\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ 39. $e^{(2-8n)\pi}$

41. $e^{-2n\pi}(0.2740 + 0.5837i)$ 43. e^2

47. no; no; sí

Ejercicios 9.7, página 449

1. 10.0677 3. $1.0911 + 0.8310i$

5. $0.7616i$ 7. -0.6481 9. -1

11. $0.5876 + 1.3363i$

15. $\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi - i\log_e(2 \pm \sqrt{3})$

17. $\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i$

19. $\dfrac{\pi}{4} + n\pi$

21. $2n\pi \pm 2i$

Ejercicios 9.8, página 451

1. $n\pi + (-1)^{n+1}i\log_e(1 + \sqrt{2})$ 3. $n\pi$

5. $2n\pi \pm i\log_e(2 + \sqrt{3})$ 7. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$

9. $\dfrac{\pi}{4} + n\pi$ 11. $(-1)^n \log_e 3 + n\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 9, página 452

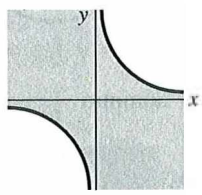
1. 0; 32 3. $-\frac{7}{25}$ 5. $\frac{4}{5}$ 7. falso

9. $0.6931 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ 11. $-0.3097 + 0.8577i$

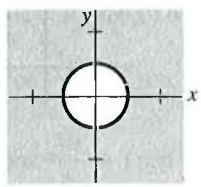
13. falso 15. $3 - \dfrac{\pi}{2}i$ 17. $58 - 4i$

19. $-8 + 8i$

21.



23.



25. una elipse con focos $(0, -2)$ y $(0, 2)$

27. $1.0696 - 0.2127i$, $0.2127 + 1.0696i$, $-1.0696 + 0.2127i$, $-0.2127 - 1.0696i$

29. $5i$ 31. la parábola $v = u^2 - 2u$

33. $1, -1$ 35. números imaginarios puros

37. $f'(z) = (-2y - 5) + 2xi$

Ejercicios 10.1, página 458

1. $-28 + 84i$ 3. $-48 + \frac{736}{3}i$ 5. $(2 + \pi)i$

7. πi 9. $-\frac{7}{12} + \frac{1}{12}i$ 11. $-e - 1$

13. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{\pi}{4}$ 15. 0 17. $\frac{1}{2}i$ 19. 0

21. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ 23. $\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$ 25. $\dfrac{5\pi e^5}{12}$

27. $6\sqrt{2}$ 31. $-11 + 38i$; 0

33. circulación = 0, flujo neto = 4π

35. circulación = 0, flujo neto = 0

Ejercicios 10.2, página 463

9. $2\pi i$ 11. $2\pi i$ 13. 0

15. $2\pi i; 4\pi i; 0$ 17. $-8\pi i; -6\pi i$

19. $-\pi(1+i)$ 21. $-4\pi i$ 23. $-6\pi i$

Ejercicios 10.3, página 469

1. $2i$ 3. $48 + 24i$ 5. $6 + \frac{26}{3}i$ 7. 0

9. $-\frac{7}{16} - \frac{22}{3}i$ 11. $-\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}i$ 13. $2.3504i$

15. 0 17. πi 19. $\frac{1}{2}i$

21. $11.4928 + 0.9667i$ 23. $-0.9056 + 1.7699i$

Ejercicios 10.4, página 474

1. $8\pi i$ 3. $-2\pi i$ 5. $-\pi(20 + 8i)$

7. $-2\pi; 2\pi$ 9. -8π 11. $-2\pi e^{-1}i$

13. $\frac{4}{3}\pi i$ 15. $-5\pi i; -5\pi i; 9\pi i; 0$

17. $-\pi(3+i); \pi(3+i)$ 19. $\pi(\frac{8}{3} + 12i)$

21. 0 23. $-\pi i$

Ejercicios de repaso del capítulo 10, página 475

1. verdadero 3. verdadero 5. 0 7. $\pi(6\pi - i)$

9. verdadero 11. 0 si $n \neq -1$, $2\pi i$ si $n = -1$

13. $-\frac{7}{2}$ 15. $\frac{136}{15} + \frac{88}{3}i$ 17. 0

19. $-14.2144 + 22.9637i$ 21. $2\pi i$

23. $-\frac{8}{3}\pi i$ 25. $\frac{2}{5}\pi i$ 27. 2π 29. $2n\pi i$

Ejercicios 11.1, página 483

1. $5i, -5, -5i, 5, 5i$ 3. 0, 2, 0, 2, 0

5. converge 7. converge 9. diverge

11. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = 2$ y $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = \frac{3}{2}$

13. La serie converge en $1/(1 + 2i)$. 15. divergente

17. convergente, $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

19. convergente, $\frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$

21. $|z - 2i| = \sqrt{5}, R = \sqrt{5}$

23. $|z - 1 - i| = 2, R = 2$

25. $|z - i| = 1/\sqrt{10}, R = 1/\sqrt{10}$

27. $|z - 4 - 3i| = 25, R = 25$

29. La serie converge en $z = -2 + i$.

Ejercicios 11.2, página 488

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} z^k, R = 1$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k(2z)^{k-1}, R = \frac{1}{2}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(2z)^k, R = \infty$

7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, R = \infty$

9. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}, R = \infty$

11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{4k+2}, R = \infty$

13. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, R = 1$

15. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^k}{(3-2i)^{k+1}}, R = \sqrt{13}$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{2^k}, R = 2$

19. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3!}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots, R = \infty$

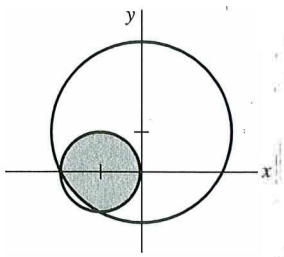
21. $e^{3i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-3i)^k}{k!}, R = \infty$

23. $z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$

25. $\frac{1}{2i} + \frac{3}{(2i)^2}z + \frac{7}{(2i)^3}z^2 + \frac{15}{(2i)^4}z^3 + \cdots, R = 1$

27. $2\sqrt{5}$

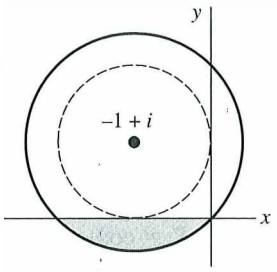
29. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z+1)^k, R = 1;$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2+i)^{k+1}}(z-i)^k, R = \sqrt{5}$



31. *a*) La distancia de z_0 al corte de ramificación es una unidad.

c) La serie converge en el interior del círculo $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$. Aunque la serie converge en la

región sombreada, no converge (ni representa) a Ln z en esta región.



33. $1.1 + 0.12i$ 35. $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} z^{2k+1}$

Ejercicios 11.3, página 496

1. $\dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{4!} - \dfrac{z^5}{6!} + \cdots$

3. $1 - \dfrac{1}{1! \cdot z^2} + \dfrac{1}{2! \cdot z^4} - \dfrac{1}{3! \cdot z^6} + \cdots$

5. $\dfrac{e}{z-1} + e + \dfrac{e(z-1)}{2!} + \dfrac{e(z-1)^2}{3!} + \cdots$

7. $-\dfrac{1}{3z} - \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{z}{3^3} - \dfrac{z^2}{3^4} - \cdots$

9. $\dfrac{1}{3(z-3)} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{z-3}{3^3} - \dfrac{(z-3)^2}{3^4} + \cdots$

11. $\cdots - \dfrac{1}{3(z-4)^2} + \dfrac{1}{3(z-4)} - \dfrac{1}{12} + \dfrac{z-4}{3 \cdot 4^2} - \dfrac{(z-4)^2}{3 \cdot 4^3} + \cdots$

13. $\cdots - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{z}{2^2} - \dfrac{z^2}{2^3} - \cdots$

15. $\dfrac{-1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \cdots$

17. $\dfrac{1}{3(z+1)} - \dfrac{2}{3^2} - \dfrac{2(z+1)}{3^3} - \dfrac{2(z+1)^2}{3^4} - \cdots$

19. $\cdots - \dfrac{1}{3z^2} + \dfrac{1}{3z} - \dfrac{1}{3} - \dfrac{z}{3 \cdot 2} - \dfrac{z^2}{3 \cdot 2^2} - \cdots$

21. $\dfrac{1}{z} + 2 + 3z + 4z^2 + \cdots$

23. $\dfrac{1}{z-2} - 3 + 6(z-2) - 10(z-2)^2 + \cdots$

25. $\dfrac{3}{z} - 4 - 4z - 4z^2 - \cdots$

27. $\cdots + \dfrac{2}{(z-1)^3} + \dfrac{2}{(z-1)^2} + \dfrac{2}{z-1} + 1 + (z-1)$

Ejercicios 11.4, página 499

1. Defina $f(0) = 2$.
3. $-2 + i$ es un cero de orden 2.
5. $-i$ e i son ceros de orden 1; 0 es un cero de orden 2.
7. $2n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, son ceros de orden 1.
9. orden 5 11. orden 1
13. $-1 \pm 2i$ son polos simples.
15. -2 es un polo simple; $-i$ es un polo de orden 4.
17. $(2n+1)\pi/2$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, son polos simples.
19. 0 es un polo de orden 2.
21. $2n\pi i$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, son polos simples.
23. no aislado

Ejercicios 11.5, página 505

1. $\frac{2}{5}$ 3. -3 5. 0
7. $\text{Res}(f(z), -4i) = \frac{1}{2}$, $\text{Res}(f(z), 4i) = \frac{1}{2}$
9. $\text{Res}(f(z), 1) = \frac{1}{3}$, $\text{Res}(f(z), -2) = -\frac{1}{12}$, $\text{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{4}$
11. $\text{Res}(f(z), -1) = 6$, $\text{Res}(f(z), -2) = -31$, $\text{Res}(f(z), -3) = 30$
13. $\text{Res}(f(z), 0) = -3/\pi^4$, $\text{Res}(f(z), \pi) = (\pi^2 - 6)/2\pi^4$
15. $\text{Res}(f(z), (2n+1)\pi/2) = (-1)^{n+1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$
17. 0; $2\pi i/9$; 0 19. πi; πi; 0 21. $\dfrac{\pi}{3}$
23. 0 25. $2\pi i \cosh 1$ 27. $-4i$ 29. $6i$
31. $-\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} i$

Ejercicios 11.6, página 511

1. $\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$ 3. 0 5. $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ 7. $\dfrac{\pi}{4}$
9. $\dfrac{\pi}{6}$ 11. π 13. $\dfrac{\pi}{16}$ 15. $\dfrac{3\pi}{8}$
17. $\dfrac{\pi}{2}$ 19. $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ 21. πe^{-1} 23. πe^{-1}
25. πe^{-3} 27. $\dfrac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}(\cos\sqrt{2} + \text{sen}\sqrt{2})$
29. $-\dfrac{\pi}{8}\left(\dfrac{e^{-3}}{3} - e^{-1}\right)$

Ejercicios de repaso del capítulo 11, página 512

1. verdadero 3. falso 5. verdadero 7. verdadero
9. $\dfrac{1}{\pi}$ 11. $|z - i| = \sqrt{5}$
13. $1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k \cos\dfrac{k\pi}{4}}{k!} z^k$

15. $-\dfrac{i}{z^3}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{i}{3!z}-\dfrac{1}{4!}-\dfrac{i}{5!}z+\cdots$

17. $\cdots+\dfrac{1}{5!(z-i)^3}-\dfrac{1}{3!(z-i)}+(z-i)$

19. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{8}{9}z+\dfrac{26}{27}z^2+\cdots;$

$\cdots-\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{z}{3^2}-\dfrac{z^2}{3^3}-\cdots;$

$\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{8}{z^3}+\dfrac{26}{z^4}+\cdots;$

$-\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{z-1}{2^2}-\dfrac{(z-1)^2}{2^3}-\cdots$

21. $\dfrac{404\pi}{81}i$ 23. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}i$

25. $(\pi+\pi e^{-2}\cos 2)\,i$ 27. $-\pi i$

29. $\dfrac{9\pi^3+2}{\pi^2}i$ 31. $\dfrac{7\pi}{50}$

33. $\pi\left(\dfrac{90-52\sqrt{3}}{12-7\sqrt{3}}\right)$

Ejercicios 12.1, página 518

1. la línea $v=-u$ 3. la línea $v=2$
5. segmento abierto de línea desde 0 hasta πi
7. el rayo $\theta=\frac{1}{2}\theta_0$ 9. la línea $u=1$
11. el cuarto cuadrante
13. la cuña $\pi/4\le \operatorname{Arg} w\le \pi/2$
15. el círculo con centro $w=4i$ y radio $r=1$
17. la franja $-1\le u\le 0$
19. la cuña $0\le \operatorname{Arg} w\le 3\pi/4$
21. $w=-i(z-i)=-iz-1$
23. $w=2(z-1)$ 25. $w=-z^4$
27. $w=e^{3z/2}$ 29. $w=-z+i$

Ejercicios 12.2, página 524

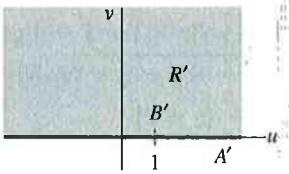
1. conforme en todos los puntos menos $z=\pm 1$
3. conforme en todos los puntos menos $z=\pi i\pm 2n\pi i$
5. conforme en todos los puntos fuera del intervalo $[-1,1]$ del eje x
7. La imagen es la región mostrada en la figura 12.11*b*). Un segmento horizontal $z(t)=t+ib$, donde $0<t<\pi$, se transforma en la porción inferior o superior de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 b}+\frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 b}=1$$

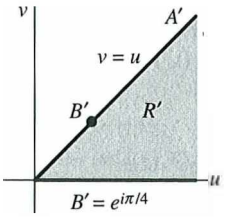
según sea $b>0$ o $b<0$.

9. La imagen de la región es la cuña $0\le \operatorname{Arg} w\le \pi/4$. La imagen del segmento de línea $[-\pi/2,\pi/2]$ es la unión de los segmentos de línea que unen a $e^{i\pi/4}$ con 0 y a 0 con 1.

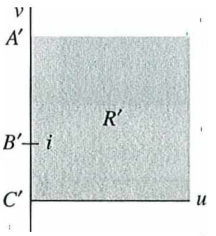
11. $w=\cos(\pi z/2)$ utilizando H-4



13. $w=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}$ utilizando H-5 y $w=z^{1/4}$



15. $w=\left(\dfrac{e^{\pi/z}+e^{-\pi/z}}{e^{\pi/z}-e^{-\pi/z}}\right)^{1/2}$ utilizando H-6 y $w=z^{1/2}$



17. $w=\operatorname{sen}(-i\operatorname{Ln} z-\pi/2)$; $A'B'$ es el intervalo real $(-\infty,-1]$.

19. $u=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}(z^4)$ o $u(r,\theta)=\dfrac{4}{\pi}\theta$

21. $u=\dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(i\dfrac{1-z}{1+z}\right)=\dfrac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{2y}\right)$

23. $u=\dfrac{1}{\pi}[\operatorname{Arg}(z^2-1)-\operatorname{Arg}(z^2+1)]$

25. $u=\dfrac{10}{\pi}[\operatorname{Arg}(e^{\pi z}-1)-\operatorname{Arg}(e^{\pi z}+1)]$

Ejercicios 12.3, página 531

1. $T(0)=\infty$, $T(1)=i$, $T(\infty)=0$; $|w|=1$ y la línea $v=\frac{1}{2}$; $|w|\ge 1$
3. $T(0)=-1$, $T(1)=\infty$, $T(\infty)=1$; la línea $u=0$ y el círculo $|w-1|=2$; el semiplano $u\le 0$

5. $S^{-1}(w)=\dfrac{-w-1}{-w+i}=\dfrac{w+1}{w-i}$, $S^{-1}(T(z))=\dfrac{(1+i)z-1}{2z+i}$

7. $S^{-1}(w)=\dfrac{-w+2}{-w+1}=\dfrac{w-2}{w-1}$, $S^{-1}(T(z))=\dfrac{3}{z}$

9. $w=-2\dfrac{z+1}{z-2}$ 11. $w=\dfrac{2z}{z-1-2i}$

13. $w = \dfrac{i}{2}\dfrac{z-1}{z}$

15. $w = 3\dfrac{(1+i)z + 1 - i}{(-3+5i)z - 3 - 5i}$

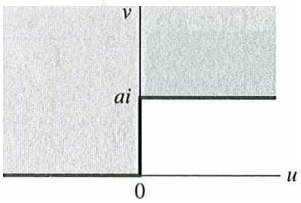
17. $u = \dfrac{1}{\log_e 2}\log_e\left|\dfrac{z+2}{z-1}\right|$. Las curvas de nivel son las imágenes de los círculos $|w| = r$, donde $1 < r < 2$, bajo la transformación fraccional lineal $T(w) = (w+2)/(w-1)$. Puesto que los círculos no pasan por el polo en $w = 1$, las imágenes son círculos.

19. Construya la transformación fraccional lineal que envía a $1, i, -i$ hacia $0, 1, -1$.

21. Simplifique $T_2(T_1(z)) = \dfrac{a_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}\right) + d_2}$.

Ejercicios 12.4, página 916

1. primer cuadrante

3. 

5. $f'(z) = A(z+1)^{-1/2}z^{-1/2}(z-1)^{-1/2}$ para alguna constante A

7. $f'(z) = A(z+1)^{-1/3}z^{-1/3}$ para alguna constante A

9. Demuestre que $f'(z) = \dfrac{A}{(z^2-1)^{1/2}}$ y concluya que $f(z) = \cosh^{-1} z$.

11. Desmuestre que $f'(z) \to A/z$ cuando $w_1 \to \infty$ y concluya que $f(z) = \operatorname{Ln} z$.

13. Demuestre que $f'(z) \to A(z+1)^{-1/2}z(z-1)^{-1/2} = Az/(z^2-1)^{1/2}$ cuando $u_1 \to 0$.

Ejercicios 12.5, página 540

1. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-1}{z}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z+1}\right)$

3. $u = \dfrac{5}{\pi}[\pi - \operatorname{Arg}(z-1)] + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{z+1}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z+1}{z+2}\right)$

5. $u = \dfrac{y}{\pi}\left\{1 + \dfrac{y^2 - x^2}{y}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right)\right] + x\log_e\left[\dfrac{(x-1)^2 + y^2}{x^2 + y^2}\right]\right\}$

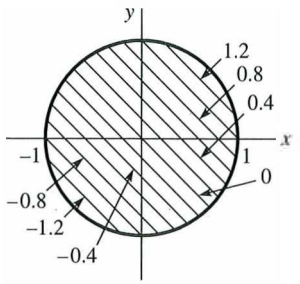
7. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z^2-1}{z^2}\right) + \dfrac{5}{\pi}\operatorname{Arg}(z^2+1)$

9. $u = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{(1-i)z - (1+i)}{1-z}\right) - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\dfrac{1-z}{-(1+i)z + 1 - i}\right)$

11. $u(0,0) = \frac{1}{3}$, $u(-0.5, 0) = 0.5693$, $u(0.5, 0) = 0.1516$

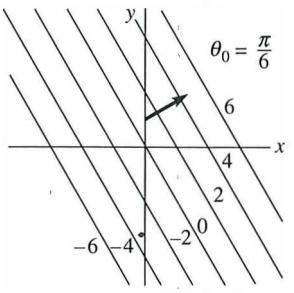
13. Demuestre que $u(0,0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it})\,dt$.

15. $u(r, \theta) = r\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$ o $u(x, y) = x + y$

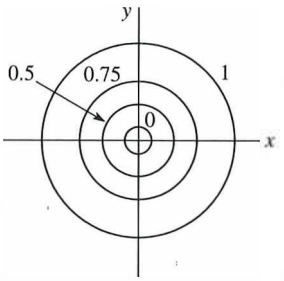


Ejercicios 12.6, página 546

1. $g(z) = e^{-i\theta_0}$ es analítica en cualquier punto y $G(z) = e^{-i\theta_0}z$ es un potencial complejo. Las líneas equipotenciales son $x\cos\theta_0 + y\operatorname{sen}\theta_0 = c$.



3. $g(z) = 1/z$ es analítica para $z \neq 0$ y $G(z) = \operatorname{Ln} z$ es analítica excepto en $z = x \leq 0$. Las líneas equipotenciales son los círculos $x^2 + y^2 = e^{2c}$.



5. $\phi = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{Arg} z$ o $\phi(r, \theta) = \dfrac{4}{\pi}\theta$, y $G(z) = \dfrac{4}{\pi}\operatorname{Ln} z$ es un potencial complejo. Las líneas equipotenciales son los rayos $\theta = \dfrac{\pi}{4}c$ y $\mathbf{F} = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

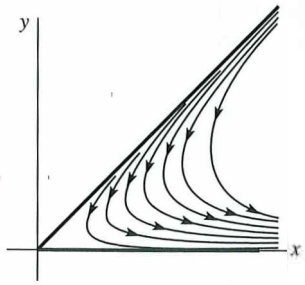
7. Las líneas equipotenciales son las imágenes de los rayos $\theta = \theta_0$ bajo las transformaciones sucesivas $\zeta = w^{1/2}$ y $z = (\zeta + 1)/(-\zeta + 1)$. La transformación $\zeta = w^{1/2}$ trans-

forma el rayo $\theta = \theta_0$ en el rayo $\theta = \theta_0/2$ en el plano ζ, y $z = (\zeta + 1)/(-\zeta + 1)$ transforma este rayo en un arco de círculo que pasa por $z = -1$ y por $z = 1$.

9. *a)* $\psi(x, y) = 4xy(x^2 - y^2)$ o, en coordenadas polares, $\psi(r, \theta) = r^4 \operatorname{sen} 4\theta$. Nótese que $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = \overline{4z^3} = 4(x^3 - 3xy^2, y^3 - 3x^2y)$

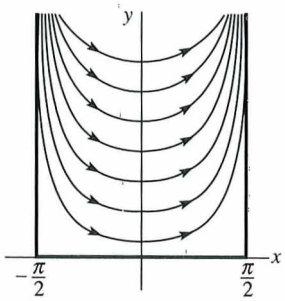
c)



11. *a)* $\psi(x, y) = \cos x \operatorname{senh} y$ y $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = \overline{\cos z} = (\cos x \cosh y, \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)$

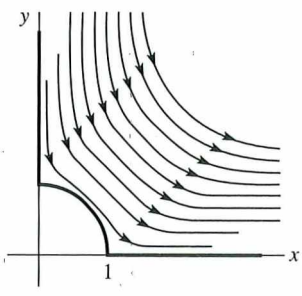
c)



13. *a)* $\psi(x, y) = 2xy - \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ o, en coordenadas polares, $\psi(r, \theta) = (r^2 - 1/r^2) \operatorname{sen} 2\theta$. Nótese que $\psi = 0$ en la frontera de R.

b) $\mathbf{V} = 2\bar{z} - 2/\bar{z}^3$

c)



15. *a)* $f(t) = \pi i - \dfrac{1}{2}[\log_e|t + 1| + \log_e|t - 1| + i \operatorname{Arg}(t + 1) + i \operatorname{Arg}(t - 1)]$ y así

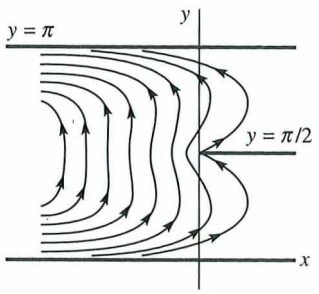
$$\operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \pi/2, & -1 < t < 1 \\ \pi, & t > 1. \end{cases}$$

Por tanto, $\operatorname{Im}(G(z)) = \psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

b) $x = -\frac{1}{2}[\log_e|t + 1 + ic| + \log_e|t - 1 + ic|]$

$y = \pi - \frac{1}{2}[\operatorname{Arg}(t + 1 + ic) + \operatorname{Arg}(t - 1 + ic)]$, para $c > 0$

c)



17. *a)* $f(t) = \dfrac{1}{\pi}((t^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} t) = \dfrac{1}{\pi}((t^2 - 1)^{1/2} + \operatorname{Ln}(t + (t^2 - 1)^{1/2}))$ y así $\operatorname{Im}(f(t)) =$

$$\begin{cases} 1, & t < -1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$ y $\operatorname{Re}(f(t)) = 0$ para $-1 < t < 1$.

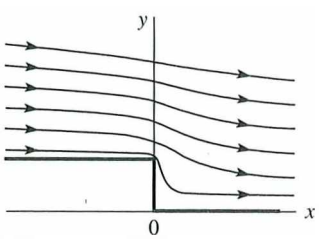
Por tanto, $\operatorname{Im}(G(z)) = \psi(x, y) = 0$ en la frontera de R.

b) $x = \operatorname{Re}\left[\dfrac{1}{\pi}\left(((t + ic)^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(t + ic)\right)\right]$

$y = \operatorname{Im}\left[\dfrac{1}{\pi}\left(((t + ic)^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1}(t + ic)\right)\right]$

para $c > 0$

c)



19. $z = 0$ en el ejemplo 5; $z = 1$, $z = -1$ en el ejemplo 6

21. Las líneas de corriente son las ramas de la familia de hipérbolas $x^2 + Bxy - y^2 - 1 = 0$ que se encuentran en el primer cuadrante. Todos los miembros de la familia pasan por $(1, 0)$.

23. *Sugerencia:* Para z en el semiplano superior,

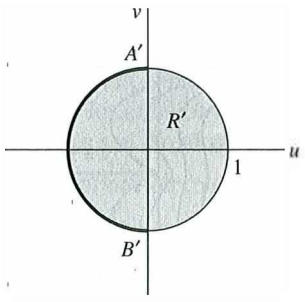
$$k[\operatorname{Arg}(z - 1) - \operatorname{Arg}(z + 1)] = k \operatorname{Arg}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right).$$

Ejercicios de repaso del capítulo 12, página 548

1. $v = 4$
3. la cuña $0 \le \operatorname{Arg} w \le 2\pi/3$
5. verdadero
7. 0, 1, ∞
9. falso

11. La imagen del primer cuadrante es la franja $0 < v < \pi/2$. Los rayos $\theta = \theta_0$ se transforman en las líneas horizontales $v = \theta_0$ del plano w.

13. $w = \dfrac{i - \cos \pi z}{i + \cos \pi z}$



15. $u = 2 - 2y/(x^2 + y^2)$

17. *a*) Nótese que $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 2\pi$ y $\alpha_3 \to 0$ cuando $u_1 \to \infty$.

b) *Sugerencia:* Escriba $f(t) = \frac{1}{2} A[\log_e|t + 1| + \log_e|t - 1| + i \operatorname{Arg}(t + 1) + i \operatorname{Arg}(t - 1)] + B$.

19. $G(z) = f^{-1}(z)$ transforma a R en la franja $0 \le v \le \pi$, y $U(u, v) = v/\pi$ es la solución al problema de la frontera transferida. Por tanto, $\phi(x, y) = (1/\pi)\operatorname{Im}(G(z)) = (1/\pi)\psi(x, y)$, por lo que las líneas equipotenciales $\phi(x, y) = c$ son las líneas de corriente $\psi(x, y) = c\pi$.

Ejercicios del apéndice II, página AP-5

1. 24; 720; $4\sqrt{\pi}\,/3$; $-8\sqrt{\pi}\,/15$ 3. 0.297

5. $\Gamma(x) > \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt > e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}dt = \frac{1}{xe}$ para $x > 0$.

Cuando $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$.

Por Dayet

Índice

A

aceleración
  centrípeta, 163
  componente normal de la, 168
  componente tangencial de la, 168
  vector, 162-163
aceleración centrípeta, 163
Adams-Bashforth-Moulton
Aliasing, 390-391
amortiguamiento crítico
amplificacion en el plano z, 517
  variable con el tiempo, 356
análisis compartimental, 147
análisis cualitativo
analiticidad en un punto, 433
  criterio para la, 434
analiticidad, campos vectoriales y, 542-543
ángulo entre dos vectores, 18
ángulos directores, 18-19
anillo en el plano complejo, 427
antiderivada
  de una función compleja, 466-468
  existencia de una, 468
aproximación de cinco puntos para la ecuación de Laplace, 398
área de un paralelogramo, 26
área de un triángulo, 26
área de una superficie, 228-230
área superficial, 228-230
argumento de un número complejo, 421
argumento principal de un número complejo, 421
axiomas de clausura para un espacio vectorial, 37

B

balanceo de ecuaciones químicas, 369
balanceo, 59
barra torcida, 341
base de un espacio vectorial, 40
  estándar, 40
base estándar
  para P^n, 40, 41
  para R^2, 38
  para R^3, 40
  para R^n, 40
base ortogonal para un espacio vectorial, 36, 45-46
base ortonormal
  para R^n, 44-45
  para un espacio vectorial, 44
binormal, 168-169

C

cabeceo, 59
cadena alimenticia acuática, 151
cadena de longitud n, 138
cadenas binarias, 138
cambio de variables
  en una integral definida, 260
  en una integral doble, 261-265
  en una integral triple, 265
campo vectorial bidimensional, 188
campo vectorial conservativo, 206
campo vectorial solenoidal, 191
campos vectoriales, 187-192
  bidimensionales, 188
  conservativos, 206
  divergencia, 187-191
  flujo, 189, 233-234
  integrales, 233-234

irrotacionales, 191
rotacional, 189-191
rotacionales, 191
solenoidales, 191
velocidad, 545, 546
y analiticidad, 542-543
Cayley, Arthur, 35
de curvatura, 170
de masa, 213-214, 245
centroide, 213, 245
ceros
de orden *n*, 498
de una función, 498
del coseno y seno complejos, 447
del coseno y seno hiperbólicos complejos, 448
cicloide, 171
circulación, 200, 457
círculo
de convergencia, 481-482
de curvatura, 170
en plano complejo, 157, 426
círculos grandes, 251
claro, 41
cociente de Rayleigh, 121
codificar un mensaje, 135-137, 139
en el código Hamming, 140
código corrector de errores, 138-143
código Hamming, 140, 143
código, 135, 139
coeficientes de Fourier, 279
coeficientes de las incógnitas en un sistema lineal, 61
coeficientes de transferencia, 148
coeficientes indeterminados
cofactor, 78, 88
coleo, 59
comando MatrixPower, 126
combinación lineal, 8
componente de un vector sobre otro vector, 19-20
componente de un vector, 6, 8, 13
componente horizontal de vectores, 8
componente normal de la aceleración, 168
componente vertical de vectores, 8
condición de compatibilidad, 332
condición de Dirichlet, 317
condición de Neumann, 317
condición de Robin, 317
condiciones de extremo libre, 325, 341
condiciones de frontera homogéneas, 317
condiciones de frontera, 317
dependientes del tiempo, 334-337
homogéneas, 317
independientes del tiempo, 332-334
no homogéneas, 317
condiciones iniciales, 316
conjugado de un número complejo, 418-419
conjunto abierto, 426-427
conjunto completo de funciones, 276
conjunto conexo, 427
conjunto fundamental de soluciones
conjunto normalizado de funciones, 275
conjunto ortogonal
con respecto a una función de peso, 276
de funciones, 274-275
de vectores, 275
conjunto ortonormal de funciones, 274-275, 301
conjunto puente, 41-42
conmutador de dos matrices, 152
constantes de un sistema lineal, 61
continuidad de una función compleja, 431
contorno, 381, 453, 454
mellado, 510-511
contornos mellados, 510-511
convergencia absoluta
de una serie compleja, 480
convergencia
criterio, 478
de una integral de Fourier, 376
de una integral impropia, 508-509
de una serie de Fourier, 280-281
de una serie de Fourier-Bessel, 304-305
de una serie de Fourier-Legendre, 306
coordenadas cartesianas, 11, 12
coordenadas cilíndricas, 247-249, 354-360
laplaciano en, 357-358
coordenadas de un punto medio, 13
coordenadas de un vector relativas a una base, 8, 40
coordenadas esféricas, 249-251
laplaciano, 360-361
coordenadas polares, 218-222, 349-353, 354-360
laplaciano en, 349-351
coordenadas rectangulares, 11, 12, 309-349
coordenadas *z*, 12
Corte de rama, 444
coseno Fourier, 382
Fourier, 380-386
par, 381
seno Fourier, 382-383
cosenos directores, 18-19
Criptografía, 135-138
criterios de estabilidad
cuerda pulsada, 323-324, 327
cuerda vibrando, 300, 324, 327, 409, 412
cuña cilíndrica, 248
cuña esférica, 251
curva 3D, 170
curva cerrada simple, 193
curva cerrada, 193, 223-225
curva espacial, 156
longitud, 160
curva paramétrica, 156
curva suave por tramos, 193

curva suave, 158, 193
curvas
  cerradas, 193, 196
  de intersección, 157
  definidas por una función explícita, 195-196
  dirección positiva, 193
  paralelas, 251
  paramétricas, 156, 194, 196
  simple cerrada, 193
  suave por tramos, 193
  suaves, 158, 193
curvas de nivel, 172
curvas ortogonales, 438
curvatura, 167-171
  de un problema, 294-295

D

deflación, método de, 123-125
deformación de contornos, 461
  de lectores, 39-40, 42
  distribuciones de temperatura, 300
  química
derivada direccional, 178-184
  cálculo, 179-181
  definición, 179
  para funciones de dos variables, 202
  para funciones de tres variables, 181, 203
  valores máximos, 181-182
derivada segunda, 159
derivadas de funciones complejas
  de funciones hiperbólicas complejas, 448
  de funciones hiperbólicas inversas complejas, 450-451
  de funciones trigonométricas complejas, 445-447
  de funciones trigonométricas inversas complejas, 446
  definición, 421
  del logaritmo complejo, 441-442
  derivadas de orden superior para una función vectorial, 159
  reglas, 432
derivadas de funciones reales
  fórmulas, tabla de, 446
derivadas parciales combinadas, 173-174
derivadas parciales, 171-177
  combinadas, 173-174
  con respecto a x, 173
  con respecto a y, 173
  definición, 189
  generalizaciones, 175
  orden superior, 173-174
  regla de la cadena, 174-184
  segundo orden, 174
  símbolos, 174
  tercer orden, 174
descifrado de un mensaje, 135-137, 139
desigualdad de Cauchy, 474
desigualdad de Cauchy-Schwarz, 22
desigualdad ML, 457
desigualdad triangular, 420
determinación de líneas de corriente, 544-546
determinante(s)
  cofactores, 78, 87
  de orden, 77
  de una matriz 2 X 2, 77
  de una matriz 3 X 3, 78
  definición, 77
  evaluación por reducción de renglones, 86
  expansión por cofactores, 78-81
  menor de, 78
  propiedades, 78-89
diagonabilidad
  condición suficiente, 128
  criterio, 128
diagramas de árbol, 175-176
diferenciación, reglas de, 160, 432
diferencial
  de un área superficial, 230
  de una función de varias variables, 502, 503
  operador, 178
  relaciones de recurrencia, 302
difusividad térmica, 315
dígitos binarios (Bits), 138
dígitos binarios comprobadores de la paridad, 139
dimensión de un espacio vectorial, 40-42
dirección negativa, 223
dirección positiva de una curva, 193-223
disco abierto, 426
distancia de un punto a una línea, 22
divergencia de un campo vectorial, 187-191
  definición, 190
dominio
  de una función de dos variables, 171
  de una función, 428
  en el plano complejo, 427
dominio doblemente conexo, 460, 461
dominio triplemente conexo, 462

E

ecosistema, estados de, 149-150
ecuación bidimensional de Laplace, 314
ecuación bidimensional de onda, 539-540
ecuación bidimensional del calor, 343-345
ecuación característica de una matriz, 103
ecuación cartesiana de un punto, 31
ecuación de calor
  bidimensional, 343-345
  deducción de la ecuación unidimensional, 315
  en coordenadas polares, 354
  reemplazo por ecuación diferencial, 403-405
  solución, 319-321
  unidimensional, 314-315
  y la serie discreta de Fourier, 389
  y la transformada discreta de Fourier, 389-390
ecuación de continuidad, 258-259
ecuación de difusión, 177, 318
ecuación de Laplace, 192, 398-403
ecuación de onda, 176, 314, 322
  bidimensional, 343

deducción de la ecuación unidimensional, 369
solución, 322-327
sustitución por ecuación en diferencias, 409
unidimensional, 314, 316
ecuación de Van der Waal, 177
ecuación diferencial de Bessel
paramétrica, 299-300
ecuación diferencial de Chebyschev, 308
ecuación diferencial de Laguerre, 301
ecuación diferencial de Legendre, 300
ecuación diferencial de Raleigh, 250
ecuación diferencial de segundo orden, 111
ecuación diferencial de Van der Pol, 264
ecuación diferencial hermitiana, 301
ordinaria, 41, 430
parcial, 310
ecuación diferencial parcial (EDP)
elíptica, 329
hiperbólica, 398-399
homogénea, 333-335
lineal, 310
no homogénea, 332, 335
parabólica, 403, 406
separable, 310-314
solución, 310
ecuación diferencial parcial de Laplace, 176, 177, 192, 314, 315, 398-403
principio del máximo, 329
solución, 327-332
ecuación diferencial parcial de Poisson, 338
ecuación diferencial parcial elíptica, 329
ecuación diferencial parcial hiperbólica, 398, 409
ecuación diferencial parcial parabólica, 403, 406
ecuación diferencial
ordinaria
de Legendre, 300
de Riccati
homogénea, 430
lineal, 41
ecuación en diferencias
reemplazo para EDO de segundo orden
reemplazo para la adecuación de onda, 409-411
reemplazo para la ecuación de Laplace, 398-399
reemplazo para la ecuación del calor, 403-405
ecuación paramétrica de Bessel, 299-300
ecuación telegráfica, 319
ecuación unidimensional de onda, 314, 316
deducción, 324
ecuación unidimensional del calor, 314-315
deducción, 315
ecuación vectorial para un plano, 30-31
ecuación vectorial para una línea, 28-29
ecuaciones algebraicas lineales, 61-71
sistemas de, 61-71
ecuaciones algebraicas, 61-71
ecuaciones auxiliares
ecuaciones comprobadoras de la paridad, 141
ecuaciones de Cauchy-Riemann, 434-439
ecuaciones de Maxwell, 192
ecuaciones diferenciales de primer orden
ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, 311, 336
no homogéneas
solución particular, 287-288
ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden, 310-314
homogéneas, 310
no homogéneas, 310
principio de superposición, 312
solución, 310
ecuaciones diferenciales separables
parciales, 310-314
ecuaciones paramétricas de una línea, 29
ecuaciones químicas, balance de, 69
ecuaciones simétricas de una línea, 29-30
eje imaginario, 419
eje real, 419
ejes principales de una cónica, 131
elementos de la diagonal principal de una matriz, 52
eliminación de Gauss-Jordan, 66-68, 133
eliminación gaussiana, 64-66
enteros
módulo, 138
módulo 27+D1085, 138
error de truncamiento
error(es)
propagación, 406
suma de los cuadrados, 145
errores al cuadrado, suma, 145
escalamiento, 122-123
espacio 2D, 5-11
espacio 3D, 11-16
espacio de solución, 41-42
espacio renglón, 72
espacio vectorial cero, 36
espacio vectorial complejo, 37
espacio vectorial de dimensión infinita, 41
espacio vectorial dimensional finito, 41
espacio vectorial real, 37, 42
espacio vectorial trivial, 37
espacio vectorial, 36-43
axiomas, 36-38
base, 40
cero, 36
complejo, 37
de dimensión finita, 41
de dimensión infinita, 41
dimensión, 40-42
real, 37
subespacio de un, 38-39
espectro de frecuencia, 292-293
espiral circular, 156-157
espiral elíptica, 157
estado de un sistema, 148
evaluación de integrales reales por residuos, 506-511
existencia de transformadas de Fourier, 382
existencia y unicidad de una solución, 96

expansión de cofactores para un determinante, 78-81
expansión de una función
en términos de funciones ortogonales, 285-288
en tres series, 286
en una serie de cosenos, 284
en una serie de Fourier compleja, 291-292
en una serie de Fourier, 280
en una serie de Fourier-Bessel, 304-305
en una serie de Fourier-Legendre, 305
en una serie de Laurent, 492-495
en una serie de senos, 284-285
medio intervalo, 286
expansión ortogonal de una serie, 276, 339-343
expansiones de medio intervalo, 286
extensión periódica, 281

F

factorización LU de una matriz, 60
fenómeno de Gibbs, 285-286
fluido incompresible, 191, 544
flujo
alrededor de un cilindro, 545
alrededor de una esquina, 544
de calor, 315
fluido permanente, 543-544
flujo a través de una superficie, 233-234
flujo de fluido permanente, 543-544
flujo fluido bidimensional, 429
flujo irrotacional, 191, 544
flujo neto, 458
flujo rotacional, 191
flujo uniforme, 544
flujo y la integral de Cauchy, 472
forma compleja de las series de Fourier, 290-293
forma de renglón escalonado, 64-65
forma en renglones escalonados reducidos de una matriz, 65
fórmula de DeMoivre, 423
fórmula de distancia, 12-13
fórmula integral de Cauchy, 470-474
para las derivadas, 472-474
fórmula integral de Poisson
para un disco unitario, 539-540
para un semiespacio superior, 537-539
formulación auto adjunta, 298-300
formulación cuadrática, 132-133
formulación exponencial, 290, 378
formulación general de una ecuación diferencial ordinaria, 61
formulación normal
formulación polar de un número complejo, 421, 440-441
franja de Mobius, 232
frecuencia angular fundamental, 277, 292
frecuencia fundamental, 292, 325
frontera de un conjunto, 427
fronteras aisladas, 317
fuente, 191, 472
fuerza central, 166
fuerza externa, 287, 318
fuerza impulsora periódica, 287-288
fuerza no conservativa, 208
función analítica
criterio para, 434
definición de, 433
derivadas de, 472
función armónica, 192, 436-438
teorema de transformación para la, 522-523
función biarmónica, 526
función compleja
analítica, 433
como flujo de un fluido, 429-430
como mapeos, 429, 515-519
como una transformación, 429
completa, 433
continua, 431
definición, 429, 431, 433, 527
derivada de, 431
diferenciable, 431
dominio de, 428
exponencial, 439
hiperbólica inversa, 449-452
hiperbólica, 448
límite de una, 430-431
logarítmica, 441-442
Polinómica, 431
racional, 431
rango de, 428
trigonométrica, 445-447
trigonométrica inversa, 450
función
armónica, 192, 436-438
compleja, 428-434
de corriente, 544
de dos variables, 171, 184
de potencia, 517
de tres o más variables, 172
dominio, 428
gradiente de, 178
impar, 283
intervalo de, 428
ortogonal, 273-278
par, 283
periódica, 277
potencial, 206, 543
producto interior de, 273
función complementaria
función completa, 433
función de Bessel modificada
función de corriente, 544
función de error complementaria, 366
función de error, 366-367
función de escalón unitario
función de peso
ortogonalidad con respecto a la, 276
función de potencia real, 517
función de potencia, 517

función de valor real, periódica, 277
función exponencial
  definición, 439
  periodo, 440
  propiedades, 439
  región fundamental, 440
función impar, 283
  propiedades, 283
función par, 283
  propiedades, 283
función principal logarítmica, 443
función racional, 431
función seno inversa, 449-450
función serpenteante
funciones armónicas conjugadas, 437-439
funciones características
funciones de Bessel, 354-360
  ortogonalidad, 299
  relaciones de recurrencia diferenciales para, 302
funciones hiperbólicas inversas, 449-452
  derivadas de, 450-451
funciones hiperbólicas, 448
funciones ortogonales, 273-278
funciones trigonométricas inversas, 412, 449
  derivadas de, 450-451
funciones vectoriales
  continuidad, 158
  definición, 156
  derivada, 158
  diferenciación de componentes, 158-159
  integrales de, 160-161
  límite, 157-158
  suaves, 158

G
gradiente
  campo, 206
  de una función, 178
  definición, 179
  funciones de tres variables, 184-185
  interpretación geométrica, 184
gráficas
  de una función, 171
  de un plano, 32-33

H
Hamilton, William Rowan, 35
hipótesis lineal de control por donante, 147
hundir, 191

I
identidad de Lagrange, 28
identidades de Green, 260
identidades trigonométricas, 446-447
imagen, 261, 515-516
impedancia compleja, 441
impedancia, 161, 441
independencia de la trayectoria, 502-508
  pruebas, 204-208
independencia de la trayectoria, 202-208, 464-469
  definición, 465
  prueba, 204-208
  de vectores, 40, 42
integración por partes, 469
integral compleja, 454, 458, 506, 513
integral de contorno, 454-459
  definición, 454
  método de evaluación, 455-456
  propiedades, 456
  teorema de frontera, 457
  teorema fundamental, 466-467
integral de Fourier, 375-380
  condiciones para la convergencia, 376
  forma compleja, 378-379
  forma de coseno, 377-378
  forma de seno, 377-378
integral de probabilidad, 366
integral de superficie, 228-236
integral definida, 260
integral doble
  definición, 210
  en coordenadas polares, 218-222
  evaluación, 211-212
  inversión del orden de integración en, 212-513
  propiedades, 210
integral indefinida, 160, 466
integral iterada, 211, 243-244
integral triple
  aplicaciones, 245-247
  definición, 243
  en coordenadas cilíndricas, 247-249
  en coordenadas esféricas, 249-251
  evaluación, 243-244
integrales de línea complejas, 454
integrales de línea, 193-202
  como trabajo, 198-200
  complejas, 454
  definición, 194
  definidas, 193
  en el espacio, 98, 197
  en el plano complejo, 454
  en el plano, 193-194, 223
  evaluación, 194-196
  independientes de la trayectoria, 203
  sobre curvas cerradas simples, 223-225
  teorema fundamental, 203-204
integrales reales, evaluación de residuos, 506-511
intervalo, 171
inversa de una matriz
  definición, 89
  encontrar
    con operaciones elementales entre renglones, 93-95
    por el método adjunto, 90-93
  propiedades, 90
  uso para resolver un sistema, 95-96

inversa multiplicativa, 89
iteración de Gauss-Siedel, 69, 401-402

J
Jacobiano, 262

L
laplaciano bidimensional, 314
laplaciano
  en coordenadas cilíndricas, 357-358
  en coordenadas esféricas, 360-361
  en coordenadas polares, 349-351
  en coordenadas rectangulares, 191
latitud, 251
ley de Coulomb, 236
ley de Gauss, 259
límite de una función de una variable compleja, 430-431
línea
  ecuación vectorial, 28-29
  ecuaciones paramétricas, 29
  ecuaciones simétricas, 29-30
  mínimos cuadrados, 144-146
línea de mejor ajuste, 145
línea nodal, 356
línea normal a una superficie, 186
línea tangente, 159
linealización
líneas de corriente, 430, 544-546
  ecuación vectorial, 28-29
  ecuaciones paramétricas, 29
  ecuaciones simétricas, 29-30
logaritmo de un número complejo
  corte de ramificación, 444
  definición, 442
  derivada, 441-442
  propiedades, 443
  ramificación, 443, 444
  valor principal, 442-444
longitud, 251
longitud de arco, como parámetro, 160-161

M
malla
  puntos, 399
  tamaño, 399
masa, 213
  centro de, 213-214
  de una superficie, 231
  usando integrales triples, 245
matrices equivalentes por renglones, 64
matrices espín de Pauli, 152
matriz (matrices), 51-154
  actualización LU, 60
  adjunta, 90
  anticonmutar, 152
  aumentada, 63-66
  bandeada, 400
  cero, 56
  comprobación de la paridad, 141
  cuadrada, 52
  de transporte, 148-149
  definición, 52-56
  determinante, 77-89
  diagonal, 57
  diagonalizable ortogonalmente, 130
  diagonalizable, 126-134
  ecuación característica, 103
  elemental, 71
  elementos de la diagonal principal, 52
  entradas o elementos, 52
  equivalente a renglón, 64
  escalar, 57
  esparcida, 400
  espín de Pauli, 152
  estocástica, 108
  identidad multiplicativa, 103
  igualdad, 53
  inversa, 89-99
  inversa multiplicativa, 89
  ley asociativa, 55
  ley distributiva, 55-56
  multiplicación, 54-55
  múltiplo escalar de, 54
  múltiplos, 53-55
  nilpotente, 112, 152
  no singular, 126-128, 135, 145
  operaciones elementales, 62
  orden 109
  orden n, 52, 109-110
  ortogonal, 98, 112-119
  particionada, 60
  potencias, 108-112
  producto, 54
  rango, 72-77
  resta, 54
  simétrica, 57, 112, 130-132
  singular, 90
  skew-simétrica, 89
  suma, 53-54, 152
  tamaño, 152
  transpuesta, 56, 83
  triangular, 56
  triangular inferior, 57
  triangular superior, 57
  tridiagonal, 406
  uso para encontrar una transformada inversa, 529
  valor característico dominante, 119-122
  valores característicos, 102-108, 119-126
  vector columna, 52-53
  vector renglón, 52-53
  vectores característicos, 102-108
matriz adjunta
  definición de, 90
  uso para encontrar una inversa, 90-93

matriz aumentada
definición de, 63-70
en su forma de renglones escalonados reducidos, 65
en su forma de renglones escalonados, 64-65
operaciones básicas en renglones, 64
matriz bandeada, 400
matriz cero, 56
matriz comprobadora de la paridad, 141
matriz cuadrada, 52
matriz de transferencia, 148
matriz diagonalizable ortogonalmente, 130
matriz elemental, 71
matriz escalar, 57
matriz esparcida, 400
matriz estocástica, 108
matriz identidad, 57
matriz invertible, 89
matriz nilpotente, 112, 152
matriz no singular, 90-91, 110, 135
matriz ortogonal, 112-119
matriz particionada, 60
matriz simétrica, 57, 112, 130-132
ortogonalidad de los vectores característicos, 113-114
matriz singular, 90
matriz skew-simétrica, 89
matriz tridiagonal, 406
Maxwell, James Clerk, 190
menor, 90
mensaje, 138
meridiano cero, 251
meridiano, 251
método de Crank-Nicholson, 406-407
método de deflación, 123-125
método de diferencias finitas, 410-411
implícito, 406
método de Liebman, 402
método de mínimos cuadrados, 144-146
método de potencia, 120-122
método de potencias inverso, 110, 125
método explícito de diferencia finita, 404-405
método implícito de diferencias finitas, 406
método(s) de eliminación
para sistemas de ecuaciones algebraicas, 64-68
estabilidad, 406
método de Crank-Nicholson, 406-407
método de Gauss-Seidel, 69
método de la deflación, 123-125
método de las potencias inversas, 110, 125
método de las potencias, 120-122
métodos de diferencias finitas, 410-411
mezclas, 417
mínimos cuadrados
línea, 144-146
método, 144-146
Mises, Richard von, 120
modelos compartimentales discretos, 147-151
modo fundamental de vibración, 325
modos normales, 324-325
módulo aritmético dos, 138
módulo de un número complejo, 419
momento lineal, 166
momento polar de inercia, 217, 222
momentos de inercia, 214-215, 245
polares, 217, 222
movimiento sobre una curva, 162-167
muestreo de una función, 386
múltiplemente conectado
dominio, 461-463
región, 204
multiplicación escalar, 6, 36-37
multiplicación
de matrices, 54-55
por escalares, 6
múltiplo escalar
matrices, 54
vectores, 5

N

negativo de un vector, 5, 6
norma
cuadrática, 302-304
de un vector (matriz) columna, 113
de un vector, 7
de una función, 274, 275
de una partición, 193, 207
norma al cuadrado, 274, 302-303
normal principal, 168, 169
normalizar un vector, 36
núcleo de una transformada integral, 381
nudos
de una onda permanente, 325
número(s) complejo(s)
argumento principal, 421
argumento, 421
conjugado, 418-419
definición, 417
desigualdad triangular, 420
división, 418, 421-422
forma polar, 421, 440-441
igualdad, 417
imaginario puro, 417
interpretación geométrica, 419
interpretación vectorial, 419
ley conmutativa, 418
leyes asociativas, 418
leyes distributivas, 418
logaritmo, 441-442
módulo, 419
multiplicación, 418, 421-422
parte imaginaria, 417
parte real, 417
potencias complejas, 444, 481
potencias enteras, 422-423
raíces, 423-424
raíz *n*-ésima principal, 424
resta, 418

suma, 418
unidad imaginaria, 417

O

octantes, 12
ondas permanentes, 324-325, 356
ondas viajeras, 326
operaciones elementales de renglones, 64
notación, 65
operaciones elementales para la resolución de sistemas, 62
operaciones entre renglones, utilización para obtener una inversa, 93-95
operador diferencial, 178
operador Nabla, 188, 189, 190
orden de integración, 246-247
orientación
de una curva, 456
de una superficie, 232-233
orientación ascendente, 232
orientación descendente, 232
ortogonal en un punto, 187

P

palabra, 138
codificación, 140-141
palabra de código, 139
par de transformación, 381, 388
par de transformadas discretas de Fourier, 388
par ordenado, 11
paralelos, 251
clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden, 302-303
lineal homogénea de segundo orden, 310
lineal no homogénea de segundo orden, 310
lineales homogéneas, 312
dependiente del tiempo, 334-337
independiente del tiempo, 332-334
separable, 310-314
solución, 310
parte analítica de una serie de Laurent, 490
parte principal de una serie de Laurent, 490, 497
película, 323-324, 356
perfil de Joukowski, 519
periodo fundamental, 277, 292
peso efectivo, 166
plano complejo, 419
conjuntos en, 425-428
eje imaginario, 419
eje real, 419
plano normal, 30
plano osculador, 169
plano rectificador, 169
plano tangente a una superficie
definición, 185
ecuación, 185-186
ecuación vectorial, 185
plano *xz*, 14
plano *z*, 419, 516
plano(s)
ecuación cartesiana, 31
ecuación vectorial, 30-31
gráficas, 32-33
movimiento curvilíneo sobre un, 163-164
perpendicular a un vector, 31
vector normal, 31-32, 158-159, 169
planos coordinados, 12
polinomios de Legendre, 360
Polinomios hermitianos, 301
polo
de orden *n*, 497, 499
definición, 497
residuo, 501
simple, 497
polo simple, 497
potencia de una matriz, 108-112
potencial
complejo, 543
energía, 209
función, 206, 543
velocidad potencial compleja, 544
potencial complejo, 543
potencial de velocidades complejo, 544
potencias complejas, 444
valor principal, 444
primer armónico, 292, 325
primer modo normal, 325
primera ley de Kepler para el movimiento planetario, 166-167
primera onda estacionaria, 325
primeros momentos, 214
para el problema de Dirichlet en una placa rectangular, 329-330
para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, 312
principio del máximo, 329
problema de Dirichlet, 329, 399-401
para un disco circular, 349-351
funciones armónicas y, 522-523
solución mediante mapeo conformal, 523-524
principio de superposición, 329-330
problema de Neumann
para un disco circular, 352
para un rectángulo, 332
problema de Sturm-Liouville, 294-301
angular, 298-300
normal, 275-277
ortogonalidad de las soluciones, 295-297
propiedades, 295-297
problema de valor de frontera en dos puntos, 294, 295
problema de valor de frontera singular, 298
homogéneo, 334
métodos numéricos para EDP, 399-401, 404, 405, 407
no homogéneo, 332-339
para una ecuación diferencial parcial, 309-349

problema normal de Sturm-Liouville, 295-297
propiedades, 296
problema periódico de valor de frontera, 298
problema singular de Sturm-Liouville, 298, 300
procesamiento de señal, 391-393
proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, 44-49, 117-119, 113
producto caja, 26
producto cruz, 23-28
definición, 23-25
propiedades, 23-24
producto interior
de dos funciones, 273
de dos vectores en el espacio-n, 36, 113
de dos vectores, 113
definición, 36
espacio, 42, 43
producto interior estándar en R", 36, 44
producto interior euclideano, 36
producto punto, 16-23, 36
como trabajo, 20
definición, 16
en términos de matrices, 113
formulación por componentes, 17
interpretación física, 20
propiedades, 17
propiedad de conservación de círculo, 527-528
proyección de un vector sobre otro, 20-21
proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio, 47
prueba de raíz, 481
prueba de relación, 481
prueba para la divergencia del término *n*-ésimo, 480
pulso rectangular, 390
punto de ramificación, 67, 489
punto frontera, 399
punto interior de un conjunto en el plano complejo, 426
punto medio de un segmento de línea, 12-13
punto singular aislado, 489
clasificación, 497
punto singular de una función compleja
aislado, 489
definición, 489
esencial, 497
no aislado, 489
polo, 497-498
removible, 497
punto singular no aislado, 489
puntos críticos para sistemas lineales autónomos
puntos de la retícula, 399
puntos interiores de malla, 399

R

R, 37
R^2, 6, 37
R^3, 11, 13, 37
radio de convergencia, 481, 482
radio de curvatura, 170
radio de giro, 215, 245
raíces características, 103
raíces de un número complejo, 423-424
raíces *n*-ésimas de la unidad, 395
de un número complejo diferente de cero, 423
raíces *n*-ésimas de *z*, de un complejo diferente de cero, 424
raíces reales
raíz cuadrada del promedio de los cuadrados, 283
raíz *n*-ésima de un número complejo diferente de cero, 423
raíz *n*-ésima principal de un número complejo, 424
rama del logaritmo complejo, 443
ramificación principal del logaritmo, 443
rango de una matriz
definición, 72
por reducción de renglones, 72-73
rapidez, 162
rastreador, 147
rectángulo polar, 218-220, 248
redes eléctricas, 67-68
reducción de renglones, 70, 86
región
abierta, 204
cerrada, 427
con orificios, 225-226
conexa, 204
de integración, 210
en el plano complejo, 427
imagen, 261-262
múltiplemente conexa, 204
simplemente conexa, 204
tipo I (II), 211
región fundamental, 440
región tipo I (II), 211
regla de Cramer, 99-102
regla de la cadena para derivadas parciales, 159, 432
regla de la mano derecha, 12
regla de la suma, 160, 432
regla de las mallas, 67
regla de L'Hôpital, 505
regla del cociente, 160, 432
regla del producto, 160, 432
regla del punto, 67
reglas de Kirchhoff de los nodos y de las mallas, 67
reglas de las constantes, 160, 432
relación cruzada, 530
relación de recurrencia diferencial, 302
residuo(s)
definición, 500
en un polo de orden *n*, 501
en un polo simple, 501
evaluación de integrales, 503-504, 506-511
resta de vectores, 5-7
retícula recíproca, 28
R^n, 36, 37
rotación en el plano *z*, 516
rotación y traslación, 516
rotacional de un campo vectorial, 189-191
interpretación física, 190-191, 240-241
rotacional, definición de, 189

S
secuencia
convergente, 478-479
definición, 478
secuencia de sumas parciales, 281-282
segmento de línea, 29
segundos momentos, 214, 245
sentido antihorario, 223
sentido horario, 223
señales filtradas, 393
señales limitadas en la banda, 391, 393
separación constante, 311
serie (infinita)
absolutamente convergente, 480
convergente, 479
Fourier, 278-293
Fourier-Bessel, 302-305
Fourier-Legendre, 305-307
geométrica, 479-480
Laurent, 489-496
Maclaurin, 485, 487
potencia, 481-490, 494
pruebas para la convergencia, 478
Taylor, 483-488
serie de Fourier, 278-293
compleja, 290-293
condiciones para la convergencia, 280-281
coseno, 284-285
definición, 279
en dos variables, 343-346
expansión en, 280
generalizada, 276
seno, 284-285
serie de Fourier-Bessel, 302-305
serie de Fourier-Legendre, 305-307
serie de Maclaurin, 485, 487
serie doble coseno, 345
serie doble seno, 345
serie generalizada de Fourier, 276
serie geométrica, 478-480, 487, 492, 494
serie seno en dos variables, 345
series complejas, 290
series cosenoidales, 284-285
en dos variables, 345
series de Laurent
series de potencia
centro, 481
círculo de convergencia, 481-482
diferenciación, 484
integración, 484
Mclaurin, 485, 487
radio de convergencia, 481, 482
representa una función continua, 484
Taylor, 483-488
series de Taylor, 483-488
series trigonométricas, 278-279
simetría radial, 354
simplemente conexo
dominio, 460, 463, 465, 468-472, 503, 523, 532, 543-544
región, 204
síndrome, 141-143
singularidad esencial, 497
singularidad removible, 497
sistema consistente de ecuaciones lineales, 61
sistema inconsistente de ecuaciones lineales, 61, 67
sistema mal condicionado, 102
sistema sobredeterminado, 70
sistema subdeterminado, 70
sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, 61-71
consistentes, 61
homogéneos, 61-63
inconsistentes, 61
mal condicionados, 102
métodos para resolver
eliminación de Gauss-Jordan, 66-67, 133
eliminación gaussiana, 64-66
inversa de una matriz, 89-99
regla de Cramer, 99-102
no homogéneos, 61-63
sobredeterminados, 70
subdeterminados, 70
sistemas homogéneos de ecuaciones algebraicas, 61-63
soluciones no triviales, 68, 96
soluciones triviales, 68, 96
de ecuaciones algebraicas, 61-71
rango y, 74
sistemas no homogéneos de ecuaciones algebraicas, 61-63
sobretonos, 325
sobretonos anarmónicos, 360
solución de D'Alembert, 326
solución de un sistema de ecuaciones algebraicas
definición, 74
número de parámetros, 74-75
solución de un sistema lineal, 61-63
solución de una ecuación diferencial lineal
definición, 310
particular, 310-312
solución de una ecuación diferencial ordinaria
de ecuaciones lineales, 294
de la ecuación paramétrica de Bessel, 294
de una ecuación de Cauchy-Euler, 294
solución no trivial, 68, 96
de la ecuación de Legendre, 294
solución permanente, 334
solución transitoria, 334
solución trivial, 68, 96
soluciones cerradas, 522
subespacio, 38-39
criterios, 39
submatriz, 60, 78, 80, 90
sucesión compleja, 478

sucesión de Fibonacci, 111
suma
de matrices, 53-54
de vectores, 5-7, 36
suma de los errores cuadráticos, 145
superficie suave, 228
superficie, orientable, 232-233
superficies de nivel, 172-173
sustitución, 63
sustituciones
en integrales, 220, 261
Sylvester, James Josepb, 35

T
tablas
de mapeos conformes, 521-522, APP-9
de transformadas de Laplace, 366, APP-4
tangente unitaria, 161, 167
temperatura
en un cuadrado, 99,.347
en un rectángulo, 316
en una barra, 339
temperatura permanente, 316, 327, 349, 351, 361, 522, 531, 541
teorema de Cauchy, 460
teorema de Cauchy-Goursat, 459-464
para dominios múltiplemente conexos, 461-463
teorema de Cayley-Hamilton, 108
teorema de convolución
para la transformada de Fourier, 385
teorema de fronteras para integrales complejas, 457
teorema de fronteras para integrales de contorno, 457
teorema de Gauss, 254
teorema de Green, 223-228, 254
en espacio 3D, 235
teorema de la divergencia, 254-260
teorema de Laurent, 490-491
teorema de Liouville, 474
teorema de mapeo de Riemann, 532
teorema de Pitágoras, 7
teorema de Stokes, 237-242
teorema de Taylor, 485
teorema del muestreo, 391-392
teorema del residuo de Cauchy, 503-504
teorema del residuo, 503-504
teorema fundamental
del álgebra, 474
para integrales de contorno, 466-467
teoremas de unicidad, 96
torque, 23
trabajo
como integral de línea, 198-200
como producto punto, 20
trabajo realizado por una fuerza constante, 20, 225
transformación, 261-262
transformación conforme, 519-526
problema de Dirichlet, 522-524
transformación de Joukowski, 519
transformación de Schwartz-Christoffel, 532-537
transformación en el plano, 515
transformación fraccional lineal, 526-532
transformación inversa, 262
transformación uno a uno, 262
transformaciones que preservan los ángulos, 519-521
transformaciones sucesivas, 517-518
transformada coseno de Fourier
definición, 382-383
propiedades operacionales, 384
de una derivada parcial, 368-375
tablas, 366
transformada discreta de Fourier, 386-387
transformada integral
transformada integral inversa
coseno Fourier, 382
Fourier, 383
seno Fourier, 382
transformada rápida de Fourier, 388
cálculo con, 393-394
transformada seno de Fourier
definición, 382
propiedades operacionales, 382-383
transformadas de Fourier, 380-386
existencia, 382
transpuesta de una matriz, 83
propiedades, 56
traslación
y contracción, 517
y rotación, 516
traslación en el plano z, 516
trayectorias, 164
traza
de un plano, 32
triple producto escalar, 25
triple producto vectorial, 26
triples a triples, 530
tripleta ordenada, 12

V
valor absoluto de un número complejo, 419
valor característico dominante, 119-125
vector característico, 120
valor principal
de la función logaritmo y, 442-444
de una integral, 507
de una potencia compleja, 442-444
valor principal de Cauchy, 507
valores característicos, 103
valores característicos dobles, 351
aproximación, 119-126
de una matriz, 102-108
dobles, 351

dominantes, 119-125
reales, 112
variables dependientes, 171, 332-334
variables independientes, 171, 332-334
variables, separables, 310-312
variación de parámetros
vecindad, 426
vector característico de una matriz
complejo, 106-107
definición, 102
ortogonal, 113-114
vector característico normalizado, 123-124
vector cero, 5, 7
vector de dimensión n, 44
vector de dirección, 5, 28
vector de posición, 6, 13
vector igual, 6
vector normal a un plano, 30-32
vector renglón, 53
vector unitario, 7-8, 36
vector(es)
aceleración vectorial, 162-163
ángulo entre, 18
ángulos directores, 18-19
binormal, 169
campos vectoriales, 187-192
cero, 5, 7
componente horizontal, 8
componente vertical, 8
componentes de un vector, 6
conjunto conexo, 41-42
coplanares, 26
cosenos directores, 18-19
dirección, 5
ecuación vectorial para un plano, 30-31
ecuación vectorial para una línea, 28-29
en el espacio 2D, 5-11
en el espacio 3D, 11-16
en el espacio n-dimensional, 36
en un plano coordenado, 6, 12
función vectorial, 156
iguales, 6
libre, 5
longitud, 7
magnitud, 5, 7, 14
multiplicación por escalares, 6
múltiplo escalar, 5
negativo, 5, 6
norma, 7, 36, 43
normal a un plano, 31-32, 158-159, 169
operador diferencial, 178
ortogonales, 17-18, 36, 275
paralelos, 5, 24, 29
posición, 6, 13
producto cruz, 23-28
producto escalar, 5
producto interior, 113
producto punto, 16-17, 36
propiedades, 7
proyección, 20-21
punto inicial, 5-8
punto terminal, 6, 7
regla de la mano derecha, 5
resta, 5-7
resultante, 166
suma de, 5-7, 36
tangente, 158-159, 169
triple producto escalar, 25
triple producto vectorial, 26
unitario, 7-8, 36
vector geométrico, 5
velocidad, 162-163
vectores característicos por ortogonales, 113-114
vectores característicos, 103
vectores coplanares, 26
criterio para, 26
vectores geométricos, 5
vectores libres, 5
vectores ortogonales, 17-18, 36
vectores paralelos, 5, 29
criterio, 24
vectores tangentes, 158-159
campo de, 166
potencial, complejo, 544
vector, 162-163
vibraciones eléctricas
vibraciones radiales, 354-356
vibraciones transversales, 316, 325, 343, 354
viga empotrada, 326
viga simplemente apoyada, 326
viga vibrando, 326
vigas
empotradas, 326
simplemente apoyadas, 326
volumen
bajo una superficie, 210
de un paralelepípedo, 26
de un triángulo, 26
utilizando integrales dobles, 211-212
utilizando integrales triples, 245
vórtice, 547

W

wronskiano